

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Análise de vibrações em estruturas otimizadas com materiais piezelétricos

Anderson Donay Martins

Pelotas, 2022

Anderson Donay Martins

Análise de vibrações em estruturas otimizadas com materiais piezelétricos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Molter

Pelotas, 2022

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

M379a Martins, Anderson Donay

Análise de vibrações em estruturas otimizadas com materiais piezelétricos / Anderson Donay Martins ; Alexandre Molter, orientador. — Pelotas, 2022.

74 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2022.

1. Piezeletricidade. 2. Otimização topológica. 3. Problemas de otimização estrutural. 4. Vibrações. I. Molter, Alexandre, orient. II. Título.

CDD : 537.244

**ANÁLISE DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS OTIMIZADAS COM MATERIAIS
PIEZELÉTRICOS**

por

Anderson Donay Martins

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Modelagem Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexandre Molter – Orientador (UFPel)

Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández (UFPel)

Prof. Dr. Gustavo Assis da Silva (UFPel)

Prof. Dr. Lucas dos Santos Fernandez (USP)

Profa. Dra. Rejane Pergher (UFPel)

Pelotas, 09 de março de 2022

RESUMO

DONAY MARTINS, Anderson. **Análise de vibrações em estruturas otimizadas com materiais piezelétricos**. 2022. 74 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

O objetivo desse trabalho é resolver um problema de otimização topológica para encontrar a estrutura mais rígida possível sujeita a uma determinada restrição de volume e computar as vibrações dessa estrutura. São obtidas estruturas com apenas um material (alumínio) e com dois materiais (alumínio e material piezelétrico). É abordado o tema da piezeletricidade, sendo citadas algumas contribuições históricas importantes, além do comportamento mecânico das cerâmicas piezelétricas. São apresentadas as equações da piezeletricidade, que serão utilizadas nos problemas de otimização com materiais piezelétricos, para definir a melhor localização para o material piezelétrico. É apresentada a teoria da otimização topológica. São colocadas contribuições históricas importantes para a otimização estrutural, com enfoque maior na otimização topológica. É explicado o problema da mínima flexibilidade, que tem como objetivo obter a topologia com maior rigidez satisfazendo a condição de equilíbrio e a restrição de volume. Para resolver o problema, são apresentados os conceitos do método das densidades e critério ótimo, além do esquema iterativo utilizado. O domínio é discretizado com a utilização do método dos elementos finitos. São apresentados os possíveis problemas de instabilidade numérica que podem ocorrer e o filtro de sensibilidades, um recurso para evitar essas instabilidades. São colocados alguns conceitos da dinâmica das estruturas, conceitos que são necessários para poder computar as frequências e modos de vibração. Os resultados são representados, com os gráficos das estruturas otimizadas e os gráficos correspondentes aos três primeiros modos de vibração.

Palavras-chave: Piezeletricidade, Otimização topológica, Problemas de otimização estrutural, Vibrações.

ABSTRACT

DONAY MARTINS, Anderson. **Vibration Analysis in Composite Structures with Piezoelectric Materials and Optimized**. 2022. 74 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

The objective of this work is to solve a topology optimization problem to find the most rigid structure possible for a given volume constraint and compute the vibrations of this structure. Structures are obtained with only one material (aluminum) and with two materials (aluminum and piezoelectric material). The topic of piezoelectricity is addressed, citing some important historical contributions, in addition to the mechanical behavior of piezoelectric ceramics. The equations of piezoelectricity are presented, which will be used in the optimization problems with piezoelectric materials, to define the best location for the piezoelectric material. The theory of topology optimization is presented. Important historical contributions to structural optimization are presented, with main focus on topology optimization. The problem of minimal compliance is presented, which aims to obtain the topology with maximal stiffness satisfying the equilibrium condition and the volume constraint. To solve the problem, the concepts of the density method and optimality criterion are presented, in addition to the iterative scheme used. To solve the problem, the domain is discretized using the finite element method. Possible problems of numerical instability that can occur are presented together with the sensitivity filter, a resource to avoid these instabilities. Some concepts of the dynamics of structures are presented, that are necessary to compute the frequencies and modes of vibration. The results are presented by means of figures of the optimized structures and the figures corresponding to the first three vibration modes.

Keywords: Piezoelectricity, Topology optimization, Structural optimization problems, Vibrations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Estrutura perovskita ABO_3 (ASSIREY, 2019).	18
Figura 2	Polarização da estrutura perovskita, onde (a) é a polarização inicial, (b) é a polarização enquanto a estrutura é submetida a um campo elétrico e (c) é a polarização após a retirada desse campo elétrico (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).	19
Figura 3	Reações da cerâmica polarizada, (a) representa o sentido da polarização da estrutura. (b) e (c) representam, respectivamente, a diferença de potencial elétrico gerada na estrutura após uma compressão e uma tensão no sentido de polarização. (d) e (e) representam, respectivamente, as reações mecânicas na estrutura após a aplicação de uma diferença de potencial de mesmo sentido e de sentido oposto a polaridade da cerâmica (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).	19
Figura 4	Categorias de otimização. Em (a) ocorre a otimização de dimensionamento, em (b) ocorre a otimização de forma e em (c) ocorre a otimização topológica (BENDSOE; SIGMUND, 2003).	25
Figura 5	Estruturas obtidas para diferentes expoentes de penalidade p	29
Figura 6	Esquema iterativo para as densidades dos elementos	31
Figura 7	Fluxograma do método iterativo proposto na subseção 3.5.1	33
Figura 8	Exemplos de tabuleiros de damas (ARAUJO; LAGES; CAVALCANTE, 2020).	33
Figura 9	Dependência de malha (SIGMUND; PETERSSON, 1998).	34
Figura 10	Exemplo de malha com 28 elementos e 40 pontos nodais.	37
Figura 11	Elemento finito de dimensões $a \times b$ e a mudança de coordenadas.	37
Figura 12	Elemento finito com nós numerados.	38
Figura 13	Numeração global dos graus de liberdade de um elemento.	43
Figura 14	Estrutura otimizada do caso 1, sem material piezolétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.	63
Figura 15	Amplitudes de vibração da estrutura do caso 1, com frequências iguais a 347,9 Hz, 845,08 Hz e 1087,61 Hz, respectivamente.	64
Figura 16	Estrutura otimizada do caso 1, com material piezolétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.	64
Figura 17	Amplitudes de vibração da estrutura do caso 1, com frequências iguais a 419,48 Hz, 891,43 Hz e 1275,16 Hz, respectivamente.	64
Figura 18	Estrutura otimizada do caso 2, sem material piezolétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.	65

Figura 19	Amplitudes de vibração da estrutura do caso 2, com frequências iguais a 378,67 Hz, 656,44 Hz e 988,44 Hz, respectivamente. . . .	65
Figura 20	Estrutura otimizada do caso 2, com material piezelétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.	65
Figura 21	Amplitudes de vibração da estrutura do caso 2, com frequências iguais a 547,93 Hz, 785,05 Hz e 838,22 Hz, respectivamente. . . .	66
Figura 22	Estrutura otimizada do caso 3, sem material piezelétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.	66
Figura 23	Amplitudes de vibração da estrutura do caso 3, com frequências iguais a 405,62 Hz, 680,21 Hz e 1099,51 Hz, respectivamente. . . .	66
Figura 24	Estrutura otimizada do caso 3, com material piezelétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.	67
Figura 25	Amplitudes de vibração da estrutura do caso 3, com frequências iguais a 549,9 Hz, 705,54 Hz e 997,02 Hz, respectivamente.	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Troca de índices	21
Tabela 2	Relação entre o expoente p e a flexibilidade	28
Tabela 3	Conversão de índices locais para globais	42
Tabela 4	Frequência dos três primeiros modos de vibração (em Hz)	67
Tabela 5	Flexibilidade das estruturas	68

LISTA DE SÍMBOLOS

- a Tamanho do elemento na direção horizontal
- $a(u, v)$ Forma bilinear da energia
- b Tamanho do elemento na direção vertical
- c_{ijkl} Constante elástica
- c_ϕ Constantes do material piezolétrico
- c_u Constantes do material não-piezolétrico
- C Matriz de amortecimento
- D_i Deslocamento elétrico na direção i
- d Vetor de deslocamentos modais
- d_Ω Função densidade
- E_k Campo elétrico na direção k
- e_{ijk} Constante piezolétrica
- \mathbf{f} Vetor de cargas global
- \mathbf{f}_e Vetor de cargas de um elemento
- f_i Força de corpo por unidade de massa
- f_ϕ Cargas elétricas
- H_i Fator peso do filtro de sensibilidades
- \mathbf{K} Matriz de rigidez global
- \mathbf{K}_e Matriz de rigidez de um elemento
- \mathbf{K}_{uu} Matriz de rigidez global do material não-piezolétrico
- \mathbf{K}_{uu}^e Matriz de rigidez do material não-piezolétrico de um elemento
- $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ Matriz de rigidez global do material piezolétrico

$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e$ Matriz de rigidez do material piezolétrico de um elemento

\mathcal{L} Lagrangeano

$l(u)$ Forma linear dos carregamentos

M Fração de volume do material piezolétrico da estrutura otimizada em relação ao domínio estendido

\mathbf{M} Matriz de massa global

\mathbf{M}_e Matriz de massa de um elemento

m Número de elementos do domínio na direção vertical

N Fração de volume da estrutura otimizada em relação ao domínio estendido

N_i Função de interpolação

m Número de elementos do domínio na direção horizontal

\mathbf{p} Força de peso

p Expoente de penalização

r_{min} Raio de filtrage

T Energia cinética

T_{ij} Componente da i -ésima linha e j -ésima coluna do tensor de tensões

\mathbf{t} Cargas aplicadas no contorno

U Campo de deslocamentos admissíveis no problema de otimização topológica

\mathbf{u} vetor dos deslocamentos mecânicos

u_i Deslocamento mecânico na direção i

u_N Deslocamento mecânico na N -ésima iteração

V_e Volume do e -ésimo elemento

V_{mat} Volume de material da estrutura otimizada

V_{Ω} Volume do domínio estendido

W_u Trabalho realizado pela tensão

W_{ϕ} Trabalho realizado pelo campo elétrico

W Trabalho realizado pelas forças externas

x_i Direção i

δ Operador variacional

- ε_{ij} Componente da i -ésima linha e j -ésima coluna do tensor de deformações
- ϵ_{ij} Constante dielétrica
- η Variável do eixo vertical no método dos elementos finitos
- γ_{xy} Deformação por cisalhamento
- λ_i Multiplicador de Lagrange
- Λ Multiplicador de Lagrange
- Λ_N Multiplicador de Lagrange na N -ésima iteração
- ∇ Operador gradiente
- ν Coeficiente de Poisson
- Ω Conjunto dos pontos que a estrutura possui material
- ω_j Frequência natural do j -ésimo modo de vibração
- ∂ Operador diferencial parcial
- Π Energia potencial
- ϕ Potencial elétrico
- Φ_j j -ésimo modo natural de vibração
- ρ Densidade
- ρ_f Densidade das cargas livres
- ρ_e Densidade do e -ésimo elemento
- ρ_{eN} Densidade do e -ésimo elemento na N -ésima iteração
- ρ_ϕ Porcentagem de material piezelétrico
- ρ_{elast} Densidade do material não-piezelétrico
- ρ_{pzt} Densidade do material piezelétrico
- ρ_u Porcentagem de material não-piezelétrico
- $\rho_{\phi e}$ Densidade de material piezelétrico do e -ésimo elemento
- ρ_{min} Densidade mínima permitida para um elemento
- σ Tensão
- ξ Variável do eixo horizontal no método dos elementos finitos
- ξ_a Parâmetro de ajuste
- ζ Limite móvel

LISTA DE ABREVIATURAS

- IEEE The Institute of Electrical and Electronics Engineers
- MEF Método dos Elementos Finitos
- PZT5A Titanato Zirconato de Chumbo
- SIMP Solid Isotropic Material with Penalization

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Motivação	14
1.2	Objetivos	15
1.3	Organização do Trabalho	16
2	PIEZELETRICIDADE	17
2.1	Introdução	17
2.2	Cerâmicas piezelétricas	18
2.3	Equações da piezeletricidade	20
2.3.1	Tensores e a notação matricial	21
2.3.2	Constantes do material: elásticas, piezelétricas e dielétricas	22
3	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	24
3.1	Introdução	24
3.2	Aspectos históricos	25
3.3	Problema da mínima flexibilidade	26
3.4	Método das densidades	26
3.5	Critério Ótimo	28
3.5.1	Encontrando a solução: método iterativo	30
3.6	Instabilidades numéricas	32
3.6.1	Tabuleiros de damas	32
3.6.2	Dependência da malha	34
3.6.3	Mínimos locais	35
3.7	Filtro de sensibilidades	35
3.8	Método dos elementos finitos	36
3.8.1	Formulação dos deslocamentos	37
4	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA ENCONTRAR A POSIÇÃO ÓTIMA DE ATUADORES PIEZELÉTRICOS	44
4.1	Introdução	44
4.2	Problema de otimização da mínima flexibilidade	45
4.3	Método das densidades	46
4.4	Critério Ótimo	47
4.4.1	Encontrando a solução: método iterativo	49
4.5	Método dos elementos finitos	50

5	DINÂMICA DAS ESTRUTURAS	54
5.1	Equação do equilíbrio dinâmico	54
5.2	Resolvendo a equação do equilíbrio dinâmico	57
5.2.1	Modelo modal	57
5.2.2	Transformação para Espaços de Estados	59
5.3	Análise Dinâmica com Material Piezelétrico	60
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	61
6.1	Valores das constantes dos materiais e dos parâmetros utilizados	61
6.2	Caso 1	63
6.3	Caso 2	65
6.4	Caso 3	66
6.5	Análise dos Resultados	67
7	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	69
	REFERÊNCIAS	70

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Materiais compósitos são materiais que são originados pela combinação de dois ou mais materiais com propriedades diferentes e que não se dissolvem ou se misturam. Esses materiais podem inclusive ser originados de forma natural, como a madeira, que é composta por fibras de celulose conectadas por uma substância chamada lignina (NGO, 2020).

O uso desses materiais é muito importante, pois é possível obter propriedades melhores com a utilização desses materiais, como por exemplo, uma estrutura mais rígida ou com melhor condução de eletricidade. Nos últimos anos, uma área que tem aumentado o uso de materiais compósitos de forma considerável é a área de geração de energia renovável, onde as fibras do material compósito são alinhadas de forma a aumentar a resistência em uma direção, e diminuindo em outra direção que não necessite uma resistência tão grande (NGO, 2020).

Entre os materiais compósitos, estão alguns materiais chamados de materiais inteligentes. Esse materiais se caracterizam pela capacidade de alterar algumas propriedades e realizar funções em resposta a algum estímulo, como por exemplo, temperatura, pressão e campo elétrico. Esses materiais costumam ser colocados em estruturas que são melhoradas pelas propriedades ou funções que esse material possibilita. Entre os materiais inteligentes, estão os materiais piezelétricos, que são caracterizados por gerar um campo elétrico através de uma pressão mecânica (no caso dos sensores) e produzir uma resposta mecânica ao ser estimulado por um campo elétrico (no caso dos atuadores) (GHAREEB; FARHAT, 2018). A fim de minimizar custos de produção, ou para serem mais leves e versáteis, é natural que se busque uma otimização das estruturas, minimizando a quantidade de material e ao mesmo tempo mantendo suas funcionalidades, principalmente ao se tratar de materiais compósitos, em que a composição já é motivada para atender algumas funcionalidades específicas, como por exemplo, inclusão de atuadores numa estrutura.

Para obter estruturas otimizadas, é utilizado um método de otimização estrutural,

permitindo encontrar uma estrutura que maximize a utilidade de uma quantidade fixa de recursos para cumprir um objetivo estabelecido (KINGMAN; TSAVDARIDIS; TOROPOV, 2014). Em geral, o método de otimização topológica é preferido em relação aos outros métodos (dimensionamento e forma), pois permite mais detalhes na estrutura, como o número, tamanho, localização e formato de buracos.

À medida que as estruturas vão ficando mais leves, as vibrações estruturais tendem a ficar com amplitudes maiores, muitas vezes necessitando um controle de vibrações. Um excesso de vibrações pode causar vários danos a determinadas estruturas e suas funções. Esses prejuízos podem ser de várias naturezas, como falhas estruturais (fadiga de uma peça de uma máquina), desconforto (vibração de um carro com um amortecedor ruim na suspensão) e diminuição na precisão de algum dispositivo (alguns ramos da engenharia trabalham com precisões milimétricas) (PREUMONTH, 2011). Eliminar essas vibrações em sua totalidade não é algo possível, mas existem meios para diminuir essas vibrações. Uma das possibilidades é a utilização de atuadores piezelétricos. Por outro lado, vibrações com amplitudes maiores podem ser úteis para o uso em conversores e coletores de energia (SAFAEI; ANTON; SODANO, 2019; PRIYA, 2007). Mas para isto é necessário encontrar a melhor localização para a colocação dos conversores que, em geral, são compostos por materiais piezelétricos (BENDINE; HAMDAROU; BOUKHOULDA, 2019; HE et al., 2021; ZHENG; CHANG; GEA, 2009).

1.2 Objetivos

O objetivo geral desse trabalho é analisar vibrações em estruturas compostas (com materiais piezelétricos e não-piezelétricos) e otimizadas, nas quais o tipo de otimização utilizado é a otimização topológica.

Como objetivos específicos, tem-se:

- Discretizar o domínio das estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos e resolver as equações tanto da estática quanto da dinâmica das estruturas.
- Formular um problema de otimização topológica para projetar a localização de materiais piezelétricos;
- Resolver o problema de otimização topológica de estruturas contínuas em domínios bidimensionais;
- Computar as vibrações das estruturas otimizadas;
- Comparar a amplitude das vibrações nas estruturas com diferentes combinações dos materiais (material piezelétrico e material não-piezelétrico).

1.3 Organização do Trabalho

Esse trabalho está organizado em 7 capítulos. No capítulo 1 é feita uma introdução ao tema, com a motivação e os objetivos do trabalho. No capítulo 2 é feita uma abordagem histórica sobre o fenômeno da piezeletricidade, onde são abordadas questões físicas (como o comportamento) e matemáticas (equações) que são utilizadas posteriormente. O capítulo 3 consiste na otimização topológica em problemas estáticos, abordando aspectos históricos (a evolução do método ao longo do tempo) e como ocorre a otimização topológica. É apresentado o problema da otimização da mínima flexibilidade, como discretizá-lo através do método dos elementos finitos e como resolvê-lo através da otimização topológica. Também são abordadas algumas instabilidades numéricas que surgem na aplicação do método (e como resolvê-las). No capítulo 4, o problema clássico da mínima flexibilidade é estendido ao uso de materiais piezelétricos. No capítulo 5, são apresentados alguns conceitos envolvendo dinâmica das estruturas e como calcular as frequências e modos de vibração, através de um problema de autovalor e autovetor. No capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos, através da otimização topológica apresentada nos capítulos 3 e 4 (onde são obtidas estruturas otimizadas) e o cálculo das frequências e modos de vibração (com os conceitos do capítulo 5). Por fim, no capítulo 7, são colocadas as conclusões e perspectivas futuras para continuação do trabalho.

