

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Controle de vibrações em vigas usando o efeito de Buracos Negros Acústicos e atuadores piezelétricos

Tatiane Weimann

Pelotas, 2022

Tatiane Weimann

Controle de vibrações em vigas usando o efeito de Buracos Negros Acústicos e atuadores piezelétricos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Molter

Pelotas, 2022

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

W415c Weimann, Tatiane

Controle de vibrações em vigas usando o efeito de buracos negros acústicos e atuadores piezelétricos / Tatiane Weimann ; Alexandre Molter, orientador. — Pelotas, 2022.

92 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2022.

1. Viga. 2. Controle de vibrações. 3. Bnas. 4. Rql. I. Molter, Alexandre, orient. II. Título.

CDD : 534.52

**CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM VIGAS USANDO O EFEITO DE BURACOS
NEGROS ACÚSTICOS E ATUADORES PIEZELÉTRICOS**

por

Tatiane Weimann

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Modelagem Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexandre Molter – Orientador (UFPel)

Prof. Dr. Leslie Darien Perez Fernandez (UFPel)

Prof. Dr. Daniel Milbrath de Leon (UFRGS)

Profa. Dra. Rejane Pergher (UFPel)

Prof. Dr. Gustavo Assis da Silva (UFPel)

Pelotas, 27 de março de 2022

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo apoio incondicional em todos os momentos da minha trajetória acadêmica. Os dois maiores incentivadores das realizações dos meus sonhos. Muito obrigada!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter iluminado meus pensamentos e principalmente me guiado em um caminho com tantas oportunidades.

Agradeço aos meus pais, Rosemeri e Roque, e meu irmão Tiago, pelo apoio e incentivo em todos os momentos da minha vida. Por acreditarem em mim, e não medirem esforços para a concretização dos meus sonhos. Sem vocês, nada seria possível.

Agradeço ao professor Alexandre, pela orientação, competência, profissionalismo e dedicação, que foram essenciais para a minha trajetória, és exemplo! Tantas vezes que nos reunimos, sempre disposto e, embora algumas vezes eu chegasse desestimulada, bastavam alguns minutos de conversa e o ânimo voltava. Obrigada por acreditar em mim e pelos tantos elogios e incentivos. Tenho certeza que não chegaria aqui sem o seu apoio. Você foi e está sendo muito mais que orientador: para mim será sempre mestre e amigo. Agradeço também ao professor Leslie, pelo conhecimento compartilhado durante o período do mestrado, com certeza levarei sua dedicação como exemplo de vida.

Agradeço ao meu namorado, Jean, pelo amor, partilha, companheirismo e apoio incondicional. Obrigada por me apoiar do início ao fim, e por compreender a minha ausência pelo tempo dedicado aos estudos.

Agradeço aos meus amigos e amigas (que seriam muitos para citar), anjos que Deus colocou em meu caminho. Mesmo com a distância causada pelo incansável estudo, sempre se fizeram presentes na minha vida e estarão sempre em meu coração. Obrigada pelo companheirismo, apoio e amizade incondicional.

Agradeço as amigadas construídas ao longo do mestrado, Pétra, João, Racquel, Elisiane e Anderson, vocês foram essenciais, foi com vocês que consegui dividir todos os sentimentos (principalmente as alegrias e desesperos) que todo mestrando tem o direito de sentir nestes 2 anos, só nós entendemos o quão desafiadora é esta caminhada. Agradeço em especial a Lisandra, minha amiga, colega, companheira de estudo, irmã que a graduação me apresentou! Sem você, com certeza tudo seria mais difícil.

Agradeço a coordenação e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, pelos ensinamentos e atenção prestada. E por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

**A alegria está na luta, na tentativa, no sofrimento envolvido
e não na vitória propriamente dita.**

— MAHATMA GANDHI

RESUMO

WEIMANN, Tatiane. **Controle de vibrações em vigas usando o efeito de Buracos Negros Acústicos e atuadores piezelétricos**. 2022. 91 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