2 PIEZELETRICIDADE

2.1 Introdução

De acordo com o *Online Etymology Dictionary*, o prefixo *piezo* deriva da palavra grega *piezein*, que significa pressionar, ou seja, piezeletricidade é a eletricidade produzida através de pressão.

A primeira publicação científica envolvendo piezeletricidade é de 1880, de autoria dos irmãos Jacques e Pierre Curie (MOHEIMANI; FLEMING, 2006). Os irmãos Curie descrevem experimentos com alguns cristais que geram eletricidade conforme são submetidos a uma variação de pressão, um efeito análogo a piroeletricidade (fenômeno que remete a geração de eletricidade devido a variação de temperatura) que já era conhecida naquela época e que ocorria nos mesmos cristais utilizados nos experimentos (CURIE; CURIE, 1880). Esse efeito é conhecido como efeito piezelétrico direto. No ano seguinte, através das leis fundamentais da termodinâmica, o efeito piezelétrico inverso, que é a ocorrência de uma deformação mecânica devido à ação de um campo elétrico, foi previsto matematicamente por LIPPMANN (1881).

A primeira importante aplicação de materiais piezelétricos surgiu durante a primeira guerra mundial, cerca de 35 anos depois da descoberta dos irmãos Curie, quando Langevin criou um sonar composto por placas piezelétricas. Após o sucesso da invenção de Langevin, materiais piezelétricos foram utilizados em muitas aplicações como, por exemplo, em transdutores ultrassônicos e estabilizadores de frequência para osciladores de tubo de vácuo (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

Com o passar dos anos, foram descobertas propriedades piezelétricas em vários materiais. Conforme ZHU (2010), Busch e Scherrer descobriram propriedades piezelétricas no dihidrogenofosfato de potássio na década de 1930, e Jaffe e seus colegas de trabalho descobriram efeitos piezelétricos no titanato-zirconato de chumbo (PZT), na década de 1950.

No final da década de 1960, cientistas japoneses descobriram que o fluoreto de polivinilideno possuía altas propriedades piezelétricas após polarização em alta temperatura e pressão (HU et al., 2018), enquanto na década de 1980 ocorreu o desen-

volvimento das cerâmicas de niobato de chumbo e magnésio (HAERTLING, 1999) e no início dos anos 2000 alguns estudos mostraram altos coeficientes piezelétricos, na ordem de mais de 1500 pC/N, em cristais de titanato de chumbo e niobato de chumbo e magnésio (ZHANG et al., 2018).

2.2 Cerâmicas piezelétricas

Segundo HAO et al. (2019), as cerâmicas piezelétricas que possuem as melhores propriedades são as que cristalizam em uma estrutura do tipo perovskita. Conforme ASSIREY (2019), uma estrutura é dita perovskita quando é da forma genérica ABX_3 , onde A e B são cátions de tamanhos diferentes e X é um ânion ligado a ambos (geralmente oxigênio), e possui a mesma estrutura cristalográfica do titanato de cálcio ($CaTiO_3$), que também é conhecido como Perovskita, em homenagem a Lev Perovski. Na figura 1 tem-se a representação de uma estrutura do tipo ABO_3 , onde A é um cátion bivalente e B é um cátion tetravalente.

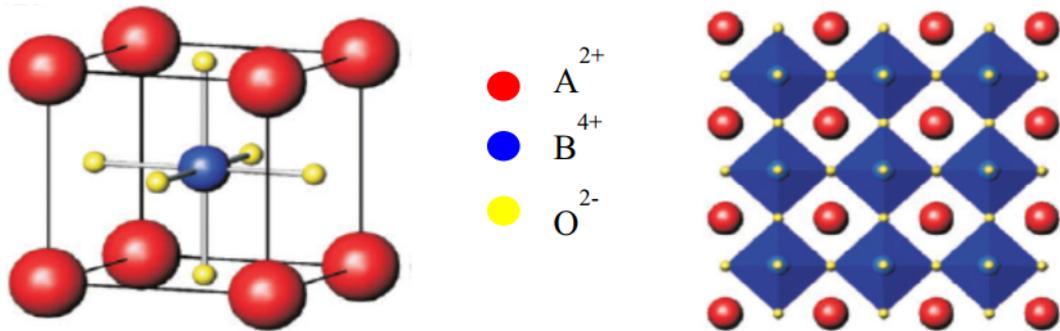


Figura 1: Estrutura perovskita ABO_3 (ASSIREY, 2019).

Para preparar uma cerâmica piezelétrica perovskita, mistura-se pós finos de óxidos de metal em uma proporção específica. Então, a mistura é aquecida (formando um pó uniforme), misturada com um ligante orgânico e moldada em formas específicas. Essas formas são aquecidas formando uma estrutura cristalina densa. Em seguida são resfriadas e colocados eletrodos nas superfícies apropriadas da estrutura. Após esse processo, os cristais da estrutura não têm a mesma direção de polarização (figura 2 (a)), e então a estrutura é submetida a um campo elétrico, fazendo com que todos os cristais tenham a mesma direção de polarização (figura 2 (b)). Após a retirada desse campo elétrico, os cristais não voltam para a configuração antiga e os dipolos ficam alinhados na mesma direção com leves alterações (figura 2 (c)) (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

Essa cerâmica polarizada sofre deformações quando submetida a estímulos elétricos e produz diferença de potencial elétrico quando submetida a ações

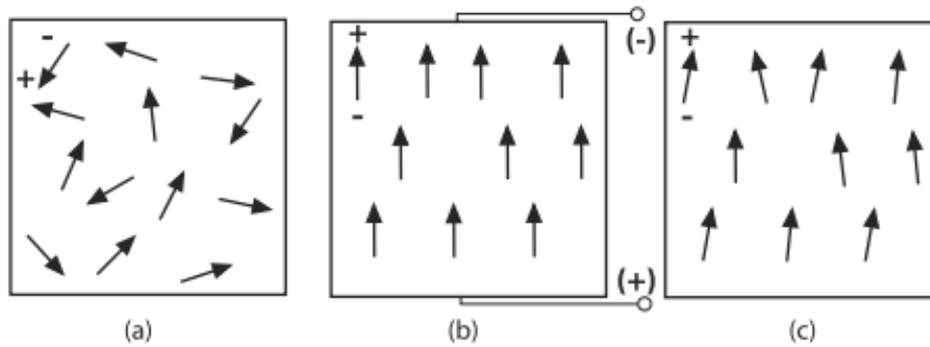


Figura 2: Polarização da estrutura perovskita, onde (a) é a polarização inicial, (b) é a polarização enquanto a estrutura é submetida a um campo elétrico e (c) é a polarização após a retirada desse campo elétrico (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

mecânicas. A figura 3 reproduz as reações ocorridas na cerâmica polarizada. Quando ocorre a ação de uma força comprimindo a estrutura no sentido da polarização (e consequentemente deixando-a levemente mais baixa e larga), é gerada uma diferença de potencial elétrico de mesma polaridade que a cerâmica (figura 3(b)). Quando tem-se uma tensão no sentido da polarização (deixando a estrutura levemente mais alta e fina), ocorre a geração de uma diferença de potencial elétrico de polaridade oposta (figura 3(c)). E quando alguma diferença de potencial elétrico for aplicada, uma deformação na estrutura vai ocorrer, e essa deformação depende do sentido da polaridade da diferença de potencial elétrico. Se a polaridade da diferença de potencial elétrico for no mesmo sentido da cerâmica, então a cerâmica ficará maior e mais fina (figura 3(d)). Caso seja no sentido oposto, então ficará menor e mais larga (figura 3(e)) (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

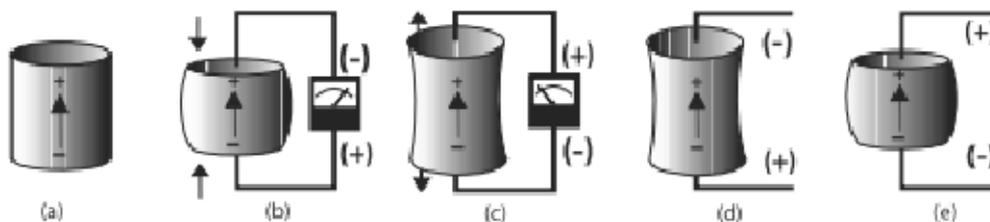


Figura 3: Reações da cerâmica polarizada, (a) representa o sentido da polarização da estrutura. (b) e (c) representam, respectivamente, a diferença de potencial elétrico gerada na estrutura após uma compressão e uma tensão no sentido de polarização. (d) e (e) representam, respectivamente, as reações mecânicas na estrutura após a aplicação de uma diferença de potencial de mesmo sentido e de sentido oposto a polaridade da cerâmica (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

2.3 Equações da piezeletricidade

Segundo AWRUCH; LINN; MORSCH (2018), um problema estático de elasticidade linear é definido se são satisfeitas as equações de equilíbrio, equações de compatibilidade de deformações, equações constitutivas e condições de contorno. No caso de um problema dinâmico, ainda é necessário que sejam satisfeitas algumas condições iniciais para as componentes de deslocamento e de velocidade.

Na teoria de elasticidade linear, segundo AWRUCH; LINN; MORSCH (2018), são chamadas de equações (ou relações) constitutivas as relações entre as componentes de tensão e de deformação específica. Essas equações são conhecidas como a *Lei de Hooke generalizada*.

Ampliando esses conceitos para os problemas de piezeletricidade linear, são acrescentadas novas variáveis, equações e condições relacionadas à piezeletricidade. As equações constitutivas, além de relacionar os componentes de tensão e de deformação específica, também vão envolver os componentes do campo elétrico e do deslocamento elétrico.

Conforme YANG (2005), a teoria da piezeletricidade linear consiste nas seguintes equações:

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \rho_f, \quad (2)$$

$$T_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k, \quad (3)$$

$$D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}E_k, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5)$$

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (6)$$

em que T_{ij} e ε_{ij} são os tensores de tensões e deformações, ρ é a densidade de massa do material, ρ_f é a densidade das cargas elétricas livres, f_i é a força de corpo por unidade de massa, u_i e D_i são os deslocamentos mecânicos e elétricos, E_k e ϕ são o campo elétrico e o potencial elétrico, e c_{ijkl} , e_{ijk} , ϵ_{ij} são as propriedades elásticas, piezelétricas e dielétricas.

As equações (1) e (2) representam as equações de movimento e de carga, as equações (3) e (4) são as relações constitutivas e as equações (5) e (6) são as relações entre deformação e deslocamento mecânicos e entre campo e potencial elétricos. Além de satisfazer essas equações, o problema também precisa satisfazer as condições iniciais e de contorno.

Tabela 1: Troca de índices

ij (ou kl)	p (ou q)
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
31 ou 13	5
12 ou 21	6

2.3.1 Tensores e a notação matricial

Uma forma de simplificar os índices das relações constitutivas, é utilizar a notação matricial compacta (YANG, 2005). A forma compacta troca os pares de índices ij e kl por novos índices p e q , de acordo com a tabela 1.

Utilizando a troca de índices da tabela 1 nas equações (3) e (4), obtêm-se as relações constitutivas na notação matricial compacta:

$$T_p = c_{pq}\varepsilon_q - e_{kp}E_k \quad (7)$$

e

$$D_i = e_{iq}\varepsilon_q + \epsilon_{ik}E_k. \quad (8)$$

Considerando, $i, k = 1, 2, 3$ e $p, q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, é possível escrever as equações (7) e (8) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

e

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

De acordo com TIERSTEN (1969), as cerâmicas polarizadas ferroelétricas (dentre as quais, as cerâmicas perovskitas) possuem a mesma simetria dos cristais hexagonais da classe $C_{6v} = 6mm$. É possível reduzir a quantidade de constantes utilizadas nas equações (9) e (10), visto que algumas dessas constantes serão iguais devido às simetrias do material e outras serão nulas devido às propriedades do material. Considerando o eixo x_3 sendo a direção da polarização, as matrizes das constantes elásticas, piezelétricas e dielétricas são dadas por:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

e

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

com $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$.

2.3.2 Constantes do material: elásticas, piezelétricas e dielétricas

As constantes utilizadas nas relações constitutivas mostradas nas equações (9) e (10) representam propriedades do material utilizado. Conforme as normas de piezeletricidade propostas em 1987 pelo IEEE (*The Institute of Electrical and Electronics Engineers*), os valores dessas constantes são obtidos através de amostras e técnicas experimentais (IEEE, 1987).

O significado dos três tipos de constantes (elásticas, piezelétricas e dielétricas) é apresentado por MOHEIMANI; FLEMING (2006). A constante elástica c_{ij} é dada pela razão entre a deformação na direção i e a tensão na direção j (desde que não ocorra mudança de tensão nas outras duas direções). Os índices 1, 2 e 3 indicam tensões e deformações diretas, enquanto que os índices 4, 5 e 6 indicam tensões e deformações por cisalhamento. A constante piezoeletrica e_{ij} é dada pela razão entre a deformação na direção j e o campo elétrico aplicado ao longo do eixo i (desde que as tensões se mantenham constantes). Por fim, a constante dielétrica ϵ_{ij} determina a carga por unidade de área no eixo i devido a ação de um campo elétrico aplicado ao longo do

eixo j .

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

3.1 Introdução

Uma forma de diminuir os custos de fabricação de estruturas e peças em grande escala é reduzindo a quantidade de material utilizado. Mas certamente, uma estrutura de uma construção, ou até mesmo uma peça de um avião, precisa ser projetada com capacidade para exercer uma determinada função física, e com segurança.

Conforme QUERIN et al. (2017), a otimização estrutural é o processo de determinar a melhor distribuição de material dentro de um domínio de volume físico, que satisfaça determinadas restrições de projeto e de fabricação impostas. Exemplos de restrições podem ser dados por uma quantidade de volume de material, pela presença (devido a um engaste ou pela aplicação de carga em determinado ponto) e ausência (devido a necessidade de algum furo) de material em determinados locais da estrutura.

A melhor distribuição de material é considerada aquela (dentre as que satisfaçam todas as restrições de projeto e de fabricação impostas) que otimiza (maximiza ou minimiza) uma determinada função, chamada de *função objetivo*. Na área de otimização estrutural, o objetivo mais comum é o de minimizar a flexibilidade da estrutura (equivalente a maximizar a rigidez) satisfazendo as equações de equilíbrio e um determinado volume de material (BENDSOE; SIGMUND, 2003). Outro exemplo de objetivo é apresentado por BRUGGI; DUYSINX (2012), no qual é minimizada a quantidade de material da estrutura sujeita a condições de flexibilidade e esforços de tensão realizados. Além disso, alguns exemplos de outras características que podem ser utilizadas nas funções objetivo para problemas estruturais são: controle de vibrações e custo de fabricação (HAFTKA; GÜRDAL, 1992).

De acordo com BENDSOE; SIGMUND (2003), existem três categorias de otimização estrutural: de dimensionamento, de forma e topológica. Otimizações de dimensionamento e de forma envolvem, respectivamente, encontrar as dimensões e formatos dos contornos da estrutura, de modo que satisfaçam as restrições e otimizem a função objetivo.

A otimização topológica é uma categoria mais geral de otimização estrutural, que abrange mais aspectos que as duas categorias anteriores. O material pode ser posicionado em qualquer posição, desde que não tenha uma restrição imposta. Por ser mais abrangente, a otimização topológica permite encontrar o leiaute ideal para uma estrutura dentro de um domínio específico (BENDSOE; SIGMUND, 2003).

A figura 4 exemplifica o que ocorre nas otimizações de dimensionamento (figura 4(a)), de forma (figura 4(b)) e topológica (figura 4(c)). No lado esquerdo estão representados os domínios (posições que podem ter material) e no lado direito estão as estruturas otimizadas.

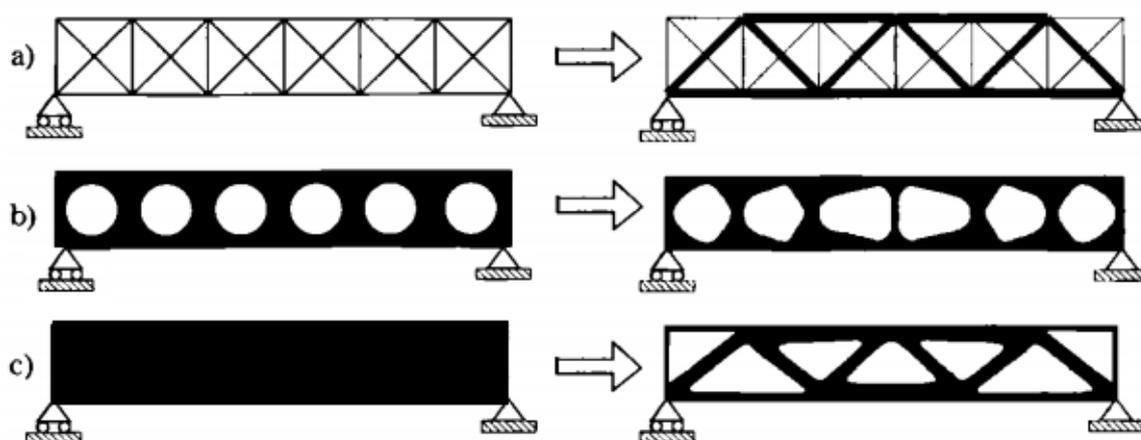


Figura 4: Categorias de otimização. Em (a) ocorre a otimização de dimensionamento, em (b) ocorre a otimização de forma e em (c) ocorre a otimização topológica (BENDSOE; SIGMUND, 2003).

3.2 Aspectos históricos

De acordo com KIRSCH (1993), acredita-se que Maxwell (no final do século XIX) e Michell (no início do século XX) escreveram os primeiros trabalhos envolvendo conceitos de otimização estrutural para encontrar cotas inferiores para o peso de estruturas treliçadas.

Apesar do desenvolvimento da teoria ter ocorrido no início do século XX, não foram feitos tantos avanços práticos nos anos seguintes. Apenas na década de 1960, com a criação do Método dos Elementos Finitos (MEF) e o surgimento de computadores digitais modernos, a otimização foi introduzida naturalmente nas práticas de engenharia (GUO; CHENG, 2010).

No final dos anos 1960, Prager (de forma analítica) e Venkaya (de forma numérica) apresentaram uma abordagem alternativa, chamado de Critério Ótimo. Durante os anos 1970 e 1980, ocorreram avanços na programação matemática e no Critério Ótimo, possibilitando soluções mais eficientes (KIRSCH, 1993).

Para os casos de volume de material total prescrito, BENDSOE (1999) apresentou um método baseado em uma função densidade, que determina a densidade de material de cada elemento finito da estrutura. Mais tarde, esse método ficou conhecido pela sigla inglesa *SIMP* (*Solid Isotropic Material with Penalization*).

Para o problema de minimização de flexibilidade de estruturas carregadas estaticamente, SIGMUND (2001) contribuiu com um código compacto de 99 linhas capaz de resolver um problema de otimização bem posto.

3.3 Problema da mínima flexibilidade

O problema da mínima flexibilidade consiste em encontrar, dentro das possibilidades permitidas, a topologia da estrutura que tenha a flexibilidade mínima. Essa estrutura precisa satisfazer as equações de equilíbrio, a restrição de volume de material, além de possuir material nos locais de aplicação dos carregamentos.

Considerando a forma bilinear da energia $a(u, v)$ e a forma linear dos carregamentos $l(u)$ dadas por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} c_{pq}(x) \varepsilon_p(u) \varepsilon_q(v) \mathbf{d}\Omega \quad (14)$$

e

$$l(u) = \int_{\Omega} f u \mathbf{d}\Omega + \int_{\Gamma_T} t u \mathbf{d}s, \quad (15)$$

BENDSOE; SIGMUND (2003) descrevem o problema de minimização da flexibilidade na forma contínua (outras restrições podem ser acrescentadas de acordo com a necessidade do projeto):

$$\begin{cases} \min_{u \in U} & l(u) \\ \text{s.a.} & a(u, v) = l(v), \text{ para todo } v \in U, \\ & V_{mat} = QV_{\Omega} \end{cases} \quad (16)$$

em que U é o espaço dos campos de deslocamentos admissíveis, V_{mat} , V_{Ω} e Q representam o volume da estrutura otimizada, o volume do domínio considerado, também chamado de domínio fixo estendido conforme BENDSOE; SIGMUND (2003) e a fração de volume desejada (em relação ao domínio fixo estendido).

3.4 Método das densidades

Para a obtenção da topologia ótima de uma estrutura, é necessário determinar quais pontos do espaço devem ser ocupados por cada tipo de material (BENDSOE; SIGMUND, 2003), e conseqüentemente quais pontos não devem possuir material nenhum.

O primeiro passo para encontrar a estrutura otimizada é restringir o domínio para a região no qual o material isotrópico pode ser colocado, chamada de domínio fixo estendido e denotada por Ω .

Em uma estrutura qualquer, denota-se o conjunto de pontos que possuem material por Ω_{mat} , que é um subconjunto de Ω . Com isso, define-se uma função densidade d_Ω para qualquer ponto $x \in \Omega$:

$$d_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega_{mat} \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega_{mat} \end{cases}, \quad (17)$$

ou seja, a função $d_\Omega(x)$ assume valor unitário para os pontos que possuem material e valor nulo para os pontos que não possuem.

Considerando c_{pq}^0 o tensor constitutivo do material isotrópico da estrutura, pode-se reescrever o tensor constitutivo para cada ponto:

$$c_{pq}(x) = d_\Omega(x)c_{pq}^0. \quad (18)$$

Quanto ao volume da estrutura, pode-se considerá-lo na forma de uma integral:

$$V_{mat} = \int_{\Omega} d_\Omega(x) d\Omega. \quad (19)$$

De acordo com BENDSOE; SIGMUND (2003), a abordagem mais utilizada para abordar esse problema envolve substituir a função densidade $d_\Omega(x)$, que é de natureza discreta, assumindo apenas valores unitário e nulo, por uma função densidade $\rho(x)$ que seja de natureza contínua, podendo assumir qualquer valor entre 0 e 1, e então introduzir um expoente de penalidade p na função $\rho(x)$, com o objetivo de aproximar as densidades intermediárias para os valores 0 ou 1, evitando as escalas de cinza que podem ocorrer na implementação computacional (que utiliza a cor preta para indicar onde tem material isotrópico, branca para onde não tem e escalas de cinza para densidades intermediárias).

Substituindo as funções de densidade (a discreta pela contínua) e aplicando a penalização (apenas na expressão do tensor constitutivo), tem-se o método *SIMP*, e as equações (18) e (19) são reescritas como

$$c_{pq}(x) = \rho(x)^p c_{pq}^0. \quad (20)$$

e

$$V_{mat} = \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega. \quad (21)$$

Para problemas da minimização de flexibilidade com restrição de volume, as práticas computacionais garantem que a otimização resulta em uma topologia "0-1" para algum p suficientemente grande, sendo que para problemas considerados em

Tabela 2: Relação entre o expoente p e a flexibilidade

expoente p	flexibilidade $l(u)$
1	107,3787
2	126,6040
3	127,2321
4	128,8668

duas dimensões, tem-se que

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1-\nu}, \frac{4}{1+\nu} \right\}, \quad (22)$$

em que ν é o *coeficiente de Poisson* do material isotrópico (BENDSOE; SIGMUND, 2003), que é determinado pela razão entre a deformação na direção transversal e a deformação na direção da tensão aplicada.

A tabela 2 e a figura 5 remetem a um domínio de projeto com 60×24 elementos, com distribuição de 50% de material isotrópico que possui coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$, extremidade do lado esquerdo engastada e do lado direito livre, além de uma carga unitária aplicada no canto inferior direito do domínio de projeto.

A tabela 2 mostra a relação entre a escolha do expoente de penalidade e a flexibilidade, mostrando que quanto menor for o expoente, menor será a flexibilidade (função objetivo que deve ser minimizada). Essa relação leva a crer que quanto menor o expoente, melhor é a solução, pois o objetivo é menor, mas a figura 5 mostra que $p = 1$ e $p = 2$ levam a resultados com muitos pontos de densidades intermediárias, e portanto não devem ser utilizados. Já para expoentes de penalidade iguais a 3 e 4, nota-se uma estrutura do tipo "0-1" com bordas bem definidas, evidenciando que p deve ser maior ou igual a 3 (para $\nu = 1/3$) conforme o critério determinado em (22).

Expoentes maiores ($p \geq 5$) trazem duas desvantagens:

- Fornecem estruturas com flexibilidade maior (menos rígidas) do que as soluções de expoente $p = 3$ e $p = 4$;
- Exigem um custo computacional maior por causa da potência maior, além de problemas de condicionamento de matrizes.

3.5 Critério Ótimo

Uma das maneiras de resolver um problema de otimização de uma função sujeita à uma restrição (ou restrições) é utilizando Multiplicadores de Lagrange. Conforme STEWART (2010), se em um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ ocorre uma solução de um problema do tipo

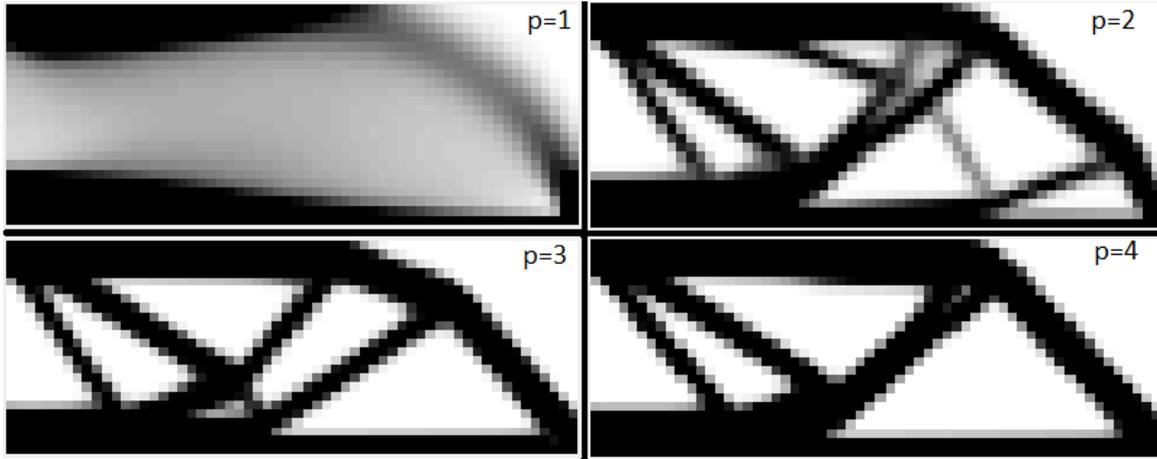


Figura 5: Estruturas obtidas para diferentes expoentes de penalidade p .

$$\begin{cases} \max / \min & f(x, y, z) \\ \text{s.a.} & g(x, y, z) = 0, \\ & h(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

então existem λ_1, λ_2 tais que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0, y_0, z_0), \quad (24)$$

em que ∇ é o operador gradiente e λ_1, λ_2 são números chamados de Multiplicadores de Lagrange.

Considerando (16) e (21), obtém-se o problema de otimização:

$$\begin{cases} \min_{u \in U} & l(u) \\ \text{s.a.} & a(u, v) = l(v), \text{ para todo } v \in U \\ & V_{mat} = \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega = QV_{\Omega} \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1 \end{cases} \quad (25)$$

Adaptando a equação (24) ao problema abordado na equação (25), tem-se

$$\nabla l(u) = \lambda_1 \nabla [a(u, v) - l(v)] + \lambda_2 \nabla \left[\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega - QV_{\Omega} \right]. \quad (26)$$

Um obstáculo para resolver esse problema é o fato de existirem infinitas variáveis para serem avaliadas, visto que a densidade em cada um dos infinitos pontos é uma variável. Para evitar essa situação, a estrutura é dividida em n partes (elementos), e a restrição de volume é considerada em notação de somatório:

$$\sum_{e=1}^n \rho_e V_e = QV_{\Omega}, \quad (27)$$

em que ρ_e é a densidade do e -ésimo elemento e V_e é o volume do e -ésimo elemento.

Da mesma forma, pode-se reescrever a forma bilinear da energia:

$$a(u, v) = \sum_{e=1}^n \rho_e^p V_e c_{pq}^0 \varepsilon_p(u) \varepsilon_q(v), \quad (28)$$

Pelo fato das variáveis do problema de otimização serem as densidades dos n elementos, tem-se que o operador gradiente é dado por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \rho_1}, \frac{\partial}{\partial \rho_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \rho_n} \right). \quad (29)$$

Para uma componente vetorial e arbitrária, considerando a equação (26), a restrição do volume na forma de somatório obtida em (27) e o operador gradiente dado em (29), tem-se que a equação (26) é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \rho_e} [l(u)] = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_e} [a(u, v) - l(v)] + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \rho_e} \left[\sum_{e=1}^n \rho_e V_e - QV_\Omega \right]. \quad (30)$$

Considerando a equação (15), tem-se que as derivadas parciais das formas lineares dos carregamentos são nulas (pois não dependem das densidades), e acrescentando a equação (28), obtém-se

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_e} \left[\sum_{e=1}^n \rho_e^p V_e c_{pq}^0 \varepsilon_p(u) \varepsilon_q(v) \right] + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \rho_e} \left[\sum_{e=1}^n \rho_e V_e - QV_\Omega \right] &= 0, \\ \lambda_1 V_e c_{pq}^0 \varepsilon_p(u) \varepsilon_q(v) \frac{\partial \rho_e^p}{\partial \rho_e} + \lambda_2 V_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \rho_e} &= 0, \\ \lambda_1 p \rho_e^{p-1} c_{pq}^0 \varepsilon_p(u) \varepsilon_q(v) + \lambda_2 &= 0, \\ p \rho_e^{p-1} c_{pq}^0 \varepsilon_p(u) \varepsilon_q(v) &= \Lambda, \end{aligned} \quad (31)$$

com $\Lambda = -\lambda_2/\lambda_1$.

As condições de otimalidade com respeito às variações do campo de deslocamentos u implicam em $u = v$ (BENDSOE; SIGMUND, 2003), e então, segue que:

$$\begin{aligned} p \rho_e^{p-1} c_{pq}^0 \varepsilon_p(u) \varepsilon_q(u) &= \Lambda, \\ \frac{p \rho_e^{p-1} c_{pq}^0 \varepsilon_p(u) \varepsilon_q(u)}{\Lambda} &= 1. \end{aligned} \quad (32)$$

3.5.1 Encontrando a solução: método iterativo

Para encontrar a distribuição das densidades ρ_e é utilizado um método iterativo, representado pelo esquema da figura 6, onde B_N é dado pelo lado esquerdo da equação (32), considerando a N -ésima iteração (densidade, deslocamentos e o multiplicador de Lagrange são atualizados em cada iteração), e ξ_a é um parâmetro de ajuste:

$$B_N = \left(\frac{p \rho_{e_N}^{p-1} c_{pq}^0 \varepsilon_p(u_N) \varepsilon_q(u_N)}{\Lambda_N} \right)^{\xi_a}. \quad (33)$$

De forma analítica, o esquema representado pela figura 6 é dado por:

$$\rho_{e_{N+1}} = \begin{cases} \max(\rho_{min}, (1 - \zeta)\rho_{e_N}) & \text{se } \rho_{e_N} \cdot B_N \leq \max(\rho_{min}, (1 - \zeta)\rho_{e_N}) \\ \min(1, (1 + \zeta)\rho_{e_N}) & \text{se } \rho_{e_N} \cdot B_N \geq \min(1, (1 + \zeta)\rho_{e_N}) \\ \rho_{e_N} \cdot B_N & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (34)$$

Além disso, é introduzido um limite móvel ζ , que evita grandes variações na densidade de um elemento (entre duas iterações consecutivas), e uma densidade mínima ρ_{min} , para evitar a singularidade da matriz de rigidez. De acordo com a teoria, os valores usuais para ρ_{min} , ξ_a e ζ são, respectivamente, 0,001, 0,5 e 0,2 (BENDSOE; SIGMUND, 2003).

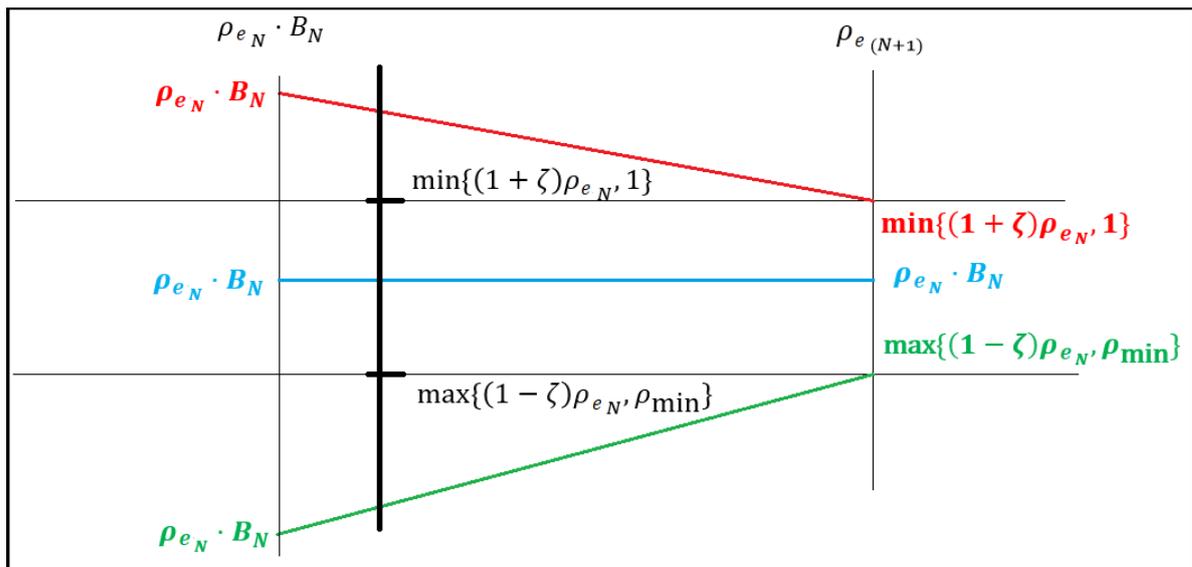


Figura 6: Esquema iterativo para as densidades dos elementos

Com a regra da atualização da densidade exibida na figura 6, obtém-se o seguinte algoritmo para resolver o problema:

1. Para iniciar o processo, é determinado que todos os elementos iniciem com uma densidade que satisfaça a restrição de volume. Usualmente, utiliza-se $\rho_e = Q$ (a configuração inicial é considerada a iteração 0 para o esquema da figura 6);
2. Calcula-se os deslocamentos;
3. Atualiza-se o multiplicador de Lagrange Λ_N . Para isso, é considerado um intervalo $[0, L2]$ com $L2$ suficientemente grande. Quando $\Lambda_N \rightarrow 0$, tem-se que

$B_N \rightarrow +\infty$ e conseqüentemente todas as densidades aumentam ou para $(1 + \zeta)\rho_{e_N}$ ou para 1 (o menor desses valores, mas que ainda é maior que ρ_{e_N}), e portanto, o volume total aumenta. Quando Λ_N assumir um valor suficientemente grande, tem-se que $B_N \rightarrow 0$ e conseqüentemente todas as densidades diminuem ou para $(1 - \zeta)\rho_{e_N}$ ou para ρ_{min} (o maior desses valores, mas que ainda é menor que ρ_{e_N}), e portanto, o volume total diminui. Com a utilização do método da bissecção (ou outro método como, por exemplo, o método de Newton-Raphson) é possível encontrar Λ_N , de modo que ao atualizar as densidades, o volume total é mantido (dentro de uma margem de tolerância). Quando isso ocorrer, tem-se o valor de Λ_N atualizado. Em seu algoritmo de 99 linhas, SIGMUND (2001) utiliza $L2 = 100000$;

4. Atualiza-se as densidades, de acordo com o esquema da figura 6;
5. Se a diferença entre as densidades da iteração anterior e da atual é menor que uma tolerância pré-determinada, em todos os elementos, então o processo iterativo acaba. Caso contrário, volta-se para o passo 2 (e temos uma nova iteração);
6. Ao acabar o processo iterativo, é gerada uma representação gráfica, similar as representações apresentadas na figura 5.

A figura 7 exhibe um fluxograma do método apresentado nessa subseção.

3.6 Instabilidades numéricas

Conforme SIGMUND; PETERSSON (1998), na otimização topológica existem três tipos de problemas de instabilidade numérica:

- Tabuleiros de damas;
- Dependência de malha;
- Mínimos locais.

3.6.1 Tabuleiros de damas

Esse tipo de problema ocorre quando a estrutura obtida apresenta uma região (ou regiões) em que se alternam elementos com material (graficamente representados pela cor preta) e elementos sem material (graficamente representados pela cor branca), formando uma região quadriculada similar a um tabuleiro de damas (alguns autores utilizam o termo “tabuleiro de xadrez”).

Na figura 8 tem-se um exemplo de uma mesma estrutura discretizada em 882, 3362 e 13122 elementos, onde é possível notar a presença dos tabuleiros de damas.

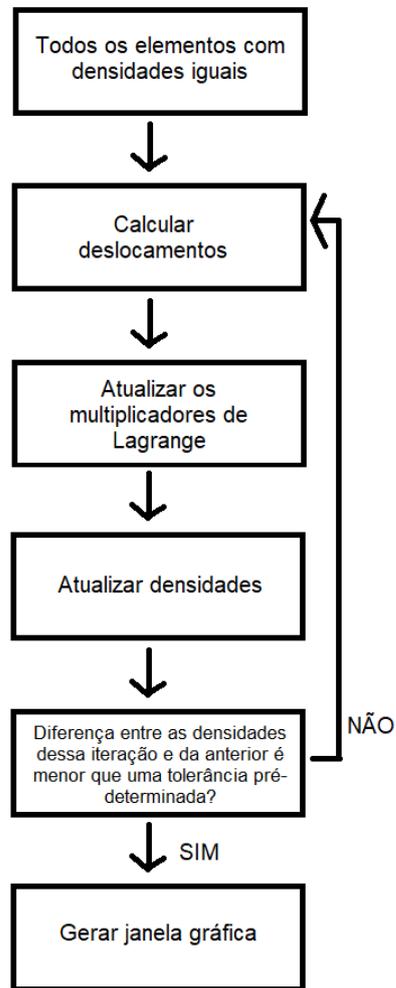


Figura 7: Fluxograma do método iterativo proposto na subseção 3.5.1



Figura 8: Exemplos de tabuleiros de damas (ARAUJO; LAGES; CAVALCANTE, 2020).