A diminuição do custo na construção de uma estrutura é almejada pelos projetistas. Porém, dessa forma as estruturas se tornam mais leves e menos rígidas, e conseqüentemente mais vulneráveis a vibrações indesejadas. Por esse motivo, a implementação de métodos de controle de vibrações é necessária quando se trata da utilização de estruturas leves e flexíveis nos projetos mecânicos. Em vista disso, este trabalho propõe o uso de dois tipos de controle de vibrações numa viga, passivo e ativo, para se obter um projeto eficiente. O controle passivo não requer o uso de energia adicional para o controle. Em vez disso, dispositivos e/ou técnicas que absorvem, isolam ou dissipam a energia das vibrações são adicionados ao sistema. Para esse controle, propõe-se usar o efeito dos Buracos Negros Acústicos (BNAs), uma vez que esse efeito prevê a inserção de buracos prescritos na estrutura, fazendo com que a vibração fique restrita no interior do(s) buraco(s), e apenas uma pequena parte seja refletida para o restante da estrutura. Por outro lado, o controle ativo requer um conjunto de sensores e atuadores acoplados ou inseridos na estrutura. Então, para produzir um controle ativo, deve-se escolher um atuador adequado e implementar um controlador para o mesmo. O atuador utilizado neste trabalho é baseado num material piezelétrico, e o controlador escolhido é o Regulador Quadrático Linear (RQL). O atuador piezelétrico é usado para gerar um movimento oscilatório contrário ao movimento existente na estrutura, para que assim ocorra o controle das vibrações. Para resolver o problema de controle, inicialmente modela-se o movimento da estrutura que, normalmente em problemas de mecânica do contínuo, é obtido através da resolução de um sistema de equações em derivadas parciais (EDPs). Visto que a resolução analítica desse sistema de EDPs pode ser complicada, neste trabalho utiliza-se o método dos elementos finitos para a discretização do domínio da estrutura. Portanto, levando em consideração os aspectos mencionados, o objetivo deste trabalho é simular a dinâmica e o controle de vibrações em estruturas do tipo vigas, por meio da técnica dos BNAs e utilizar um controlador RQL para operar um atuador piezelétrico. Outro propósito é analisar as amplitudes das vibrações, através da Transformada de Fourier, com o intuito de verificar a diminuição da amplitude de vibração gerada pela inserção dos buracos. Os resultados destas simulações serão apresentados e discutidos.

Palavras-chave: Viga, Controle de vibrações, BNAs, RQL.

ABSTRACT

WEIMANN, Tatiane. **Vibration control in beams using the Acoustic Black Holes effect and piezoelectric actuators**. 2022. 91 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

The reduction of cost in the construction of a structure is desired by designers. However, in this way, structures become lighter and less rigid, and consequently more vulnerable to unwanted vibrations. For this reason, the implementation of vibration control methods is necessary when considering flexible structures in mechanical projects. In view of that, this work proposes the use of two types of vibration control in a beam, passive and active, to obtain an efficient design. Passive control does not require the use of energy for control, instead devices and/or techniques that absorb, isolate or dissipate vibration energy are added to the system. For this control, it is proposed to use the effect of Acoustic Black Holes (BNAs), since this effect predicts the insertion of prescribed holes in the structure, causing the vibration to be restricted inside the hole(s), and only a small part is transmitted to the rest of the structure. On the other hand, active control requires a set of sensors and actuators coupled to or inserted into the structure. So, to produce an active control, one must choose a suitable actuator and implement a controller for it. The actuator that will be used in this work is a piezoelectric material, and the chosen controller is the Linear Quadratic Regulator (LQR). The piezoelectric actuator is employed to generate an oscillatory movement contrary to the existing movement in the structure, so that vibrations be controlled. In order to solve the control problem, the movement of the structure is initially modeled, which in continuum mechanics problems, is usually obtained by solving a system of partial differential equations. Since the analytical resolution of these equations can be complicated, the Finite Element Method is used to discretize the structure domain. Therefore, taking into account the mentioned aspects, the objective of this work is to simulate the dynamics and vibration control in beam-type structures, using the ABHs technique and to use an LQR controller to operate a piezoelectric actuator. Another purpose is to analyze the vibration amplitudes, through the Fourier Transform, in order to verify the decrease in the vibration amplitude generated by the insertion of holes. The results of these simulations will be presented and discussed.