Conforme DIAZ; SIGMUND (1995), esse padrão decorre de instabilidades numéricas, e não por ser uma distribuição ótima de material. Além disso, pelo ponto de vista de fabricação, essas estruturas não são satisfatórias. Assim, é necessário utilizar algum artifício para que não ocorram essas regiões quadriculadas.

De acordo com DIAZ; SIGMUND (1995), o padrão quadriculado ocorre pois é um padrão artificialmente mais rígido, apresentando uma rigidez maior que outros padrões (como a disposição em camadas, por exemplo). Isso acontece, pois o padrão quadriculado acaba tendo uma rigidez muito próxima de um material homogêneo com densidade $\rho = 0,5$. Na figura 5 e na tabela 2, é possível notar que a estrutura que contém mais elementos de densidades intermediárias (a obtida com $p = 1$) possui uma flexibilidade menor (e conseqüentemente uma rigidez maior) que as estruturas que possuem uma topologia mais próxima da “0-1” (aquelas obtidas com $p > 1$).

Uma das maneiras de eliminar os tabuleiros de damas, segundo SIGMUND; PETERSSON (1998), é utilizando uma técnica chamada de *filtro de sensibilidades*. Essa técnica é apresentada na seção 3.7.

3.6.2 Dependência da malha

Para resolver um problema de otimização topológica, além de escolher um domínio, é necessário determinar a malha de elementos finitos a ser utilizada. Quando se considera uma malha mais refinada (dividida em mais elementos, que conseqüentemente possuem tamanhos menores), a tendência natural é que a estrutura fique mais eficiente devido ao aumento no número de possibilidades para as estruturas. Em contrapartida, um refinamento na malha torna o processo mais lento, visto que aumenta o número de elementos (e conseqüentemente o número de operações no processo).

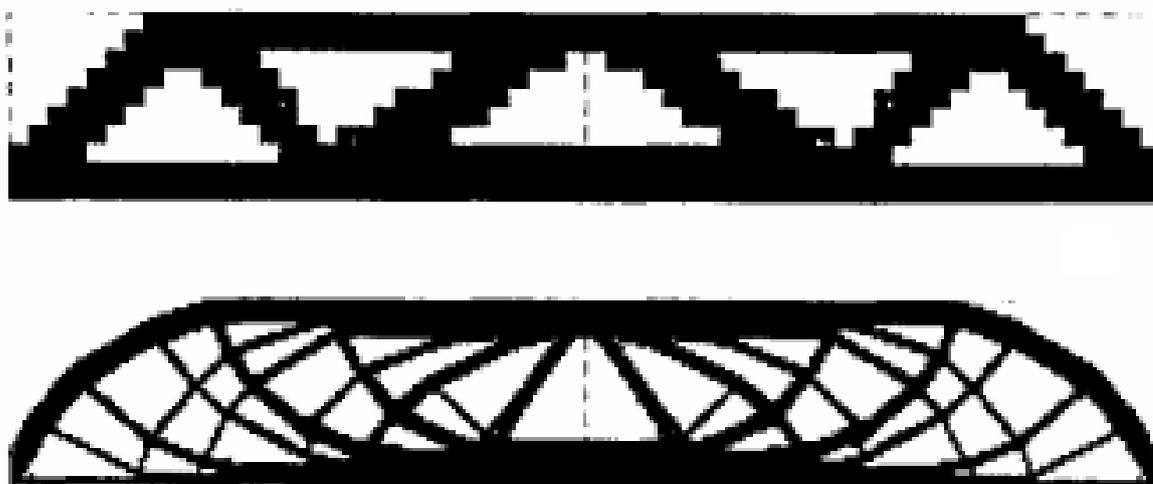


Figura 9: Dependência de malha (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

A figura 9 mostra duas topologias ótimas obtidas para o mesmo problema, mas

a primeira sendo obtida com uma malha discretizada em 600 elementos, enquanto a segunda sendo obtida com uma malha de 5400 elementos.

Conforme SIGMUND; PETERSSON (1998), um refinamento da malha deveria resultar em um melhor modelamento por elementos finitos e uma melhor descrição do contorno, e não em uma estrutura mais detalhada como na figura 9. Existem vários métodos para evitar esse problema. Um desses métodos é o filtro de sensibilidades (o mesmo que ajuda no problema de tabuleiro de damas).

3.6.3 Mínimos locais

Esse tipo de problema ocorre quando a solução converge para um mínimo local da função objetivo ao invés de convergir para o mínimo global da mesma. Conforme SIGMUND; PETERSSON (1998), pequenas alterações nos parâmetros podem levar à drásticas mudanças na topologia ótima encontrada, ou seja, duas escolhas aproximadas nos valores dos parâmetros podem fazer com que a solução convirja para dois mínimos locais diferentes (ou uma para um mínimo local e outra para o global). Alguns exemplos desses parâmetros são: número de elementos, limites móveis e parâmetros do filtro.

Para diminuir esse problema, BENDSOE; SIGMUND (2003) recomendam os métodos de continuação, que são métodos que mudam o problema da natureza não-convexa para convexa em um determinado número de passos. Alguns exemplos desses métodos de continuação envolvem alteração nos parâmetros em determinadas iterações, aumentando gradualmente (ou diminuindo) os valores dos parâmetros.

Para o SIMP, uma opção é considerar $p = 1$ (sem penalização) na primeira iteração, considerar $p = 1 + \Delta p$ na segunda iteração e aumentando linearmente até $p = p_{max}$. Apesar de não ser garantido que a solução encontrada será um ótimo global, aumentar o expoente de penalização gradativamente fornece, na maioria dos casos, uma solução melhor do que considerar $p = p_{max}$ desde a primeira iteração (ROZVANY, 2007).

Já para o filtro de sensibilidades, BENDSOE; SIGMUND (2003) recomendam começar com um raio de filtragem maior, e então diminuir o tamanho do raio de filtragem conforme aumenta o número de iterações.

3.7 Filtro de sensibilidades

Esse método foi introduzido por SIGMUND (1994) como uma alternativa para prevenir o surgimento de padrões como os tabuleiros de damas e ao mesmo tempo eliminar o problema de dependência da malha.

O filtro de sensibilidades consiste em modificar a sensibilidade (variação das restrições ou da função objetivo em relação as densidades) de um elemento consi-

derando uma média ponderada das sensibilidades dos elementos vizinhos.

Segundo BENDSOE; SIGMUND (2003), esse filtro exige pouco tempo computacional extra, é simples de ser implementado e não adiciona complexidade ao problema. As sensibilidades atualizadas pelo filtro são dadas pela equação

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[H_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \right]}{\rho_e \sum_{i=1}^n [H_i]}, \quad (35)$$

em que $H_i = r_{min} - \text{dist}(e, i)$, se a distância $\text{dist}(e, i)$ entre o centro do elemento i e o centro do elemento e é menor que o raio de filtragem r_{min} , e $H_i = 0$, caso contrário.

Na equação (35), o termo do lado esquerdo representa a sensibilidade atualizada, o fator H_i é um fator de peso (que implica que elementos mais próximos do elemento e possuem um fator maior e elementos fora do raio de filtragem possuem fator nulo), e a função f representa uma das restrições ou a função objetivo. O filtro é utilizado para atualizar as sensibilidades a cada nova iteração.

O filtro de sensibilidades é heurístico. Ele é bastante eficiente para resolver problemas com restrição de volume, mas não é eficiente para problemas com restrição de tensões. Nesse caso, é necessário utilizar um filtro de densidades ao invés do filtro de sensibilidades.

3.8 Método dos elementos finitos

O *Método dos Elementos Finitos* (MEF) é um método numérico utilizado para resolver problemas em várias áreas da modelagem matemática, como por exemplo, na mecânica dos sólidos, condução de calor e eletromagnetismo.

Conforme SORIANO (2009), a primeira abordagem foi realizada na década de 1950, decorrido da evolução da análise matricial de estruturas e o surgimento dos computadores. Com o passar dos anos, o MEF foi aprimorado, e conseqüentemente, aumentou a possibilidade de aplicações, nas quais, o método é eficiente.

O MEF é utilizado para realizar o segundo passo do esquema iterativo mostrado na seção 3.5.1, ou seja, calcular os deslocamentos em cada iteração.

O primeiro passo para a aplicação do MEF é discretizar o domínio. O domínio é dividido em vários pedaços, chamados de elementos finitos (o conjunto de todos os elementos forma a malha de elementos finitos). Geralmente, para casos bidimensionais são utilizados elementos triangulares ou quadrilaterais, enquanto que em problemas tridimensionais são utilizados elementos tetraédricos ou hexaédricos.

Para os problemas de otimização estrutural aqui abordados, cujo domínio é retangular, são utilizados elementos retangulares na maioria das vezes, visto que é a malha mais simples de ser implementada. Nesse caso, o domínio é dividido em m linhas e n

colunas, totalizando $m \cdot n$ elementos. Os vértices desses elementos retangulares são chamados de pontos nodais (ou nós), e são nesses pontos que os deslocamentos são calculados pelo MEF. Claramente, o domínio contém $(m + 1)(n + 1)$ pontos nodais.

A figura 10 mostra um exemplo de um domínio retangular dividido em 4 linhas e 7 colunas, totalizando 28 elementos e 40 pontos nodais (destacados em vermelho).

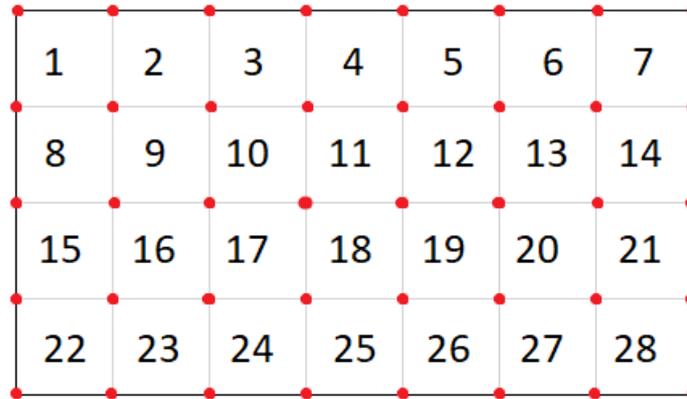


Figura 10: Exemplo de malha com 28 elementos e 40 pontos nodais.

Um procedimento importante do MEF é o de normalizar os elementos, através de uma mudança de coordenadas, com o uso de funções de interpolação. Ou seja, um elemento de dimensões $a \times b$, que possui os nós (os vértices do retângulo) nos pontos $(-a/2, -b/2)$, $(-a/2, b/2)$, $(a/2, -b/2)$, $(a/2, b/2)$ vai passar a possuir os nós nos pontos $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, após a mudança das coordenadas. Na figura 11 é representado um elemento retangular de dimensões $a \times b$ nas coordenadas originais, e o mesmo elemento após a transformação das coordenadas, que são representadas por ξ, η .

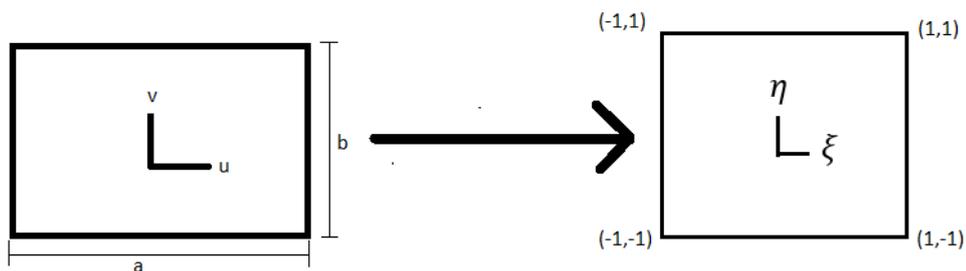


Figura 11: Elemento finito de dimensões $a \times b$ e a mudança de coordenadas.

3.8.1 Formulação dos deslocamentos

Em problemas bidimensionais, pode-se considerar que o deslocamento de um ponto é dado por um vetor de duas componentes, onde cada componente indica o deslocamento em uma das direções. Sendo assim, considera-se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & u \end{bmatrix}^T. \quad (36)$$

Em um ponto qualquer do elemento, através de funções de interpolação, o deslocamento em uma direção é dado por uma combinação linear entre os deslocamentos (na mesma direção) nos pontos nodais. Assim, o deslocamento (componente u) em um ponto x é dado por

$$u(x) = \sum_{e=1}^4 N_e u_e, \quad (37)$$

onde N_1, N_2, N_3, N_4 são funções de interpolação e u_1, u_2, u_3, u_4 são os deslocamentos nos pontos nodais (ocorre de maneira similar para a componente v do deslocamento).

Considerando o elemento finito da figura 12 em coordenadas ξ, η , fica claro que quando o ponto x for exatamente o ponto 1, tem-se que a função de interpolação N_1 assume valor unitário e as demais funções de interpolação assumem um valor nulo (o mesmo vale para os pontos 2, 3 e 4 e as funções de interpolação N_2, N_3 e N_4).

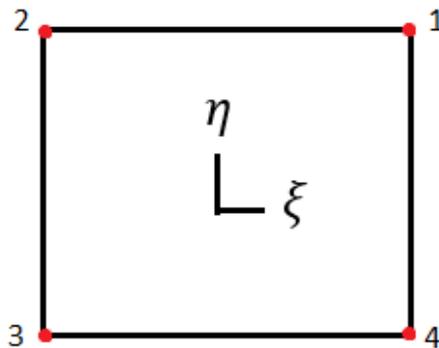


Figura 12: Elemento finito com nós numerados.

Segundo SORIANO (2009), uma das maneiras de obter essas funções de interpolação é através da multiplicação de funções lineares na coordenada ξ com funções lineares na coordenada η , de modo que a função assumira valor unitário em um ponto nodal e valor nulo nos demais.

Com essa ideia, a função interpoladora N_1 é dada por $N_1(\xi, \eta) = \Xi_1(\xi)\Pi_1(\eta)$. Como N_1 é nula nos pontos 2, 3 e 4, tem-se que $\Xi_1(-1) = 0$ e $\Pi_1(-1) = 0$, resultando em $\Xi_1 = (1 + \xi)$ e $\Pi_1 = (1 + \eta)$. Nesse caso, ocorreria que $N_1(1, 1) = (1 + 1)(1 + 1) = 4$, mas para corrigir isso e a função ter valor unitário, basta dividir a função N_1 por 4. De forma similar são obtidas as demais funções de interpolação, dadas por

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \\ N_2(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \\ N_3(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_4(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \end{cases} \quad (38)$$

Considerando o vetor dos deslocamentos em (36) e a utilização das funções de interpolação em (37), obtém-se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Existem relações entre os deslocamentos, as deformações e as tensões. Conforme SORIANO (2009), a relação entre deslocamentos e deformações é dada pela equação $\varepsilon = \mathbf{L}\mathbf{u}$, que na forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (40)$$

onde $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ são, respectivamente, as deformações ao longo do eixo x e do eixo y , e γ_{xy} é a deformação de cisalhamento.

Substituindo a equação (39) na equação (40), segue que

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Considerando a regra da cadeia para derivadas parciais, obtém-se

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (43)$$

As equações (42) e (43) podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix}, \quad (44)$$

e de acordo com a figura 11, tem-se que $x = (a/2)\xi$ e $y = (b/2)\eta$, e portanto,

$$\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/2 & 0 \\ 0 & b/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix}, \quad (45)$$

e conseqüentemente,

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{2}{a} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \quad (46)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{2}{b} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta}. \quad (47)$$

Substituindo as derivadas parciais encontradas em (46) e (47) na equação (41), tem-se que

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

em que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{(1+\eta)}{2a} & 0 & -\frac{(1+\eta)}{2a} & 0 & -\frac{(1-\eta)}{2a} & 0 & \frac{(1-\eta)}{2a} & 0 \\ 0 & \frac{(1+\xi)}{2b} & 0 & \frac{(1-\xi)}{2b} & 0 & -\frac{(1-\xi)}{2b} & 0 & -\frac{(1+\xi)}{2b} \\ \frac{(1+\xi)}{2b} & \frac{(1+\eta)}{2a} & \frac{(1-\xi)}{2b} & -\frac{(1+\eta)}{2a} & -\frac{(1-\xi)}{2b} & -\frac{(1-\eta)}{2a} & -\frac{(1+\xi)}{2b} & \frac{(1-\eta)}{2a} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Conforme SORIANO (2009), a relação entre as tensões e deformações é dada por $\sigma = \mathbf{E}\mathbf{L}u + \sigma_0$, onde σ é o vetor de tensões, \mathbf{E} é a matriz das propriedades elásticas e σ_0 é o vetor de tensões iniciais.

Um conceito muito importante para a mecânica dos sólidos é o *Princípio dos Deslocamentos Virtuais*. Esse princípio determina que com a suposição de um campo de deslocamentos virtuais (gerando um campo de deformações virtuais) em um sólido em equilíbrio estático, o trabalho virtual das forças externas é igual ao das forças internas (SORIANO, 2009). Considerando o campo de deslocamentos virtuais \mathbf{u}^* , tem-se que o trabalho das forças externas, W^* , é dado por

$$W^* = \int_V \mathbf{p}^T \mathbf{u}^* dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* dS, \quad (50)$$

em que a primeira integral representa o trabalho realizado pelo peso \mathbf{p} da estrutura em todo o volume e a segunda integral representa o trabalho realizado pelas cargas aplicadas \mathbf{t} no contorno da estrutura. Já o trabalho das forças internas (tensões) é dado por

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* dV, \quad (51)$$

e pelo Princípio dos Deslocamentos Virtuais, tem-se

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* dV - \int_V \mathbf{p}^T \mathbf{u}^* dV - \int_C \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* dC = 0. \quad (52)$$

As equações diferenciais, condições de contorno e condições iniciais são obtidas através da condição de estacionariedade do funcional apresentado em (52), ou seja, quando a variação desse mesmo funcional é nula. Considerando os deslocamentos virtuais como infinitesimais, é possível considerar os deslocamentos como reais e, $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}$ e $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$, ao aplicar o operador variacional, a equação (52) é dada por

$$\delta \left(\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{p}^T \mathbf{u} dV - \int_C \mathbf{t}^T \mathbf{u} dC \right) = 0. \quad (53)$$

Considerando $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{L}\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}_0$, a equação (53) é reescrita como

$$\begin{aligned} & \delta \left(\int_V (\mathbf{E}\mathbf{L}\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}_0)^T \mathbf{L}\mathbf{u} dV - \int_V \mathbf{p}^T \mathbf{u} dV - \int_C \mathbf{t}^T \mathbf{u} dC \right) = 0, \\ & \delta \left(\int_V ((\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{E}\mathbf{L}\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}_0^T \mathbf{L}\mathbf{u}) dV - \int_V \mathbf{p}^T \mathbf{u} dV - \int_C \mathbf{t}^T \mathbf{u} dC \right) = 0, \\ & \int_V ((\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \mathbf{E}\mathbf{L}\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}_0^T \mathbf{L}\delta\mathbf{u}) dV - \int_V \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u} dV - \int_C \mathbf{t}^T \delta\mathbf{u} dC = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Considerando as propriedades de transposição de matrizes e as relações $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_e$ e $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$ colocadas nas equações (39), (41) e (48), obtém-se

$$\int_V ((\mathbf{L}\mathbf{N}\delta\mathbf{u}_e)^T \mathbf{E}\mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{u}_e + \boldsymbol{\sigma}_0^T \mathbf{L}\mathbf{N}\delta\mathbf{u}_e) dV - \int_V \mathbf{p}^T \mathbf{N}\delta\mathbf{u}_e dV - \int_C \mathbf{t}^T \mathbf{N}\delta\mathbf{u}_e dC = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \int_V (\delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{LN})^T \mathbf{ELN} \mathbf{u}_e + \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{LN})^T \boldsymbol{\sigma}_0) dV - \int_V \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV - \int_C \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{t} dC = 0, \\
& \int_V \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{LN})^T \mathbf{ELN} \mathbf{u}_e dV + \int_V \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{LN})^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV - \int_V \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV - \int_C \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{t} dC = 0, \\
& \int_V \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{LN})^T \mathbf{ELN} \mathbf{u}_e dV = \int_V \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV + \int_C \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{t} dC - \int_V \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{LN})^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV, \\
& \int_V \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{EB} \mathbf{u}_e dV = \int_V \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV + \int_C \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{t} dC - \int_V \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV. \quad (55)
\end{aligned}$$

Como a equação (55) é válida para qualquer variação de deslocamento, para cada elemento tem-se que

$$\left(\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{EB} dV_e \right) \mathbf{u}_e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV_e + \int_{C_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dC_e - \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV_e. \quad (56)$$

A equação (55) pode ser simplificada como um conjunto de sistemas da forma $\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e$, onde

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{EB} dV_e \quad (57)$$

e

$$\mathbf{f}_e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV_e + \int_{C_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dC_e - \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV_e. \quad (58)$$

Como todos os elementos contidos nas integrais são conhecidos, a matriz de rigidez \mathbf{K}_e e o vetor de cargas \mathbf{f}_e do elemento e podem ser calculadas através de um método numérico (integração de Gauss). A matriz de rigidez e o vetor de cargas do elemento e possuem, respectivamente, dimensões 8×8 e 8×1 . A matriz de rigidez e o vetor de cargas do elemento e são acoplados em uma matriz de rigidez global \mathbf{K} e um vetor de cargas global \mathbf{f} , de acordo com a numeração dos nós do e -ésimo elemento. Considerando a numeração global g_1, g_2, g_3, g_4 para os nós do elemento e (de numeração local 1, 2, 3, 4), então ocorre a correspondência bi-unívoca apresentada na tabela 3.

Tabela 3: Conversão de índices locais para globais

índice local	índice global
1	$2g_1 - 1$
2	$2g_1$
3	$2g_2 - 1$
4	$2g_2$
5	$2g_3 - 1$
6	$2g_3$
7	$2g_4 - 1$
8	$2g_4$

Dessa forma, em um elemento com nós, cuja numeração global é 15, 14, 22 e 23 (de acordo com a numeração local vista na figura 12), o índice 1 da matriz de rigidez e do vetor de cargas do elemento corresponderá ao índice $2 \cdot 15 - 1 = 29$ da matriz e do vetor global, assim como o índice local 2 corresponderá ao índice global $2 \cdot 15 = 30$, o índice local 3 corresponderá ao índice global $2 \cdot 14 - 1 = 27$, até o índice local 8 que corresponderá ao índice global $2 \cdot 23 = 46$. A figura 13 fornece uma representação de como é feita a numeração global dos graus de liberdade a partir da numeração dos nós.

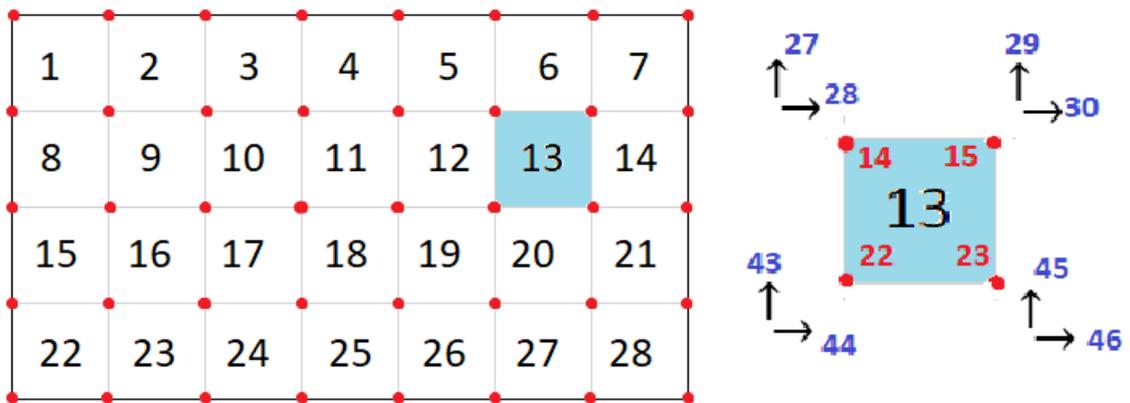


Figura 13: Numeração global dos graus de liberdade de um elemento.

Ao acoplar as matrizes de rigidez e vetores de cargas de todos os elementos na matriz de rigidez e vetor de cargas global, tem-se um sistema $\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$ com a quantidade de equações sendo o dobro do número de nós (visto que cada nó possui duas componentes de deslocamento). O vetor \mathbf{d} obtido através da resolução desse sistema é o vetor de deslocamentos obtido no segundo passo do esquema iterativo mostrado na Seção 3.5.1.

4 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA ENCONTRAR A POSIÇÃO ÓTIMA DE ATUADORES PIEZELÉTRICOS

Nesse capítulo, o Método de Otimização Topológica visto no Capítulo 3 é utilizado para definir a melhor posição para a colocação de um atuador piezolétrico. Para isso, também é utilizada a teoria da piezeletricidade vista no Capítulo 2. Com a utilização do material piezolétrico, as principais diferenças são que agora são utilizadas duas variáveis de projeto para cada elemento da malha (uma para a densidade do material não-piezolétrico e outra para a densidade do material piezolétrico) e que o problema de otimização vai ter mais restrições.

O material piezolétrico é considerado como contínuo (assim como o material não piezolétrico), e após a utilização do programa de otimização topológica, ao invés de gerar uma topologia 0-1 (preto e branco), vai gerar uma topologia com uma terceira cor (vermelho) que indica a localização do material piezolétrico. O local com uma incidência maior de pontos vermelhos na janela gráfica indica a melhor localização para o atuador piezolétrico.

4.1 Introdução

Com os avanços tecnológicos nas diversas áreas da engenharia, cada vez mais são utilizados materiais piezolétricos para obtenção de estruturas otimizadas. Conforme UCHINO (2003), algumas aplicações dos atuadores piezolétricos são motores ultrassônicos e amortecedores mecânicos.

Para a colocação de atuadores, conforme citado por UCHINO (2003), algumas aplicações, como por exemplo lasers e câmeras, podem exigir a precisão de um décimo de micrômetro.

Uma colocação de um atuador piezolétrico em um local mais adequado melhora algumas propriedades desejadas, dadas pela função objetivo. Alguns exemplos dessas propriedades são a flexibilidade estrutural e as vibrações.

4.2 Problema de otimização da mínima flexibilidade

De maneira similar ao método de otimização com apenas material isotrópico, o problema da mínima flexibilidade consiste em encontrar a topologia com menor flexibilidade, satisfazendo as equações de equilíbrio. Mas agora, além da restrição de volume do material não-piezelétrico, também ocorre uma restrição de volume para o material piezelétrico. Para os locais em que forem aplicados os carregamentos, é necessário que a estrutura possua material.

Além dos deslocamentos u e v devido às forças mecânicas, a forma bilinear de energia também dependerá dos potenciais elétricos ϕ_u e ϕ_v gerados pelo material piezelétrico e das densidades dos materiais não-piezelétrico (ρ_u) e piezelétrico (ρ_ϕ). Assim, a forma bilinear de energia é dada por

$$a(u, v, \phi_u, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi) = \int_{\Omega} (W_u + W_\phi) \, d\Omega = \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij} T_{ij} - E_i D_i) \, d\Omega, \quad (59)$$

onde W_u e W_ϕ são, respectivamente, os trabalhos realizados pela tensão e pelo campo elétrico. De acordo com as equações constitutivas da teoria da piezeletricidade vistas em (3) e (4), obtém-se

$$a(u, v, \phi_u, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} (c_{pq} \varepsilon_q - e_{kp} E_k) - E_i (e_{iq} \varepsilon_q + \epsilon_{ik} E_k) \, d\Omega. \quad (60)$$

Quanto à forma linear dos carregamentos $l(u, \phi)$, além dos termos referentes às forças de corpo e cargas aplicadas vistos na equação (15), também é acrescentado um termo referente ao trabalho realizado pelas cargas elétricas, resultando na equação

$$l(u, \phi) = \int_{\Omega} f_u u \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} t u \, ds - \int_{\Gamma_\phi} f_\phi \phi \, ds, \quad (61)$$

onde f_ϕ é dado pelas cargas elétricas e ϕ é dado pelos potenciais elétricos.

De forma similar ao problema de otimização visto no capítulo 3, obtém-se o problema de otimização de estruturas com a utilização de um material isotrópico e um material piezelétrico simultaneamente:

$$\begin{cases} \min_{u \in U, \phi_u \in \Phi} & l(u, \phi_u) \\ \text{s.a.} & a(u, v, \phi_u, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi) = l(v, \phi_v), \text{ para todo } v \in U, \phi_v \in \Phi, \\ & V_{mat} = QV_\Omega \quad ; \quad V_\phi = MV_\Omega \end{cases}, \quad (62)$$

em que Φ é o espaço dos potenciais elétricos admissíveis, V_ϕ é o volume do material piezelétrico e M é a fração de volume desejada do material piezelétrico em relação ao domínio fixo estendido.

4.3 Método das densidades

Para obter a solução do problema de otimização visto em (62), é necessário determinar quais pontos do espaço devem ser ocupados por material isotrópico e quais que devem ser ocupados por material piezolétrico, levando em consideração as frações de cada material em relação ao total do volume do domínio fixo estendido. Cada ponto do domínio possui uma densidade de material ρ (que leva em conta o material total do ponto) e uma densidade ρ_ϕ (que determina o percentual de material piezolétrico em relação ao total de material). Consequentemente, tem-se que $(1 - \rho_\phi)$ é a densidade do material isotrópico em relação ao total de material.

As constantes utilizadas (elásticas, piezolétricas e dielétricas) são baseadas nas densidades dos materiais em cada ponto de forma linear, conforme BENDSOE; SIGMUND (2003). Para as constantes elásticas, tem-se que

$$c_{pq}(x) = \rho(x) [\rho_\phi(x)c_\phi + (1 - \rho_\phi(x))c_u], \quad (63)$$

onde $\rho(x)$ remete a densidade total de material, o que compreende a soma $(\rho_u + \rho_\phi)$, enquanto que ρ_ϕ e $(1 - \rho_\phi)$ remetem aos percentuais (densidades) correspondentes de material piezolétrico e isotrópico e c_ϕ, c_u são os tensores constitutivos do material piezolétrico e do material não-piezolétrico. Exemplificando, para um elemento h que possui metade de material (e a outra metade sem material), sendo essa metade com mesma quantidade de material isotrópico e de material piezolétrico, utiliza-se $\rho(x) = 0,5$ (densidade total) e $\rho_\phi(x) = 0,5$ (percentual de material piezolétrico em relação ao total), e então, o tensor de elasticidade é dado por

$$c_{pq}(h) = 0,5 [0,5c_\phi + 0,5c_u] = 0,25c_\phi + 0,25c_u. \quad (64)$$

O mesmo conceito vale para as propriedades piezolétricas e dielétricas do material, mas como essas propriedades só ocorrem no material piezolétrico, os tensores dessas propriedades são dados por

$$e_{pk}(x) = \rho(x)\rho_\phi(x)e_{pk}^0 \quad (65)$$

e

$$\epsilon_p(x) = \rho(x)\rho_\phi(x)\epsilon_p^0. \quad (66)$$

Assim como ocorre no método de otimização topológica com utilização apenas de material isotrópico, também é possível utilizar um expoente de penalização para as densidades no problema de otimização abordado em (62). Utilizando um expoente de penalização p para a densidade total ρ e um expoente q para a densidade do material piezolétrico, as equações (63)-(66) são reescritas como:

$$c_{pq}(x) = \rho(x)^p [\rho_\phi(x)^q c_\phi + (1 - \rho_\phi(x)^q) c_u], \quad (67)$$

$$e_{pk}(x) = \rho(x)^p \rho_\phi(x)^q e_{pk}^0 \quad (68)$$

e

$$\epsilon_p(x) = \rho(x)^p \rho_\phi(x)^q \epsilon_p^0. \quad (69)$$

No caso em que $\rho_\phi = 0$, ou seja, sem material piezolétrico, a equação (67) resulta na equação $c_{ijkl} = \rho(x)^p c_u$, que é equivalente a equação do tensor de elasticidade para o problema do Capítulo 3.

4.4 Critério Ótimo

Para resolver o problema de otimização colocado em (62) é utilizada a metodologia dos multiplicadores de Lagrange de maneira similar ao que foi feito na seção 3.5. Nesse caso, é acrescentada uma outra restrição (e conseqüentemente um outro multiplicador de Lagrange) referente ao volume de material piezolétrico. Assim, considerando o domínio dividido em n elementos finitos, o operador gradiente é dado por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \rho_1}, \frac{\partial}{\partial \rho_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \rho_n}, \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi 1}}, \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi 2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi n}} \right), \quad (70)$$

em que as n primeiras derivadas parciais são em relação as densidades totais e as n derivadas parciais seguintes são em relação as densidades de material piezolétrico.

Utilizando os multiplicadores de Lagrange do problema de otimização descrito em (62), tem-se que

$$\begin{aligned} \nabla l(u, \phi) = & \lambda_1 \nabla [a(u, v, \phi_u, \phi_v, \rho_u, \rho_v) - l(v, \phi_v)] + \lambda_2 \nabla \left[\int_{\Omega} \rho_u(x) \mathbf{d}\Omega - QV_{\Omega} \right] \\ & + \lambda_3 \nabla \left[\int_{\Omega} \rho_\phi(x) \mathbf{d}\Omega - MV_{\Omega} \right], \end{aligned} \quad (71)$$

em que no lado esquerdo está o gradiente da função a ser otimizada e no lado direito da equação estão os produtos dos multiplicadores de Lagrange pelos gradientes das restrições que aparecem no problema (62).

Considerando a derivada parcial em relação a uma densidade total arbitrária ρ_e , pela equação (71), tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial \rho_e} l(u, \phi) = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_e} [a(u, v, \phi_u, \phi_v, \rho_u, \rho_v) - l(v, \phi_v)] + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \rho_e} \left[\int_{\Omega} \rho_u(x) \mathbf{d}\Omega - QV_{\Omega} \right]$$

$$+\lambda_3 \frac{\partial}{\partial \rho_e} \left[\int_{\Omega} \rho_{\phi}(x) \mathbf{d}\Omega - MV_{\Omega} \right], \quad (72)$$

assim como, considerando a derivada parcial em relação a uma densidade de material piezelétrico arbitrária $\rho_{\phi e}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi e}} l(u, \phi) &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi e}} [a(u, v, \phi_u, \phi_v, \rho_u, \rho_v) - l(v, \phi_v)] + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi e}} \left[\int_{\Omega} \rho_u(x) \mathbf{d}\Omega - QV_{\Omega} \right] \\ &+ \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi e}} \left[\int_{\Omega} \rho_{\phi}(x) \mathbf{d}\Omega - MV_{\Omega} \right]. \end{aligned} \quad (73)$$

Os termos $l(u, \phi)$ e $l(v, \phi_v)$ nas equações (72) e (73) podem ser desconsiderados, visto que não dependem das densidades e conseqüentemente as derivadas parciais serão nulas. Os termos $a(u, v, \phi_u, \phi_v, \rho_u, \rho_v)$, $\int_{\Omega} \rho_u(x) \mathbf{d}\Omega$ e $\int_{\Omega} \rho_{\phi}(x) \mathbf{d}\Omega$ podem ser representados como somatórios, de maneira similar ao que foi feito na seção 3.5. Dessa forma, tem-se que

$$\begin{aligned} a(u, v, \phi_u, \phi_v, \rho_u, \rho_{\phi}) &= \int_{\Omega} \varepsilon_p (c_{pq} \varepsilon_q - e_{kp} E_k) - E_i (e_{iq} \varepsilon_q + \epsilon_{ik} E_k) \mathbf{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon_p (\rho(x)^p [\rho_{\phi}(x)^q c_{\phi} + (1 - \rho_{\phi}(x)^q) c_u] \varepsilon_q - \rho(x)^p \rho_{\phi}(x)^q e_{kp}^0 E_k) \mathbf{d}\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} E_i (\rho(x)^p \rho_{\phi}(x)^q e_{iq}^0 \varepsilon_q + \rho(x)^p \rho_{\phi}(x)^q \epsilon_{ik}^0 E_k) \mathbf{d}\Omega \\ &= \sum_{e=1}^n V_e \left[\varepsilon_p (\rho_e(x)^p [\rho_{\phi e}(x)^q c_{\phi} + (1 - \rho_{\phi e}(x)^q) c_u] \varepsilon_q - \rho_e(x)^p \rho_{\phi e}(x)^q e_{kp}^0 E_k) \right] \\ &\quad - \sum_{e=1}^n V_e \left[E_i (\rho_e(x)^p \rho_{\phi e}(x)^q e_{iq}^0 \varepsilon_q + \rho_e(x)^p \rho_{\phi e}(x)^q \epsilon_{ik}^0 E_k) \right], \end{aligned} \quad (74)$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \mathbf{d}\Omega = \sum_{e=1}^n V_e \rho_e \quad (75)$$

e

$$\int_{\Omega} \rho_{\phi}(x) \mathbf{d}\Omega = \sum_{e=1}^n V_e \rho_{\phi e}. \quad (76)$$

Então, as equações (72) e (73) são simplificadas como

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_e} \sum_{e=1}^n V_e \left[\varepsilon_p (\rho_e(x)^p [\rho_{\phi e}(x)^q c_{\phi} + (1 - \rho_{\phi e}(x)^q) c_u] \varepsilon_q - \rho_e(x)^p \rho_{\phi e}(x)^q e_{kp}^0 E_k) \right] \\ - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_e} \sum_{e=1}^n V_e \left[E_i (\rho_e(x)^p \rho_{\phi e}(x)^q e_{iq}^0 \varepsilon_q + \rho_e(x)^p \rho_{\phi e}(x)^q \epsilon_{ik}^0 E_k) \right] \\ + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \rho_e} \sum_{e=1}^n V_e \rho_e + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \rho_e} \sum_{e=1}^n V_e \rho_{\phi e} = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

e

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} \sum_{e=1}^n V_e \left[\varepsilon_p (\rho_e(x))^p [\rho_{\phi_e}(x)^q c_\phi + (1 - \rho_{\phi_e}(x)^q) c_u] \varepsilon_q - \rho_e(x)^p \rho_{\phi_e}(x)^q e_{kp}^0 E_k \right] \\
& - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} \sum_{e=1}^n V_e \left[E_i (\rho_e(x))^p \rho_{\phi_e}(x)^q e_{iq}^0 \varepsilon_q + \rho_e(x)^p \rho_{\phi_e}(x)^q \epsilon_{ik}^0 E_k \right] \\
& + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} \sum_{e=1}^n V_e \rho_e + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} \sum_{e=1}^n V_e \rho_{\phi_e} = 0.
\end{aligned} \tag{78}$$

Da equação (77), segue que

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_e} V_e \left[\varepsilon_p (\rho_e(x))^p [\rho_{\phi_e}(x)^q c_\phi + (1 - \rho_{\phi_e}(x)^q) c_u] \varepsilon_q - \rho_e(x)^p \rho_{\phi_e}(x)^q e_{kp}^0 E_k \right] \\
& - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_e} V_e \left[E_i (\rho_e(x))^p \rho_{\phi_e}(x)^q e_{iq}^0 \varepsilon_q + \rho_e(x)^p \rho_{\phi_e}(x)^q \epsilon_{ik}^0 E_k \right] + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \rho_e} V_e \rho_e = 0, \\
& \lambda_1 V_e \left[\varepsilon_p (p \rho_e(x)^{p-1} [\rho_{\phi_e}(x)^q c_\phi + (1 - \rho_{\phi_e}(x)^q) c_u] \varepsilon_q - p \rho_e(x)^{p-1} \rho_{\phi_e}(x)^q e_{kp}^0 E_k) \right] \\
& - \lambda_1 V_e \left[E_i (p \rho_e(x)^{p-1} \rho_{\phi_e}(x)^q e_{iq}^0 \varepsilon_q + p \rho_e(x)^{p-1} \rho_{\phi_e}(x)^q \epsilon_{ik}^0 E_k) \right] + \lambda_2 V_e = 0, \\
& \varepsilon_p p \rho_e(x)^{p-1} [\rho_{\phi_e}(x)^q c_\phi + (1 - \rho_{\phi_e}(x)^q) c_u] \varepsilon_q - \varepsilon_p p \rho_e(x)^{p-1} \rho_{\phi_e}(x)^q e_{kp}^0 E_k \\
& - E_i p \rho_e(x)^{p-1} \rho_{\phi_e}(x)^q e_{iq}^0 \varepsilon_q - E_i p \rho_e(x)^{p-1} \rho_{\phi_e}(x)^q \epsilon_{ik}^0 E_k = \Lambda_u,
\end{aligned} \tag{79}$$

onde $\Lambda_u = -\lambda_2/\lambda_1$.