Keywords: Beam, Vibration control, ABHs, LQR.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Ilustração do efeito piezelétrico: (a) efeito direto; (b) efeito inverso. Fonte: Adaptado de HAO et al. (2019). | 25 |
| 2 | Célula unitária de uma estrutura perovskita. Fonte: HAO et al. (2019). | 27 |
| 3 | Processo de polarização de cerâmicas. Fonte: Adaptado de MOHEIMANI; FLEMING (2006). | 27 |
| 4 | Propriedade da cerâmica piezelétrica. Fonte: Adaptado de MOHEIMANI; FLEMING (2006). | 28 |
| 5 | Curvas de tensão-deformação para diferentes materiais. Fonte: Adaptado de MASE; SMELSER; MASE (2010). | 29 |
| 6 | Exemplo de uma malha de elementos finitos. | 43 |
| 7 | Mudança de coordenadas de um elemento finito. | 44 |
| 8 | Informações contidas em cada elemento da malha de elementos finitos. | 44 |
| 9 | Função de interpolação N_1 | 45 |
| 10 | Ilustração da estrutura composta piezelétrica. | 50 |
| 11 | Estrutura que satisfaz a função de potência. Fonte: Adaptado de ZHAO; PRASAD (2019). | 58 |
| 12 | Formato de um BNA. Fonte: Adaptado de ZHAO; PRASAD (2019). | 58 |
| 13 | Número de ondas. | 59 |
| 14 | Sistema de controle ótimo. | 65 |
| 15 | Viga engastada de um lado. | 68 |
| 16 | Comparação entre simulações feitas no MATLAB® e no COMSOL Multiphysics® - viga sem buraco e três primeiros modos. | 69 |
| 17 | Comparação entre simulações feitas no MATLAB® e no COMSOL Multiphysics® - viga com um buraco e três primeiros modos. | 69 |
| 18 | Comparação entre simulações feitas no MATLAB® e no COMSOL Multiphysics® - viga com dois buracos e três primeiros modos. | 69 |
| 19 | Comparação entre simulações feitas no MATLAB® e no COMSOL Multiphysics® - viga com três buracos e três primeiros modos. | 70 |
| 20 | Viga de $1m$ de comprimento e um buraco com sua respectiva amplitude (\tilde{W}). | 71 |
| 21 | Viga de $1m$ de comprimento e um buraco (bordas refinadas) com sua respectiva amplitude (\tilde{W}). | 72 |
| 22 | Três primeiros modos (a) e resposta de amplitude da vibração (b) para viga sem buraco. | 73 |

| | | |
|----|---|----|
| 23 | Três primeiros modos (a) e resposta de amplitude da vibração (b) para viga com um BNA. | 74 |
| 24 | Três primeiros modos (a) e resposta de amplitude da vibração (b) para viga com dois BNAs. | 74 |
| 25 | Três primeiros modos (a) e resposta de amplitude da vibração (b) para viga com três BNAs. | 75 |
| 26 | Três primeiros modos para a viga com dois BNAs e com atuador piezelétrico. | 76 |
| 27 | Deslocamento da viga sem BNA e um atuador piezelétrico com e sem controle ativo para os três primeiros modos. | 77 |
| 28 | Deslocamento da viga com dois BNAs e um atuador piezelétrico com e sem controle ativo para os três primeiros modos. | 77 |
| 29 | Comparação de amplitudes de vibração para diferentes valores de Q_c | 78 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Equivalência entre a notação tensorial e reduzida. | 31 |
| 2 | Propriedades materiais do alumínio. | 67 |
| 3 | Propriedades materiais do PZT5A. | 68 |
| 4 | Comparação entre as frequências dos <i>softwares</i> MATLAB® e COM-SOL Multiphysics®. | 70 |
| 5 | Coordenadas dos BNAs. | 73 |
| 6 | Resultados dos testes com os BNAs. | 75 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-----|----------------------------------|
| AMS | Amortecedor de Massa Sintonizado |
| BNA | Buraco Negro Acústico |
| RQL | Regulador Quadrático Linear |
| EDP | Equação em Derivadas Parciais |
| MEF | Método dos Elementos Finitos |
| PZT | Titanato-Zirconato de Chumbo |

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres latinos

| | |
|---------------|---|
| A | Área da seção transversal da viga |
| A_c | Matriz do sistema |
| a, b | Dimensões do elemento retangular |
| B | Matriz de controle |
| B_ϕ | Derivada das funções de interpolação com relação ao potencial elétrico |
| B_q | Derivada das funções de interpolação com relação ao deslocamento |
| c^E | Constantes elásticas |
| C | Matriz de amortecimento |
| C_1, C_2 | Constantes |
| D | Deslocamento elétrico |
| \mathcal{D} | Operador diferencial para funções de interpolação relativas ao deslocamento |
| d | Deslocamento modal |
| \det | Determinante |
| e | Constantes piezelétricas |
| E | Campo elétrico |
| E_c | Módulo de Young |
| f | Força de corpo por unidade de massa |
| \mathcal{F} | Função das velocidades generalizadas (função de dissipação de Rayleigh) |
| f_Ω | Forças do campo sobre Γ_1 |
| f_Γ | Forças de superfície sobre Γ_1 |
| f_P | Forças pontuais |
| G | Matriz de ganhos |
| h_e | Constante escalar |
| h | Espessura |
| h_1 | Espessura residual |