De forma similar, utilizando a equação (78),

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} V_e \left[\varepsilon_p (\rho_e(x))^p [\rho_{\phi_e}(x)^q c_\phi + (1 - \rho_{\phi_e}(x)^q) c_u] \varepsilon_q - \rho_e(x)^p \rho_{\phi_e}(x)^q e_{kp}^0 E_k \right] \\
& - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} V_e \left[E_i (\rho_e(x))^p \rho_{\phi_e}(x)^q e_{iq}^0 \varepsilon_q + \rho_e(x)^p \rho_{\phi_e}(x)^q \epsilon_{ik}^0 E_k \right] + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} V_e \rho_{\phi_e} = 0, \\
& \lambda_1 V_e \left[\varepsilon_p (\rho_e(x))^p [q \rho_{\phi_e}(x)^{q-1} c_\phi - q \rho_{\phi_e}(x)^{q-1} c_u] \varepsilon_q - \rho_e(x)^p q \rho_{\phi_e}(x)^{q-1} e_{kp}^0 E_k \right] \\
& - \lambda_1 V_e \left[E_i (\rho_e(x))^p q \rho_{\phi_e}(x)^{q-1} e_{iq}^0 \varepsilon_q + \rho_e(x)^p q \rho_{\phi_e}(x)^{q-1} \epsilon_{ik}^0 E_k \right] + \lambda_3 V_e = 0, \\
& \varepsilon_p \rho_e(x)^p q \rho_{\phi_e}(x)^{q-1} [c_\phi - c_u] \varepsilon_q - \varepsilon_p \rho_e(x)^p q \rho_{\phi_e}(x)^{q-1} e_{kp}^0 E_k \\
& - E_i \rho_e(x)^p q \rho_{\phi_e}(x)^{q-1} e_{iq}^0 \varepsilon_q - E_i \rho_e(x)^p q \rho_{\phi_e}(x)^{q-1} \epsilon_{ik}^0 E_k = \Lambda_\phi,
\end{aligned} \tag{80}$$

onde $\Lambda_\phi = -\lambda_3/\lambda_1$.

4.4.1 Encontrando a solução: método iterativo

De forma análoga ao procedimento realizado na seção 3.5.1, utilizando as equações (79) e (80), obtém-se

$$B_{uN} = \left(\frac{\Upsilon_{uN}}{\Lambda_{uN}} \right)^\xi, \quad (81)$$

$$B_{\phi N} = \left(\frac{\Upsilon_{\phi N}}{\Lambda_{\phi N}} \right)^\xi, \quad (82)$$

em que $B_{uN}, B_{\phi N}$ são utilizados para a atualização das densidades em cada iteração, conforme o esquema proposto na figura 6, $\Upsilon_{uN}, \Upsilon_{\phi N}$ representam o lado esquerdo das equações (79) e (80) na N -ésima iteração, enquanto $\Lambda_{uN}, \Lambda_{\phi N}$ são os multiplicadores de Lagrange que são atualizados na N -ésima iteração.

O processo iterativo consiste do seguinte passo-a-passo:

1. Para a primeira iteração, são consideradas densidades iguais (dos dois materiais) para todos os elementos (densidades equivalentes as frações de volume correspondentes);
2. Calcula-se os deslocamentos e os potenciais elétricos (utilizando o MEF);
3. Atualiza-se os dois multiplicadores de Lagrange, utilizando o método da bissecção (ou outro método numérico similar);
4. Atualiza-se as densidades ρ e ρ_ϕ de cada elemento, de acordo com o esquema da figura 6;
5. O processo é repetido até que a diferença entre as densidades (tanto ρ quanto ρ_ϕ) da iteração anterior e da atual seja menor que uma tolerância pré-determinada, em todos os elementos;
6. Geração de uma representação gráfica com 3 cores. Nesse trabalho foi utilizada a cor preta para representar o material isotrópico, a cor vermelha para representar o material piezelétrico e a cor branca para representar a ausência de material.

4.5 Método dos elementos finitos

O MEF é utilizado para realizar o cálculo dos deslocamentos e potenciais elétricos citados no passo-a-passo da seção 4.4.1. Após a escolha da malha a ser utilizada, são escolhidas as funções de interpolação (as mesmas funções de interpolação citadas em (38) podem ser utilizadas).

Para a parte referente aos deslocamentos, são utilizadas as equações (36)-(49), desenvolvidas na seção 3.8.1. Para a parte referente aos potenciais elétricos, é feito um processo similar, considerando

$$\phi = \sum_{e=1}^4 N_e \phi_e, \quad (83)$$

em que N_1, N_2, N_3, N_4 são as mesmas funções de interpolação utilizadas nos deslocamentos e $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ são os potenciais elétricos nos pontos nodais.

Utilizando a forma matricial, a equação (83) é dada por

$$\phi = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Considerando a equação do campo elétrico, dada em (6), obtém-se

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}. \quad (85)$$

De acordo com NADAL; PIGACHE (2009), a escolha mais apropriada para resolver o problema é utilizar o Princípio de Hamilton, que é determinado pela condição de estacionariedade do Hamiltoniano,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L} + W) dt = 0, \quad (86)$$

em que \mathcal{L} é o Lagrangeano do sistema e W é o trabalho realizado pelas forças externas. Pela equação (59), tem-se a energia (variação do trabalho) e pela equação (61), tem-se o Lagrangeano do sistema, e portanto, a equação resulta em

$$\delta \left(\int_{\Omega} (\varepsilon_{ij} T_{ij} - E_i D_i + f_u u) d\Omega + \int_{\Gamma_T} t u ds - \int_{\Gamma_{\phi}} f_{\phi} \phi ds \right) = 0. \quad (87)$$

Para o problema com apenas material isotrópico, conforme visto anteriormente, considera-se $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_e$ e $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$, e conseqüentemente, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{u}_e = \mathbf{B}\mathbf{u}_e$. Para o problema com ambos os materiais, as matrizes de funções de interpolação e operadores diferenciais são diferentes, então são colocados índices u e ϕ para diferenciar matrizes referentes ao material isotrópico e ao material piezoeletrico. Para o material isotrópico, tem-se as mesmas equações já colocadas no problema com apenas material isotrópico (com o índice u nas matrizes \mathbf{L} , \mathbf{N} e \mathbf{B}). Para o material piezoeletrico, tem-se a equação $\mathbf{E} = -\mathbf{B}_{\phi}\phi_e$, dada em (85), onde $\mathbf{B}_{\phi} = \mathbf{L}_{\phi}\mathbf{N}_{\phi}$. Considerando essas relações, além das relações constitutivas vistas em (3) e (4), tem-se que

$$\begin{aligned} \delta \left(\int_{\Omega} \mathbf{L}_u \mathbf{u} \left(c(\mathbf{L}_u \mathbf{u})^T + e^T (\mathbf{L}_{\phi} \phi)^T \right) + \mathbf{L}_{\phi} \phi \left(e(\mathbf{L}_u \mathbf{u})^T - \epsilon (\mathbf{L}_{\phi} \phi)^T \right) + f_u u d\Omega \right) \\ + \delta \int_{\Gamma_T} t u ds - \delta \int_{\Gamma_{\phi}} f_{\phi} \phi ds = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

Considerando as funções de interpolação, tem-se $\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e$ e $\phi = \mathbf{N}_\phi \phi_e$, a equação (88) é reescrita como:

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\Omega} \left(\mathbf{L}_u \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e \left(c(\mathbf{L}_u \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e)^T + e^T (\mathbf{L}_\phi \mathbf{N}_\phi \phi_e)^T \right) + \mathbf{L}_\phi \mathbf{N}_\phi \phi_e \left(e(\mathbf{L}_u \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e)^T - \epsilon(\mathbf{L}_\phi \mathbf{N}_\phi \phi_e)^T \right) \right) d\Omega \\ & + \delta \int_{\Omega} f_u \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e d\Omega + \delta \int_{\Gamma_T} t \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e ds - \delta \int_{\Gamma_\phi} f_\phi \mathbf{N}_\phi \phi_e ds = 0, \\ & \delta \int_{\Omega} \left(\mathbf{B}_u \mathbf{u}_e \left(c(\mathbf{B}_u \mathbf{u}_e)^T + e^T (\mathbf{B}_\phi \phi_e)^T \right) + \mathbf{B}_\phi \phi_e \left(e(\mathbf{B}_u \mathbf{u}_e)^T - \epsilon(\mathbf{B}_\phi \phi_e)^T \right) \right) d\Omega \\ & + \delta \int_{\Omega} f_u \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e d\Omega + \delta \int_{\Gamma_T} t \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e ds - \delta \int_{\Gamma_\phi} f_\phi \mathbf{N}_\phi \phi_e ds = 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Aplicando as variações, obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\mathbf{B}_u \delta \mathbf{u}_e \left(c(\mathbf{B}_u \mathbf{u}_e)^T + e^T (\mathbf{B}_\phi \phi_e)^T \right) + \mathbf{B}_\phi \delta \phi_e \left(e(\mathbf{B}_u \mathbf{u}_e)^T - \epsilon(\mathbf{B}_\phi \phi_e)^T \right) \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} f_u \mathbf{N}_u \delta \mathbf{u}_e d\Omega + \int_{\Gamma_T} t \mathbf{N}_u \delta \mathbf{u}_e ds - \int_{\Gamma_\phi} f_\phi \mathbf{N}_\phi \delta \phi_e ds = 0, \\ & \delta \mathbf{u}_e^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_u c \mathbf{B}_u^T d\Omega \mathbf{u}_e + \delta \mathbf{u}_e^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_u e^T \mathbf{B}_\phi^T d\Omega \phi_e + \delta \phi_e^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi e \mathbf{B}_u^T d\Omega \mathbf{u}_e - \delta \phi_e^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi \epsilon \mathbf{B}_\phi^T d\Omega \phi_e \\ & + \delta \mathbf{u}_e^T \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T f_u d\Omega + \delta \mathbf{u}_e^T \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}_u^T t ds - \delta \phi_e^T \int_{\Gamma_\phi} \mathbf{N}_\phi^T f_\phi ds = 0, \\ & \delta \mathbf{u}_e^T \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}_u c \mathbf{B}_u^T d\Omega \mathbf{u}_e + \int_{\Omega} \mathbf{B}_u e^T \mathbf{B}_\phi^T d\Omega \phi_e + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T f_u d\Omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}_u^T t ds \right] \\ & + \delta \phi_e^T \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi e \mathbf{B}_u^T d\Omega \mathbf{u}_e - \int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi \epsilon \mathbf{B}_\phi^T d\Omega \phi_e - \int_{\Gamma_\phi} \mathbf{N}_\phi^T f_\phi ds \right] = 0. \end{aligned} \quad (90)$$

Como a equação (90) é válida para quaisquer variações $\delta \mathbf{u}_e^T$ e $\delta \phi_e^T$, então

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}_u c \mathbf{B}_u^T d\Omega \mathbf{u}_e + \int_{\Omega} \mathbf{B}_u e^T \mathbf{B}_\phi^T d\Omega \phi_e + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T f_u d\Omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}_u^T t ds = 0, \quad (91)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi e \mathbf{B}_u^T d\Omega \mathbf{u}_e - \int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi \epsilon \mathbf{B}_\phi^T d\Omega \phi_e - \int_{\Gamma_\phi} \mathbf{N}_\phi^T f_\phi ds = 0. \quad (92)$$

As equações (91) e (92), na forma matricial, formam o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^e & \mathbf{K}_{u\phi}^e \\ \mathbf{K}_{\phi u}^e & \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \phi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u^e \\ f_\phi^e \end{bmatrix}, \quad (93)$$

em que

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u c \mathbf{B}_u^T d\Omega, \quad (94)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u e^T \mathbf{B}_\phi^T d\Omega, \quad (95)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u}^e = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\phi} \epsilon \mathbf{B}_u^T d\Omega, \quad (96)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = - \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\phi} \epsilon \mathbf{B}_{\phi}^T d\Omega, \quad (97)$$

$$f_u^e = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T f_u d\Omega - \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}_u^T t ds, \quad (98)$$

$$f_{\phi}^e = \int_{\Gamma_{\phi}} \mathbf{N}_{\phi}^T f_{\phi} ds, \quad (99)$$

com essas integrais sendo calculadas numericamente. Da mesma forma que no problema de otimização com apenas material isotrópico, as matrizes de rigidez dos elementos são utilizadas para montar as matrizes globais (que são utilizadas para calcular os deslocamentos e potenciais elétricos de cada elemento no segundo passo do esquema iterativo descrito na seção 4.4.1).

5 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Nos capítulos anteriores foram abordados conceitos e teorias relacionados a problemas estáticos de otimização estrutural. Nesse capítulo, será abordada a parte teórica dos problemas dinâmicos, considerando o acréscimo de uma variável temporal.

Conforme SORIANO (2009), para estudar o comportamento dinâmico dos modelos discretos das estruturas, é necessário compreender o comportamento de modelos denominados *osciladores simples*.

O comportamento dinâmico é causado por vibrações na estrutura, podendo ser vibrações livres (causadas pelas condições iniciais de deslocamento e velocidade) ou forçadas (causadas por ações externas ao longo do tempo, como por exemplo, um terremoto ou uma corrente marítima)(SORIANO, 2009). No caso desse trabalho, o foco será nas vibrações livres das estruturas.

5.1 Equação do equilíbrio dinâmico

Da mesma forma que a equação do equilíbrio estático no problema de otimização topológica com dois materiais (piezelétrico e não-piezelétrico), a equação do equilíbrio dinâmico também pode ser obtida através da utilização do princípio de Hamilton apresentado na equação (86).

Conforme LIU; QUEK (2003), o Lagrangeano de um sistema dinâmico é dado pela diferença entre a energia cinética (T) e a energia potencial (Π):

$$\mathcal{L} = T - \Pi, \quad (100)$$

em que

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega, \quad (101)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega. \quad (102)$$

Aplicando a equação (100) no princípio de Hamilton, obtém-se

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi + W) dt = 0, \quad (103)$$

em que o trabalho das forças externas W é dado por:

$$W = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T f d\Omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{u}^T t ds. \quad (104)$$

Assim como foi feito para o problema estático, no problema dinâmico também é utilizado o MEF, utilizando a relação entre deslocamentos e deformações $\varepsilon = \mathbf{L}\mathbf{u}$, e as relações do MEF obtidas na Subseção 3.8.1, dadas por $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_e$ e $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$.

Aplicando essas relações na equação da energia cinética, obtém-se

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}_e d\Omega = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_e^T \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \dot{\mathbf{u}}_e, \quad (105)$$

enquanto que aplicando as substituições na equação da energia potencial, obtém-se

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \mathbf{c} \varepsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} \mathbf{u}_e d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{u}_e, \quad (106)$$

e o trabalho das forças externas fica representado por

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T f d\Omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{u}^T t ds = \int_{\Omega} \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T f d\Omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T t ds, \\ W &= \mathbf{u}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T f d\Omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}^T t ds \right). \end{aligned} \quad (107)$$

Fazendo a substituição de T , Π e W obtidas em (105)-(107) na equação (103), obtém-se

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}}_e - \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e \right) dt = 0, \quad (108)$$

em que

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad (109)$$

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} d\Omega, \quad (110)$$

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f d\Omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}^T t ds. \quad (111)$$

As matrizes \mathbf{M}_e e \mathbf{K}_e são denominadas, respectivamente, matriz de massa e matriz de rigidez do e -ésimo elemento finito, enquanto o vetor \mathbf{f}_e é chamado de vetor nodal de forças do e -ésimo elemento finito.

Aplicando as variações nos deslocamentos na equação (108), segue que

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \delta \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}}_e + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{M}_e \delta \dot{\mathbf{u}}_e - \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e - \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \delta \mathbf{u}_e + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e \right) dt = 0, \quad (112)$$

e devido à comutatividade do operador variacional, é possível agrupar os termos da equação (112):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}}_e - \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e \right) dt = 0. \quad (113)$$

Quanto ao primeiro termo do integrando da equação (113), aplica-se uma integral por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}}_e dt = \left| \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}}_e \right|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e dt. \quad (114)$$

O primeiro termo originado da integração por partes acaba sendo nulo pois as condições inicial e final devem ser satisfeitas para qualquer \mathbf{u} , e portanto, não existem variações em $t = t_1$ e $t = t_2$.

Substituindo (114) na equação (113) e colocando o termo $\delta \mathbf{u}_e^T$ em evidência, tem-se que

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}_e^T (-\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e - \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e + \mathbf{f}_e) dt = 0. \quad (115)$$

Como o Princípio de Hamilton é válido para qualquer deslocamento, então tem-se que

$$-\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e - \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e + \mathbf{f}_e = 0,$$

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e. \quad (116)$$

As matrizes de massa, as matrizes de rigidez e os vetores de forças de cada elemento são utilizados para formar a matriz de massa, a matriz de rigidez e o vetor de força global do problema, da mesma forma que a matriz de rigidez e o vetor de forças global são formados no problema estático, conforme a subseção 3.8.1. Considerando o problema como global, a equação (116) é representada como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (117)$$

5.2 Resolvendo a equação do equilíbrio dinâmico

Conforme MEIROVITCH (2001), no estudo de vibrações existe um interesse considerável em sistemas conservativos, ou seja, que possuem energia constante. Esses sistemas conservativos não estão sujeitos a forças de amortecimento e forças externas. Portanto, nesses sistemas, é considerado $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ na equação (117), e obtém-se

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (118)$$

Conforme SORIANO (2009), esse tipo de sistema de equações diferenciais admite uma solução harmônica, da forma

$$\mathbf{u} = \Phi_j \cos(\omega_j t - \theta_j), \quad (119)$$

em que Φ_j é um vetor chamado de j -ésimo modo natural de vibração, ω_j e θ_j são a frequência natural da vibração e o ângulo de fase correspondentes ao j -ésimo modo natural de vibração.

Substituindo a solução harmônica \mathbf{u} na equação (118), tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} (\Phi_j \cos(\omega_j t - \theta_j)) + \mathbf{K} \Phi_j \cos(\omega_j t - \theta_j) &= 0, \\ -\omega_j^2 \mathbf{M} \Phi_j \cos(\omega_j t - \theta_j) + \mathbf{K} \Phi_j \cos(\omega_j t - \theta_j) &= 0, \\ (\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) \Phi_j \cos(\omega_j t - \theta_j) &= 0, \\ (\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) \Phi_j &= 0. \end{aligned} \quad (120)$$

A equação (120) representa um sistema homogêneo, e conseqüentemente, só admite solução não trivial se o determinante da matriz $(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M})$ for nulo. O determinante dessa matriz vai resultar em uma expressão polinomial em ω_j^2 . Para cada valor de ω_j^2 (que é o quadrado da frequência natural), vai existir um vetor Φ_j , que é o modo natural de vibração correspondente a frequência natural ω_j . Em geral, as frequências naturais vão ser números reais e positivos, e o número de frequências naturais (e modos de vibração correspondentes) é igual ao número de graus de liberdade do modelo (que vai ser a ordem das matrizes de massa e rigidez). Ordenando as frequências em ordem crescente, denomina-se *frequência fundamental* como sendo a menor das frequências naturais, e conseqüentemente, o modo de vibração associado é denominado *modo fundamental de vibração*.

5.2.1 Modelo modal

Conforme SORIANO (2009), em toda vibração de estrutura existe dissipação de energia. Essa dissipação de energia é representada pelo amortecimento. Adicionando

o amortecimento na equação de equilíbrio, e considerando o vetor das forças, tem-se

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (121)$$

em que o \mathbf{C} é a matriz de amortecimento.

De acordo com CHOWDHURY; DASGUPTA (2003), a forma mais eficaz de considerar o amortecimento, é utilizando uma combinação linear entre a massa e a rigidez, da forma $\mathbf{C} = \alpha_M \mathbf{M} + \alpha_K \mathbf{K}$, em que as constantes α_M, α_K são pré-definidas.

De acordo com GAWRONSKI (2004), uma das opções mais convenientes para solucionar a equação (121) é utilizar o modelo modal. Para isso, considera-se a quantidade de n primeiros modos de vibração, de acordo com a ordem crescente das frequências naturais. Então, monta-se uma matriz modal Φ , com número de linhas igual ao número de graus de liberdade e número de colunas igual a quantidade de modos de vibração considerados, de modo que

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_n \end{bmatrix}, \quad (122)$$

em que Φ_i é o vetor correspondente ao i -ésimo modo natural de vibração. Após a construção da matriz modal, é utilizada uma substituição de coordenadas, através de $\mathbf{u} = \Phi \mathbf{d}$, onde o deslocamento é considerado em função das coordenadas modais. Aplicando essa substituição de coordenadas na equação (121), tem-se que

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\Phi\mathbf{d} = \mathbf{f}. \quad (123)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (123) por Φ^T , obtém-se

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{d}} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{d}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{d} = \Phi^T \mathbf{f}. \quad (124)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (124) por $(\Phi^T \mathbf{M} \Phi)^{-1}$, e utilizando uma notação apropriada, conforme GAWRONSKI (2004), a equação (124) fica simplificada:

$$\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{Z}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}\mathbf{d} = \mathbf{f}^*, \quad (125)$$

em que

$$\mathbf{Z} = 2 \begin{bmatrix} \zeta_1 \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2 \omega_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_n \omega_n \end{bmatrix}, \quad (126)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad (127)$$

$$\mathbf{f}^* = (\Phi^T \mathbf{M} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{f}, \quad (128)$$

e ζ_i representa o amortecimento em relação ao i -ésimo modo de vibração.

As condições iniciais em coordenadas modais podem ser facilmente obtidas através de manipulações algébricas e o conhecimento das condições iniciais $\mathbf{u}(0)$ e $\dot{\mathbf{u}}(0)$:

$$\Phi \mathbf{d} = \mathbf{u},$$

$$(\Phi^T \mathbf{M} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{d} = (\Phi^T \mathbf{M} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{d} = (\Phi^T \mathbf{M} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{d}(0) = (\Phi^T \mathbf{M} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{u}(0), \quad (129)$$

$$\dot{\mathbf{d}}(0) = (\Phi^T \mathbf{M} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(0). \quad (130)$$

Computacionalmente, a equação (125) é muito mais simples de ser resolvida que a equação (121), pois o vetor solução possui menos variáveis (não é necessário considerar todos os modos de vibração, diferentemente dos graus de liberdade), além do fato das matrizes da equação serem matrizes diagonais (\mathbf{Z}, \mathbf{D}), tornando-se um sistema com equações diferenciais de segunda ordem desacopladas. Claramente, após resolver o problema em (125) com as condições iniciais em (129) e (130), basta retornar a coordenada \mathbf{u} , através de $\mathbf{u} = \Phi \mathbf{d}$ para ter os deslocamentos reais.

5.2.2 Transformação para Espaços de Estados

Uma opção para resolver a equação (125) é utilizar o espaço de estados, reduzindo a ordem da equação diferencial. É introduzida uma nova variável vetorial $\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{p}$, e conseqüentemente, a equação (125) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}^* - \mathbf{Z}\mathbf{p} - \mathbf{D}\mathbf{d} \end{cases}. \quad (131)$$

Na forma de espaço de estados, as variáveis do vetor de estados \mathbf{E} são o deslocamento e a velocidade modal, $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{p} \end{bmatrix}^T$, e a equação (125) fica representada na forma de estados por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{D} & -\mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^* \end{bmatrix}, \quad (132)$$

onde $\mathbf{0}$ e \mathbf{I} são as matrizes nula e identidade, com ordem igual a n .

5.3 Análise Dinâmica com Material Piezelétrico

Para obter as equações da dinâmica com material piezelétrico, vamos considerar o sistema de equações com material piezelétrico para a parte estática, visto na equação (93) e acrescentar os termos referentes à parte dinâmica, vistos na equação (121).

Quanto às cargas elétricas, elas não são influenciadas pela massa, e portanto não terão os termos referentes a parte dinâmica, restando apenas o que já está na segunda linha do sistema visto na equação (93).

Quanto às cargas mecânicas, elas terão a influência da massa, e portanto, serão acrescidos os termos $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}$ na primeira equação do sistema em (93). Sendo assim, a equação de equilíbrio dinâmico com o uso de materiais piezelétricos, é dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u \\ f_\phi \end{bmatrix}. \quad (133)$$

Uma maneira de resolver essa equação é utilizando as mesmas ideias da seção 5.2, começando por considerar um sistema conservativo, ou seja, sem amortecimento e forças externas (mecânicas ou elétricas):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (134)$$

Então, considera-se uma solução harmônica, tanto para \mathbf{u} quanto para ϕ , da forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{uj} \\ \Phi_{\phi j} \end{bmatrix} \cos(\omega_j t - \theta_j). \quad (135)$$

Substituindo (135) em (134) obtém-se

$$-\omega_j^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{uj} \\ \Phi_{\phi j} \end{bmatrix} \cos(\omega_j t - \theta_j) + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{uj} \\ \Phi_{\phi j} \end{bmatrix} \cos(\omega_j t - \theta_j) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega_j^2 \mathbf{M} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{uj} \\ \Phi_{\phi j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (136)$$

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nessa seção, são apresentados os resultados obtidos em algumas simulações (com o uso do programa Matlab), com o gráfico da estrutura otimizada e as frequências naturais das mesmas. São considerados 3 casos:

- **Caso 1:** viga engastada do lado direito com força aplicada na extremidade inferior do lado esquerdo;
- **Caso 2:** viga biapoiada com força aplicada no meio da viga, na parte inferior;
- **Caso 3:** viga biapoiada com força aplicada no meio da viga, na parte superior.

Em todos os casos, são consideradas as estruturas otimizadas com 50% de material do domínio, e apresentados os resultados sem material piezelétrico e com material piezelétrico em 10% do total de material.

Para a obtenção dos resultados, considera-se:

- Uma viga com 1 metro de comprimento e 40 centímetros de largura;
- Uma malha retangular, com 100 elementos finitos retangulares na horizontal e 40 na vertical;
- Força de módulo igual a $10 \times 10^{10} N$.

6.1 Valores das constantes dos materiais e dos parâmetros utilizados

Além da malha de elementos finitos, da geometria da viga e da força aplicada, é necessário colocar no código os valores das constantes mecânicas e elétricas dos materiais utilizados. Os valores utilizados no código (e apresentados nessa seção) são os mesmos utilizados por SILVEIRA (2012).

As matrizes das constantes elásticas, piezelétricas e dielétricas do material piezelétrico, apresentadas em (11)-(13), são dadas respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} 12,1 & 7,54 & 7,52 & 0 & 0 & 0 \\ 7,54 & 12,1 & 7,52 & 0 & 0 & 0 \\ 7,52 & 7,52 & 11,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,26 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} N/m^2, \quad (137)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12,3 & 0 & 0 \\ -5,4 & -5,4 & 15,8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} C/m^2 \quad (138)$$

e

$$\begin{bmatrix} 8,11 & 0 & 0 \\ 0 & 8,11 & 0 \\ 0 & 0 & 7,35 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} C^2/(Nm^2). \quad (139)$$

O material piez elétrico utiliza o modo d_{31} , modo que é caracterizado por um deslocamento na direção 1 (eixo x) e polarização na direção 3 (eixo z) (ZHANG; LU, 2017).

É possível notar uma grande diferença na escala dos elementos das matrizes das constantes, o que acaba gerando um mau condicionamento na matriz global de rigidez do problema (uma diferença de ordem de 10^{19}). Para resolver esse mau condicionamento, é feita uma troca na unidade de força, considerando $N^* = 10^{10}N$, e conseqüentemente, as matrizes em (137)-(139) são reescritas como:

$$\begin{bmatrix} 12,1 & 7,54 & 7,52 & 0 & 0 & 0 \\ 7,54 & 12,1 & 7,52 & 0 & 0 & 0 \\ 7,52 & 7,52 & 11,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,26 \end{bmatrix} \cdot N^*/m^2, \quad (140)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12,3 & 0 & 0 \\ -5,4 & -5,4 & 15,8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} C/m^2 \quad (141)$$

e

$$\begin{bmatrix} 81,1 & 0 & 0 \\ 0 & 81,1 & 0 \\ 0 & 0 & 73,5 \end{bmatrix} \cdot C^2/(N^*m^2). \quad (142)$$

Para calcular os modos de vibração, não ocorre o problema do mau condicionamento, e portanto, as matrizes colocadas em (140)-(142) não são mais utilizadas (são utilizadas apenas para a otimização). Também não são mais necessários os expo-

entes de penalização, e por isso, a forma constitutiva da equação de rigidez dada na equação (67) é reescrita como

$$c_{ijkl} = \rho(x) [\rho_\phi(x)c_\phi + (1 - \rho_\phi(x))c_u]. \quad (143)$$

Para montar a matriz global de massa, considera-se a equação (109), onde são montadas as matrizes locais de massa e agrupadas com a utilização do MEF. Com os dois tipos de materiais, a equação (109) é adaptada para a seguinte equação:

$$\mathbf{M}_e = \rho(x) \left[\rho_\phi \int_{\Omega} \rho_{pzt} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega + (1 - \rho_\phi) \int_{\Omega} \rho_{elast} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right], \quad (144)$$

em que ρ_{pzt} é a densidade do material piezelétrico e ρ_{elast} é a densidade do material não-piezelétrico. Nesse trabalho são utilizados os materiais PZT5A (material piezelétrico) e alumínio (material não-piezelétrico), cujas densidades são, respectivamente, 7750 kg/m^3 e 2700 kg/m^3 . O módulo de *Young* do alumínio é dado por $E = 71 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ e o coeficiente de *Poisson* é dado por 0,33 (SILVEIRA, 2012).

Os modos de vibração são obtidos por meio das soluções da equação (120), no problema de autovalor (o quadrado da frequência natural) e autovetor (modo de vibração correspondente). Já as trajetórias temporais são calculadas a partir da primeira equação matricial do sistema dinâmico apresentado em (133).

A seguir, tem-se os resultados obtidos, com os gráficos dos modos de vibração e suas respectivas amplitudes, além das frequências naturais relativas a cada modo de vibração. As amplitudes são obtidas através da Transformada Rápida de Fourier (FFT). As trajetórias temporais do sistema, no espaço modal, são calculadas pela equação (132). A força aplicada foi considerada, para o caso 1, na direção y do último nó da discretização, sendo este o do canto inferior no final da parte livre. Para os casos 2 e 3, na direção y logo acima do grau de liberdade anterior.

Para as simulações, foram utilizados expoentes de penalização $p = q = 3$, além de um raio de filtragem $r_{min} = 1,2 \text{ mm}$.

6.2 Caso 1

Na figura 14 é apresentada a estruturada otimizada com os três primeiros modos de vibração.

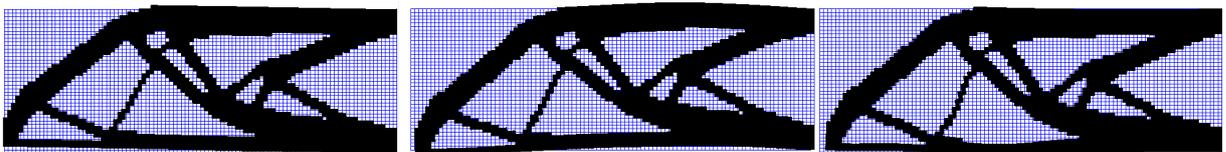


Figura 14: Estrutura otimizada do caso 1, sem material piezelétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.

A figura 15 mostra a amplitude das vibrações dos três modos de vibração que estão representados na figura 14.

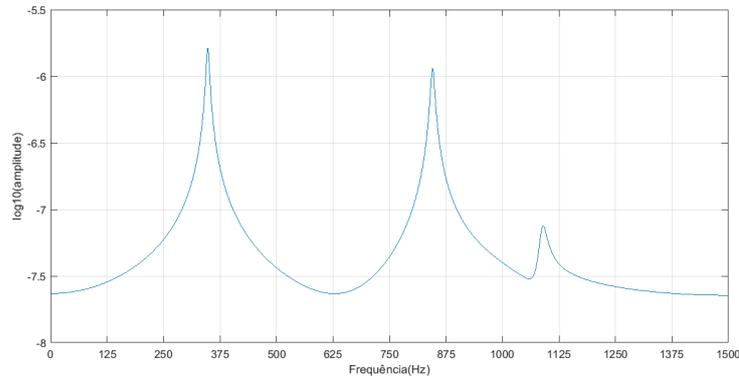


Figura 15: Amplitudes de vibração da estrutura do caso 1, com frequências iguais a 347,9 Hz, 845,08 Hz e 1087,61 Hz, respectivamente.

A figura 16 apresenta os modos de vibração da estrutura otimizada com o material piezelétrico (destacado em vermelho).

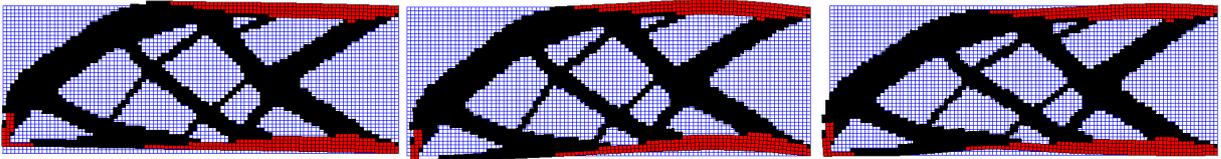


Figura 16: Estrutura otimizada do caso 1, com material piezelétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.

E a figura 17 fornece a amplitude das vibrações dos três modos de vibração representados na figura 16.

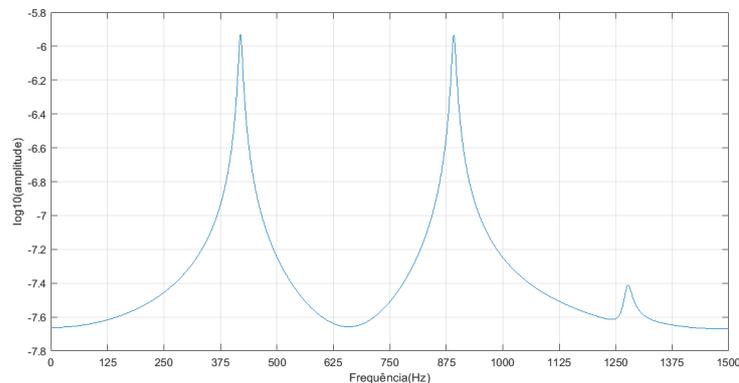


Figura 17: Amplitudes de vibração da estrutura do caso 1, com frequências iguais a 419,48 Hz, 891,43 Hz e 1275,16 Hz, respectivamente.

6.3 Caso 2

Na figura 18 é apresentada a estrutura otimizada com os três primeiros modos de vibração.

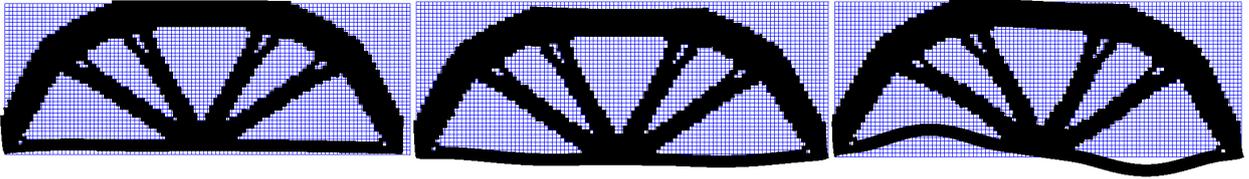


Figura 18: Estrutura otimizada do caso 2, sem material piezolétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.

A figura 19 mostra a amplitude das vibrações dos três modos de vibração que estão representados na figura 18.