| | |
|------------------|---|
| H | Hamiltoniano |
| i, j, k, l | Índices |
| I | Matriz identidade |
| $I(x)$ | Momento de inércia da seção transversal da viga |
| J | Índice de desempenho |
| \mathcal{K} | Energia cinética |
| k | Coeficientes simétricos de rigidez |
| $k(x)$ | Número de onda |
| K | Matriz de rigidez |
| $K_{q\phi}^e$ | Matriz de acoplamento piezoeletrico |
| $K_{\phi\phi}^e$ | Matriz de capacitância dielétrica |
| L_{BNA} | Comprimento do buraco |
| \mathcal{L} | Lagrangeano |
| m | Coeficientes simétricos de massa |
| m_o | Ordem da lei de potência |
| M | Matriz de massa |
| N_e | Funções de interpolação |
| Q | Vetor de forças externas |
| Q_c | Matriz de peso |
| Q_k | Forças generalizadas não conservativas (externas) |
| Q_{kvisc} | Força do amortecimento viscoso |
| q | Vetor de deslocamento |
| q_e | Deslocamento nos pontos nodais |
| q_{ek} | Deslocamentos generalizados quando o sistema está em equilíbrio |
| q_k | Coordenadas generalizadas |
| \tilde{q}_k | Pequenas perturbações do equilíbrio |
| $q(x)$ | Deslocamento no ponto x |
| S | Campo de deformação |
| S_{xx} | Deformação mecânica na direção do eixo x |
| S_{yy} | Deformação mecânica na direção do eixo y |
| T | Tensões mecânicas |
| V | Energia potencial |
| v_f | Velocidade de fase local |
| v_g | Velocidade de grupo local |

| | |
|---------------------|---|
| x | Movimento horizontal do elemento |
| W | Trabalho virtual |
| \tilde{W} | Amplitude da onda |
| $\overline{W_{nc}}$ | Trabalho virtual das forças não conservativas |
| y_1, y_2 | Vetores do deslocamento na representação de espaço de estados |
| y | Movimento vertical do elemento |
| Z | Matriz de amortecimento modal |

Caracteres gregos

| | |
|------------------------|---|
| α, β, ι | Escalares |
| γ_{xy} | Deformação de cisalhamento |
| Γ_1 | Contorno do material não piezelétrico |
| Γ_2 | Contorno do material piezelétrico |
| Γ_3 | Região da superfície de um corpo com condições de contorno para o material não piezelétrico |
| Γ_4 | Região da superfície de um corpo com condições de contorno para o material piezelétrico |
| δ_{ij} | Delta de Kronecker |
| δ | Varição |
| ϵ | Constantes dielétricas |
| ε | Constante |
| ζ | Amortecimento matricial crítico |
| η | Movimento vertical após a mudança de coordenadas |
| θ | Mudança de fase da onda |
| κ_p | Carga elétrica concentrada |
| Δ | Operador diferencial para funções de interpolação relativas ao potencial elétrico |
| ν | Coeficiente de Poisson |
| ξ | Movimento horizontal após a mudança de coordenadas |
| ρ | Densidade da massa |
| ρ_e | Densidade das cargas livres |
| ς | Carga elétrica superficial |
| τ | Vetor de estados |
| ϕ | Vetor de potencial elétrico |
| ϕ_e | Vetor de potenciais elétricos nodais |

| | |
|------------|--|
| $\phi(x)$ | Potencial elétrico no ponto x |
| ϕ_a | Potenciais elétricos nos pontos nodais |
| ψ | Autovetor do modo natural de vibração |
| ψ^r | Autovetor do modo natural de vibração M normalizadas |
| Ψ | Matriz do modo natural de vibração |
| ω | Frequência natural de vibração |
| ω_a | Frequência angular |
| Ω | Matriz diagonal de frequências naturais |
| Ω_e | Domínio do elemento |
| Ω_d | Domínio de todo o material |
| Ω_p | Domínio do material piezoeletrico |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 18 |
| 1.1 | Controles passivo e ativo de vibrações | 18 |
| 1.2 | Objetivos e organização do trabalho | 21 |
| 1.2.1 | Objetivo geral | 22 |
| 1.2.2 | Objetivos específicos | 22 |
| 1.2.3 | Estrutura do trabalho | 22 |
| 2 | DINÂMICA ESTRUTURAL | 24 |
| 2.1 | Materiais piezelétricos | 25 |
| 2.1.1 | Cerâmicas piezelétricas | 26 |
| 2.1.2 | Equações constitutivas | 28 |
| 2.1.3 | Descrição dos tensores e notação matricial | 30 |
| 2.1.4 | Constantes elásticas, piezelétricas e dielétricas do material | 32 |
| 2.1.5 | Estado plano de tensão | 33 |
| 2.2 | Dinâmica com análise modal | 33 |
| 2.2.1 | Modelagem da dinâmica estrutural | 34 |
| 2.2.2 | Análise modal | 37 |
| 2.2.3 | Representação em espaço de estados | 42 |
| 2.3 | Análise da dinâmica pelo MEF com material piezelétrico | 43 |
| 2.3.1 | Formulação dos deslocamentos | 44 |
| 2.3.2 | Princípio variacional | 47 |
| 2.3.3 | Formulação de elementos finitos para piezeletricidade | 50 |
| 3 | CONTROLE DE VIBRAÇÕES | 57 |
| 3.1 | Controle passivo usando o efeito dos BNAs | 57 |
| 3.2 | Controle ativo usando RQL | 64 |
| 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES | 67 |
| 4.1 | Validação do código implementado para o MEF | 68 |
| 4.2 | Amplitude da onda | 71 |
| 4.3 | Controle passivo via efeito do BNA | 72 |
| 4.4 | Controle ativo via atuador piezelétrico e controle RQL | 75 |
| 5 | CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS PARA FUTUROS TRABALHOS | 79 |
| | REFERÊNCIAS | 81 |
| | ANEXO A CÁLCULO DAS DERIVADAS | 87 |

1 INTRODUÇÃO

Na contemporaneidade, nos projetos estruturais complexos, a diminuição do custo na construção de uma estrutura é desejada pelos projetistas. Quando isto ocorre, de acordo com OU; KIKUCHI (1996), as estruturas acabam se tornando mais leves, menos rígidas e, conseqüentemente, mais vulneráveis a cargas externas excessivas inesperadas. Como um exemplo de diminuição de custo, tomamos a redução de peso de uma estrutura de um carro, fazendo com que o consumo de combustível para o transporte do mesmo reduza. Outro aspecto que pode-se observar é quanto ao desempenho da estrutura, visto que a redução do peso pode influenciar diretamente em características técnicas de um projeto como, por exemplo, a aceleração de um veículo (HERRMANN et al., 2018).

Entretanto, o problema das estruturas leves e flexíveis é que, quando submetidas a perturbações, estas podem apresentar vibrações indesejadas. Essas vibrações surgem devido ao amortecimento natural dessa estrutura ser normalmente muito baixo, e assim, uma vez que a oscilação começa, pode ocorrer que não consiga suprimir a vibração. Segundo DUBAY et al. (2014), o baixo amortecimento e as baixas frequências naturais podem gerar movimentos vibratórios com amplitudes grandes, que provocam diversas complicações para o projeto. Essas vibrações podem afetar o desempenho do sistema e causar vários problemas mecânicos no mesmo, como, por exemplo, fadiga, desgaste do material, danos estruturais e conseqüentemente, a redução da vida útil da estrutura (DENIS, 2014; HU; NG, 2005). Dessa forma, é mais eficiente projetar essas estruturas simultaneamente com um controle de vibrações, passivo e ativo, para se obter um projeto eficaz.

1.1 Controles passivo e ativo de vibrações

Existem diversas estratégias para o controle de vibrações, sendo elas classificadas em controle passivo e controle ativo, os quais se diferenciam pela necessidade/possibilidade, ou não, de suprir energia ao sistema para que ocorra a atenuação das vibrações (NICOLETTI, 2013). O controle passivo não demanda o uso de energia

adicional. Ao invés disso, são acrescentados ao sistema dispositivos e/ou são empregadas técnicas para absorver, isolar ou dissipar a energia de vibração (PEÑA, 2017). Entre os dispositivos disponíveis para controle passivo, o mais utilizado é o Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS), o qual consiste em adicionar uma massa e uma mola à estrutura a fim de reduzir a resposta dinâmica da mesma. Em decorrência disso, a vibração presente no sistema é dissipada pelo AMS, ou seja, o movimento vibratório é controlado (CHANDRAN; THAMPAN, 2017). Outro método utilizado faz necessária a mudança na geometria da estrutura, sendo introduzidas modificações no projeto da estrutura, retirando material da mesma (ZHAO; PRASAD, 2019). Este método prevê a inserção de buracos prescritos na estrutura em pontos estratégicos, fazendo com que a onda flexural, que são as ondas presentes na viga, ao passar por um buraco, tenha a velocidade reduzida e a amplitude aumentada. Com isso, a vibração fica restrita no interior do buraco e apenas uma pequena parte é refletida para o resto da estrutura. Esse fenômeno foi detalhado por MIRONOV (1988), e mais tarde denominado efeito de “Buraco Negro Acústico” (BNA) por KRYLOV; TILMAN (2004). Essa técnica tem sido amplamente usada nos últimos tempos, pois tem baixo custo para implementação e pode gerar bons resultados na atenuação de vibrações, como mostrado em WEIMANN; DOMINGUES; MOLTER (2021).