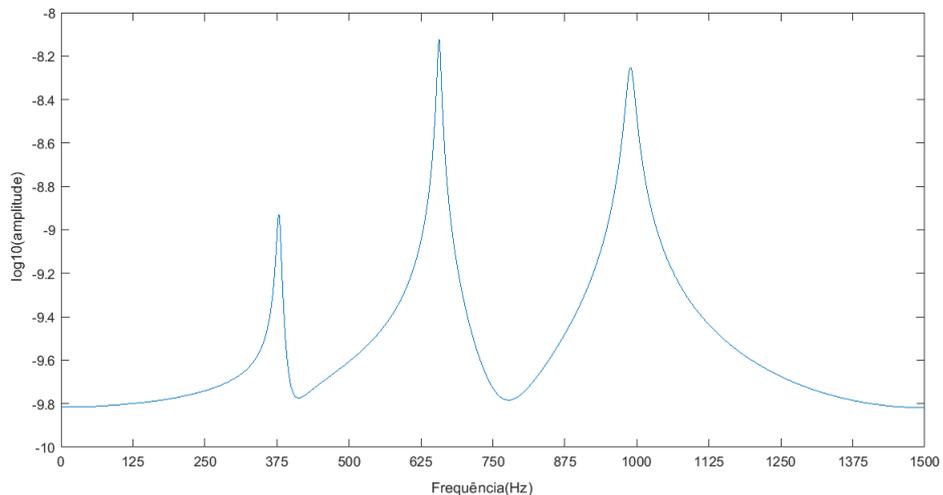


Figura 19: Amplitudes de vibração da estrutura do caso 2, com frequências iguais a 378,67 Hz, 656,44 Hz e 988,44 Hz, respectivamente.

A figura 20 apresenta os modos de vibração da estrutura otimizada com o material piezolétrico (destacado em vermelho).



Figura 20: Estrutura otimizada do caso 2, com material piezolétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.

E a figura 21 fornece a amplitude das vibrações dos três modos de vibração representados na figura 20.

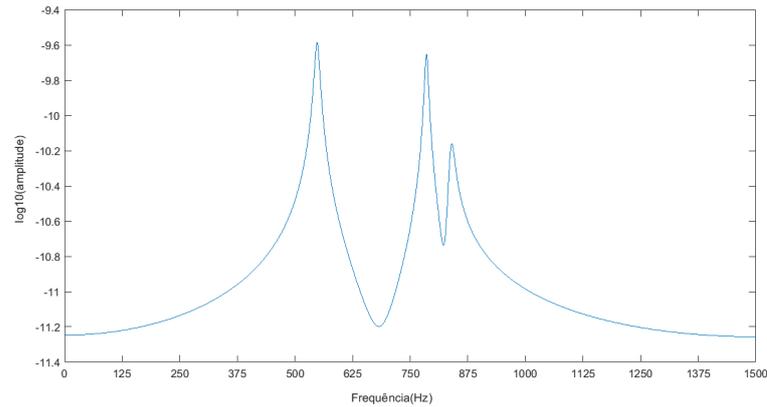


Figura 21: Amplitudes de vibração da estrutura do caso 2, com frequências iguais a 547,93 Hz, 785,05 Hz e 838,22 Hz, respectivamente.

6.4 Caso 3

Na figura 22 é apresentada a estrutura otimizada com os três primeiros modos de vibração.

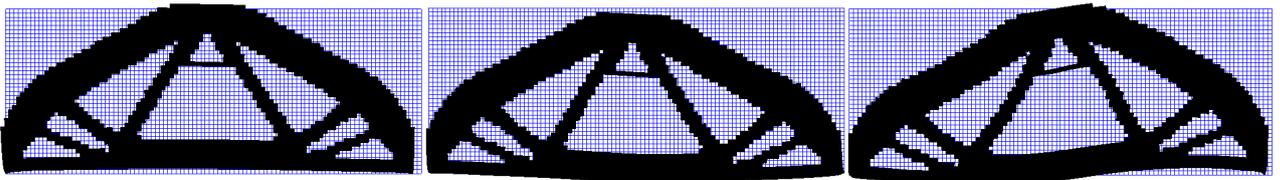


Figura 22: Estrutura otimizada do caso 3, sem material piezolétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.

A figura 23 mostra a amplitude das vibrações dos três modos de vibração que estão representados na figura 22.

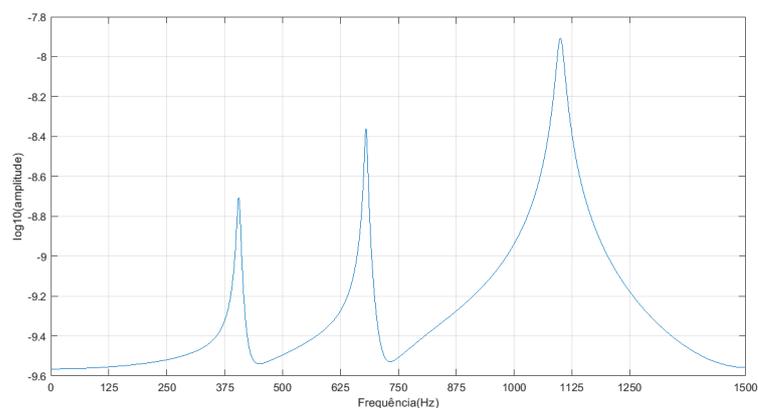


Figura 23: Amplitudes de vibração da estrutura do caso 3, com frequências iguais a 405,62 Hz, 680,21 Hz e 1099,51 Hz, respectivamente.

A figura 24 apresenta os modos de vibração da estrutura otimizada com o material piezolétrico (destacado em vermelho).

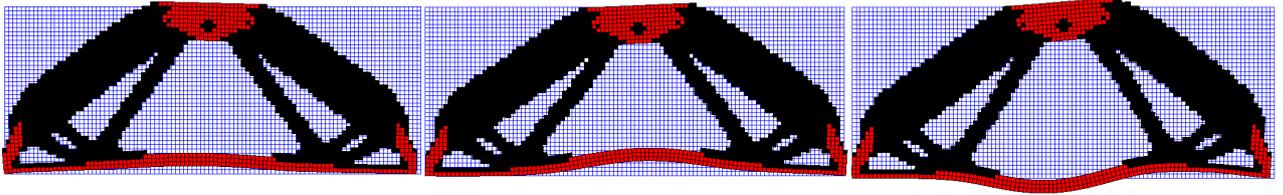


Figura 24: Estrutura otimizada do caso 3, com material piezolétrico, com o 1º, 2º e 3º modos de vibração, respectivamente.

E a figura 25 fornece a amplitude das vibrações dos três modos de vibração representados na figura 24.

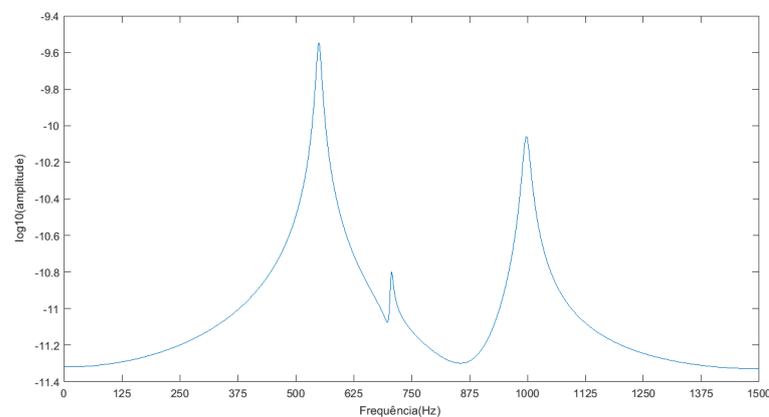


Figura 25: Amplitudes de vibração da estrutura do caso 3, com frequências iguais a 549,9 Hz, 705,54 Hz e 997,02 Hz, respectivamente.

A tabela 4 fornece as frequências obtidas nos três primeiros modos de vibração em todos os casos analisados.

Tabela 4: Frequência dos três primeiros modos de vibração (em Hz)

Estrutura	1º modo	2º modo	3º modo
Caso 1 sem piezolétrico	347,9	845,08	1087,61
Caso 1 com piezolétrico	419,48	891,43	1275,16
Caso 2 sem piezolétrico	378,67	656,44	988,44
Caso 2 com piezolétrico	547,93	785,05	838,22
Caso 3 sem piezolétrico	405,62	680,21	1099,51
Caso 3 com piezolétrico	549,9	705,54	997,02

6.5 Análise dos Resultados

No processo de otimização topológica, a estrutura é otimizada através da minimização da função objetivo, que nesse caso, é a minimização da flexibilidade (que equivale a maximização da rigidez). Essas funções são apresentadas nos problemas

de otimização abordados no capítulo 3 (para o problema com apenas um material) e no capítulo 4 (para a situação com o material piezelétrico).

Tabela 5: Flexibilidade das estruturas

Estrutura	Valor da função objetivo (flexibilidade)
Caso 1 sem piezelétrico	1824,68
Caso 1 com piezelétrico	828,76
Caso 2 sem piezelétrico	275,86
Caso 2 com piezelétrico	128,92
Caso 3 sem piezelétrico	266,20
Caso 3 com piezelétrico	116,05

Em todos os problemas, são utilizadas um máximo de 150 iterações, para o qual já é possível notar a convergência do valor da função objetivo. Nos 3 casos, é constatado que a flexibilidade das estruturas com material piezelétrico é de cerca de 45% da flexibilidade das estruturas sem material piezelétrico, conforme a tabela 5.

Quanto às vibrações, é possível notar que as estruturas com material piezelétrico possuem uma frequência de vibração maior que as estruturas sem piezelétrico nos dois primeiros modos de vibração. Isso se dá devido ao aumento da rigidez da estrutura. No terceiro modo, para os casos 2 e 3, as estruturas sem piezelétrico apresentaram uma frequência de vibração maior que as estruturas com piezelétrico.

Quando se altera a configuração do material na estrutura, um modo flexural (deslocamento modal na direção vertical) pode passar para axial (deslocamento modal na direção horizontal), como ocorreu no caso 2 e possivelmente no caso 3.

7 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

O método de otimização topológica foi utilizado para a obtenção da topologia ótima para diversos casos, seja com material piezelétrico, ou apenas com alumínio. As instabilidades numéricas não ocorreram, pois o método possui alguns recursos para evitar essas instabilidades.

Além do problema sem material piezelétrico, no qual SIGMUND (2001) fornece um código de 99 linhas que resolve o problema, o método dos elementos finitos também foi eficiente para resolver o problema com dois materiais (piezelétrico e não-piezelétrico).

Após a definição das estruturas ótimas obtidas no método da otimização, foi possível computar as vibrações da estrutura (modos, frequência e amplitude) com a utilização do método da transformada rápida de Fourier.

Através dos resultados obtidos no capítulo 6, é possível verificar que o material piezelétrico tem uma contribuição muito importante para a otimização das estruturas, visto que a função objetivo que é minimizada pelo método de otimização possui valores menores com o material piezelétrico.

As estruturas com materiais piezelétricos apresentam frequências de vibração maiores do que as que não contém material piezelétrico. Isso ocorre devido ao aumento de massa e rigidez por causa da adição do material piezelétrico.

Para trabalhos futuros, pretende-se analisar casos do comportamento dos modos de vibração de estruturas otimizadas com materiais piezelétricos e com restrições de domínio (por exemplo, restrições de fabricação). Além disso, analisar o comportamento dos modos de vibração nas mesmas estruturas, mas não otimizadas, porém com restrições de domínio e comparar os resultados entre as estruturas otimizadas e não otimizadas, com diferentes restrições de domínio.

Ainda, para trabalhos futuros, pretende-se utilizar os materiais piezelétricos, e a sua localização advinda da otimização topológica, como atuadores. Assim, realizar o controle das vibrações.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, M.; LAGES, E.; CAVALCANTE, M. Checkerboard-free topology optimization for compliance minimization of continuum elastic structures based on the generalized finite-volume theory. **Latin American Journal of Solids and Structures**, [S.l.], v.17, n.8, p.1–21, 2020.

ASSIREY, E. Perovskite synthesis, Properties and their related biochemical and industrial application. **Saudi Pharmaceutical Journal**, [S.l.], v.27, n.6, p.817–829, 2019.

AWRUCH, A.; LINN, R.; MORSCH, I. **Teoria da Elasticidade Aplicada à Mecânica Estrutural**. [S.l.]: Editora da UFRGS, 2018.

BENDINE, K.; HAMD AOUI, M.; BOUKHOULDA, B. Piezoelectric Energy Harvesting from a Bridge Subjected to Time-Dependent Moving Loads Using Finite Elements. **Arabian Journal for Science and Engineering**, [S.l.], v.44, n.1, p.5743–5763, 2019.

BENDSOE, M. Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem. **Structural Optimization**, [S.l.], v.1, n.1, p.193–202, 1999.

BENDSOE, M.; SIGMUND, O. **Topology Optimization Theory, Methods, and Applications**. [S.l.]: Springer, 2003.

BRUGGI, M.; DUYSINX, P. Topology Optimization for Minimum Weight with Compliance and Stress Constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.46, n.1, p.369–384, 2012.

CHOWDHURY, I.; DASGUPTA, S. Computation of Rayleigh Damping Coefficients for Large Systems. **Electronic Journal of Geotechnical Engineering**, [S.l.], v.8, n.1, p.1–11, 2003.

CURIE, J.; CURIE, P. Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres à faces inclinées. **Bulletin de la Société minéralogique de France**, [S.l.], v.3, n.4, p.90–93, 1880.

DIAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. **Structural Optimization**, [S.I.], v.10, n.1, p.40–45, 1995.

GAWRONSKI, W. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. [S.I.]: Springer, 2004.

GHAREEB, N.; FARHAT, M. Smart Materials and Structures: State of the Art and Applications. **Nano Research and Applications**, [S.I.], v.4, n.2, p.1–5, 2018.

GUO, X.; CHENG, G. Recent Development in Structural Design and Optimization. **Acta Mechanica Sinica**, [S.I.], v.26, n.1, p.807–823, 2010.

HAERTLING, G. Ferroelectric Ceramics: History and Technology. **Journal of the American Ceramic Society**, [S.I.], v.82, n.4, p.797–818, 1999.

HAFTKA, R.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. [S.I.]: Kluwer Academic Publishers, 1992.

HAO, J.; LI, W.; ZHAI, J.; CHEN, H. Progress in high-strain perovskite piezoelectric ceramics. **Materials Science & Engineering R**, [S.I.], v.135, n.1, p.1–57, 2019.

HE, M.; ZHANG, X.; FERNANDEZ, L.; MOLTER, A.; XIA, L.; SHI, T. Multi-material topology optimization of piezoelectric composite structures for energy harvesting. **Composite Structures**, [S.I.], v.265, n.1, p.1–23, 2021.

HU, Y.; KANG, W.; FANG, Y.; XIE, L.; QIU, L.; JIN, T. Piezoelectric Poly(vinylidene fluoride) (PVDF) Polymer-Based Sensor for Wrist Motion Signal Detection. **Applied Sciences**, [S.I.], v.8, n.5, p.836 1–12, 2018.

IEEE. **IEEE Standard on Piezoelectricity**. [S.I.]: IEEE, 1987.

KINGMAN, J.; TSAVDARIDIS, K.; TOROPOV, V. Applications of topology optimisation in structural engineering: high-rise buildings and steel components. **Jordan Journal of Civil Engineering**, [S.I.], v.9, n.3, p.335–357, 2014.

KIRSCH, U. **Structural Optimization: Fundamentals and Applications**. [S.I.]: Springer-Verlag, 1993.

LIPPMANN, G. Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques. **J. Phys. Theor. Appl.**, [S.I.], v.10, n.1, p.381–394, 1881.

LIU, G.; QUEK, S. **The Finite Element Method: A Practical Course**. [S.I.]: Butterworth-Heinemann, 2003.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of Vibrations**. [S.I.]: Mc-Graw Hill, 2001.

MOHEIMANI, S.; FLEMING, A. **Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping**. [S.l.]: Springer, 2006.

NADAL, C.; PIGACHE, F. Multimodal electromechanical model of piezoelectric transformers by Hamilton's principle. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control**, [S.l.], v.56, n.11, p.2530–2543, 2009.

NGO, T. **Composite and Nanocomposite Materials: From Knowledge to Industrial Applications**. [S.l.]: IntechOpen, 2020.

PREUMONTH, A. **Vibration Control of Active Structures: An Introduction**. [S.l.]: Springer, 2011.

PRIYA, S. Advances in energy harvesting using low profile piezoelectric transducers. **Journal of Electroceramics**, [S.l.], v.19, n.1, p.167–184, 2007.

QUERIN, O.; VICTORIA, M.; ALONSO, C.; ANSOLA, R.; MARTÍ, P. **Topology Design Methods for Structural Optimization**. [S.l.]: Elsevier, 2017.

ROZVANY, G. A critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.37, n.1, p.217–237, 2007.

SAFAEI, M.; ANTON, S.; SODANO, H. A review of energy harvesting using piezoelectric materials: state-of-the-art a decade later (2008–2018). **Smart Materials and Structures**, [S.l.], v.28, n.11, p.1–62, 2019.

SIGMUND, O. **Design of Material Structures using Topology Optimization**. 1994. Tese de Doutorado — Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, Lyngby, Dinamarca.

SIGMUND, O. A 99 Line Topology Optimization Code Written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.21, n.1, p.120–127, 2001.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, [S.l.], v.16, n.1, p.68–75, 1998.

SILVEIRA, O. A. A. da. **Projeto Simultâneo de Otimização Topológica e Controle para Redução de Vibrações Utilizando Material Piezelétrico**. 2012. Tese de Doutorado — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

SORIANO, H. **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. [S.l.]: Ciência Moderna Ltda., 2009.

STEWART, J. **Cálculo**: Volume 2. 6ª edição. [S.l.]: Cengage Learning, 2010.

TIERSTEN, H. **Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations Piezoelectric Plates**. [S.l.]: Springer, 1969.

UCHINO, K. **Introduction to Piezoelectric Actuators and Transducers**. [S.l.]: Pennsylvania State University, 2003.

YANG, J. **An Introduction to the Theory of Piezoelectricity**. [S.l.]: Springer, 2005.

ZHANG, S.; LI, F.; YU, F.; JIANG, X.; LEE, H.; LUO, J.; SHROUT, T. Recent Developments in Piezoelectric Crystals. **Journal of the Korean Ceramic Society**, [S.l.], v.55, n.5, p.419–439, 2018.

ZHANG, Y.; LU, T. Equivalent homogeneous model of D31-mode longitudinal piezoelectric transducers. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, [S.l.], v.28, n.1, p.1–8, 2017.

ZHENG, B.; CHANG, C.; GEA, H. Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.38, n.1, p.17–23, 2009.

ZHU, X. **Piezoelectric Ceramic Materials**: Processing, Properties, Characterization, and Applications. [S.l.]: Nova Science Publishers, 2010.

Análise de vibrações em estruturas otimizadas com materiais piezelétricos – Anderson Donay Martins



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Análise de vibrações em estruturas otimizadas com
materiais piezelétricos**

ANDERSON DONAY MARTINS

Pelotas, 2022