De acordo com WALD (1984), na astrofísica, o buraco negro é uma região do espaço-tempo, que é um conjunto de eventos, em que cada evento é um ponto do espaço em um instante de tempo. Assim, a característica mais notável deste espaço-tempo é a criação de um buraco negro, sendo ele, a priori, uma região sem escape. Por outro lado, o BNA é considerado uma estrutura de atraso, permitindo por exemplo, que a velocidade do som diminua gradativamente até zero em um tubo, baseado na diminuição da admitância acústica das paredes do tubo (MIRONOV; PISLYAKOV, 2002). No caso de ondas em estruturas do tipo viga, também é utilizado o termo “buraco negro acústico”, podendo ser explicado devido ao uso da acústica geométrica (KRYLOV; TILMAN, 2004), onde buracos feitos em estruturas, com geometrias específicas, retêm vibrações. Publicações relacionadas aos BNAs podem ser encontradas no artigo de revisão de PELAT et al. (2020), o qual fornece uma perspectiva geral do conhecimento e aplicação do efeito do BNA no contexto acústico estrutural em artigos revisados por pares e publicados durante o período de 1988 a 2020.

Há casos em que, somente o uso do controle passivo não é suficiente para se obter um resultado significativo, sendo necessário acrescentar o controle ativo, o qual requer o uso de energia adicional. De acordo com GUZMÁN; SILVA; RUBIO (2020), o controle ativo requer estruturas inteligentes, que são um conjunto de sensores e atuadores acoplados a uma estrutura através de um sistema de controle ativo. Normalmente, a proposta dessas estruturas inteligentes é gerar um movimento oscilatório contrário ao movimento existente na estrutura, para que assim as vibrações se cancelem, gerando

o controle deste movimento. Assim, o sensor é o elemento que detecta a resposta de vibração, a qual é repassada ao controlador, que a partir de alguma arquitetura implementada, irá gerar um sinal de controle e com base nesse sinal o atuador irá agir. Dessa forma, para produzir um controle ativo, deve-se escolher um atuador adequado e implementar um controlador para o mesmo.

Há vários tipos de atuadores utilizados nos sistemas de controle de vibrações em estruturas, entre eles está o atuador de elastômero dielétrico, que é um filme polimérico que se contrai ou expande eletrostaticamente conforme a tensão elétrica aplicada a ele. Esse material tem um rápido tempo de resposta, e por esse motivo, se mostra eficaz para o controle de vibrações (HIRUTA et al., 2021). Outro atuador muito usado neste tipo de controle é o piezelétrico, sendo empregado na coleta de energia de vibrações ou carga mecânica, sendo eles fixados ou embutidos nos locais onde há maior deformação estrutural. Sua aplicação está em destaque, como pode ser visto em diversos trabalhos no ramo de otimização topológica que o utilizam em estruturas (HE et al., 2021; MOLTER; SANTOS FERNANDEZ; LAUZ, 2018; GONÇALVES; LEON; PERONDI, 2019).

Quando o atuador piezelétrico é conectado à viga, a expansão e a contração do dispositivo produz movimento oscilante na estrutura. O objetivo desse acoplamento é gerar vibrações que se movam em oposição às vibrações da viga e amenizar essas oscilações.

Para a proposta do controlador, a primeira etapa é a escolha da metodologia a ser usada na sua implementação, existindo diversos modelos e lógicas disponíveis nesse âmbito. As arquiteturas mais utilizadas para a atenuação da vibração são as lineares (isto é, as equações são lineares), sendo que, entre suas técnicas usadas para determinar o sinal de controle, está a baseada na realimentação da velocidade, pois sua implementação é de fácil compreensão (MOHAMMADREZAZADEH; JAFARI, 2020). Neste sistema, o sinal que opera o atuador é constituído por uma matriz de ganhos que multiplica o sinal de velocidade que surge do sensor do sistema. Seguindo esse contexto, existem outros tipos de controladores lineares que apresentam a mesma complexidade e estabelecem leis de controle mais precisas, sendo um deles o Regulador Quadrático Linear (RQL)¹. Assim como no outro sistema, neste o sinal de controle também é gerado com base na multiplicação de uma matriz de ganhos, o que difere é que esses ganhos são calculados a partir da otimização de algum índice de desempenho do sistema, como por exemplo, a velocidade do sistema ou a própria energia do sistema (TIAN; GUO; SHI, 2020).

¹Na literatura, geralmente é chamado de LQR, que vêm do inglês Linear Quadratic Regulator.

1.2 Objetivos e organização do trabalho

O emprego de um controle passivo é uma opção para diminuir as vibrações existentes em uma estrutura. Além disso, adicionando um controle ativo na estrutura, tem-se uma redução ainda maior das mesmas. Uma vez aplicado o controle passivo, a energia necessária para a aplicação do controle ativo diminui. Em vista disso, a implementação dos dois tipos de controle concomitantemente se mostra muito promissor para os projetistas estruturais, como já apresentado no trabalho de autoria própria WEIMANN; DOMINGUES; MOLTER (2021).

O uso da técnica dos BNAs nas estruturas é conveniente nesta pesquisa, visto que, é eficiente e de fácil execução. Assim que os buracos são inseridos na estrutura, a energia da onda é concentrada dentro deste buraco, não havendo propagação e reflexão da onda na viga.

Já no controle ativo, a escolha pelo controlador RQL se deu pelo fato de ser uma implementação baseada em uma otimização, visto que este regulador apresenta uma melhor resposta quando comparada com outros controladores. Referente ao atuador, foi selecionado o atuador piezolétrico para ser operado pelo controlador, devido a habilidade de converter energia elétrica em energia mecânica de forma rápida, assim expandindo-se e contraindo-se rapidamente. No contexto de vibrações mecânicas, este é o atuador comumente utilizado para estruturas leves e flexíveis e que operem em frequências mais altas (por exemplo, acima de $20Hz$).

Para resolver o problema de controle, inicialmente modela-se a dinâmica estrutural, sendo ela normalmente, em problemas de mecânica do contínuo, obtida através da resolução de um sistema de equações em derivadas parciais (EDPs). Entretanto, a resolução analítica dessas EDPs pode ser difícil, necessitando assim, técnicas matemáticas que auxiliem neste processo. Um dos métodos numéricos mais utilizados na dinâmica estrutural é o método dos elementos finitos (MEF), pelo qual é feita a discretização do domínio da estrutura dividindo-o em pequenos elementos com uma geometria mais simples. Dessa forma, é possível trabalhar com as leis mecânicas nos elementos locais, e em seguida, associar a contribuição de cada elemento para encontrar o modelo que rege o movimento de toda a estrutura (LIU; QUEK, 2013).

Aliado ao MEF, são usadas outras técnicas, como a superposição modal e a representação em espaço de estados, as quais têm como objetivo, respectivamente, desacoplar as equações do sistema, ajudando nas suas resoluções (KELLY, 2017) e converter o sistema de EDPs, que neste trabalho são de segunda ordem, em um outro sistema, com o dobro de equações, mas de primeira ordem (OGATA, 2014).

1.2.1 Objetivo geral

Simular a dinâmica e o controle de vibrações em estruturas do tipo vigas no *software* MATLAB®, por meio da técnica dos BNAs, como controle passivo, e utilizar um controlador RQL para operar um atuador piezelétrico, como controle ativo.

1.2.2 Objetivos específicos

Como objetivos específicos tem-se os que seguem.

- Modelar a dinâmica estrutural com restrições de domínio.
- Utilizar análise modal na modelagem da dinâmica estrutural.
- Resolver as equações da dinâmica estrutural via MEF.
- Analisar as amplitudes modais das estruturas com buracos prescritos, através da Transformada de Fourier, a fim de verificar a diminuição da amplitude de vibração gerada pela inserção dos buracos.
- Modelar e resolver o problema de controle passivo, utilizando os BNAs.
- Modelar e resolver o problema de controle ativo, juntamente com o passivo, utilizando o controle RQL e atuadores piezelétricos no controle das vibrações estruturais.
- Realizar simulações numéricas e analisar os resultados obtidos.

1.2.3 Estrutura do trabalho

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos, são eles: introdução, dinâmica estrutural, controle de vibrações, resultados e, por fim, conclusões e perspectivas de futuros trabalhos.

Este primeiro capítulo apresentou as ideias que motivam e justificam a realização deste trabalho, além da revisão bibliográfica que busca resgatar e apresentar os trabalhos que dão sustentação à problemática investigada e, por fim, a proposta e seus objetivos foram apresentados na sequência.

O segundo capítulo exibe os fundamentos da piezeletricidade, explanando brevemente o seu conceito e o funcionamento das cerâmicas piezelétricas, que são utilizadas como atuadores no problema proposto. Em seguida são exibidas as equações constitutivas da piezeletricidade e a descrição dos tensores de materiais piezelétricos. Neste mesmo capítulo, é realizada a modelagem da dinâmica estrutural, que faz o uso da análise modal para desacoplar a equação de movimento através de uma transformação de coordenadas, e ainda são vistas propriedades para encontrar relações referentes a massa, rigidez e amortecimento, tornando a equação de movimento mais

simples. Após encontrar a equação de movimento, é exposta uma maneira de resolver o modelo modal, sendo ele representado em espaço de estados. Por fim, a seção termina com uma breve explicação sobre o MEF, apresentando as funções interpoladoras para um elemento com 4 nós e é feita a análise da dinâmica pelo MEF com material piezolétrico.

O controle de vibrações é introduzido no capítulo 3, explicitando o controle passivo (usando o efeito dos BNAs) e o controle ativo (usando como atuador o piezolétrico). Na seção do controle passivo é ilustrado o efeito de um BNA, como também são vistas as equações que governam esse efeito. Na seção destinada ao RQL, é explicado o processo de como implementá-lo num sistema para o controle de vibrações.

Seguindo para o capítulo 4, são apresentados os resultados. Primeiramente, será feita uma comparação entre as frequências obtidas pelo *software* MATLAB® com o *software* COMSOL Multiphysics®, a fim de validar o código implementado para o MEF. Em seguida, será confirmado por meio de simulações numéricas, a teoria dos BNAs, a partir da equação da amplitude da onda encontrada no capítulo anterior, no qual diz que a amplitude da onda aumenta conforme sua espessura diminui. Logo após, são apresentados os resultados provenientes do controle passivo, e assim, é escolhida a melhor configuração do BNA para prosseguir com o controle ativo. Por fim, este capítulo é encerrado com o controle ativo, em que foi implementado o controlador RQL para operar um atuador piezolétrico, juntamente com o controle passivo, e confirmou-se sua eficiência no controle de vibrações. Uma vez encontradas as funções de controle, foi realizada uma análise para diferentes valores das matrizes de peso, com o intuito de verificar sua contribuição na resposta da amplitude.

A finalização do texto se dá no capítulo 5, o qual expõe as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

2 DINÂMICA ESTRUTURAL

Este capítulo está dividido em três seções, as quais apresentam de forma sucinta os aspectos da teoria, conceitos e formalismos matemáticos necessários para descrever a dinâmica da estrutura.

A seção 2.1 inicia com uma breve descrição da história da piezeletricidade, sintetizando sua origem e primeiras aplicações no meio científico. Em sequência são apresentadas as propriedades dos materiais piezelétricos, suas relações constitutivas e a descrição dos tensores materiais. Ainda, considerando o efeito de simetria presente na estrutura de materiais piezelétricos, são apresentadas as relações constitutivas com uma significativa diminuição da quantidade de componentes não nulos dos tensores. Fechando a seção, é descrita a interpretação das propriedades elásticas, piezelétricas e dielétricas do material e ainda a simplificação através da hipótese do estado plano de tensões mecânicas.

A seção 2.2 tem início com a modelagem da dinâmica estrutural, introduzindo a equação de Lagrange para derivar as equações de movimento de um sistema de n graus de liberdade, sendo necessário apresentar os deslocamentos e velocidades, as energias potencial e cinética e a função de dissipação de Rayleigh para inserir na equação Lagrangeana. Em seguida, é utilizada a análise modal, que tem como ideia desacoplar as equações de movimento usando uma transformação de coordenadas. Nesta mesma seção são encontrados os autovalores que, após aplicada a radiciação, representam as frequências naturais (frequência com que a estrutura vibra), e após são obtidos os autovetores que correspondem aos modos naturais (amplitudes com que as vibrações ocorrem). Na sequência é apresentada uma normalização e ortonormalidade, em que são vistas propriedades para encontrar relações referentes a massa, rigidez e amortecimento e tornar as equações de movimento mais simples, e ainda são apresentadas as condições iniciais do problema. Concluindo a seção, expõe-se uma maneira de resolver o modelo modal, que é a representação no espaço de estados, sendo que essa representação consiste em transformar as equações de movimento em um conjunto de equações de primeira ordem.

A seção 2.3 é aberta com uma breve explicação sobre o MEF, ilustrando uma ma-

lha de elementos finitos, contendo as informações presentes em cada elemento da malha. Após, é apresentada a formulação dos deslocamentos e as funções interpoladoras para um elemento com 4 nós, e também será mostrada a relação entre o deslocamento e a deformação. Em seguida, introduz-se o princípio variacional, que é baseado no princípio de Hamilton, para encontrar as equações de movimento via MEF com o acoplamento dos materiais piezelétricos. Por fim, novamente é utilizado a análise modal para facilitar a resolução das equações do movimento.

2.1 Materiais piezelétricos

A palavra piezeletricidade significa diferença de potencial produzida através de pressão mecânica, sendo que o prefixo “piezo” deriva de uma palavra grega que significa pressionar. A primeira publicação científica descrevendo o fenômeno apareceu em 1880, de autoria dos irmãos franceses Pierre e Jacques Curie, os quais estavam conduzindo experimentos em uma diversidade de cristais da época, levando-os a formular a primeira teoria da piezeletricidade. Nesses experimentos, eles classificaram um número de cristais, tais como a turmalina, o quartzo, o topaz, o açúcar de cana e o sal de Rochelle, que apresentavam cargas elétricas superficiais quando estavam mecanicamente tensionados (MOHEIMANI; FLEMING, 2006). Neste mesmo ano, os irmãos Curie descobriram que os materiais piezelétricos possuem a capacidade de gerar uma diferença de potencial elétrico em resposta a uma tensão mecânica aplicada, sendo este efeito denominado efeito direto (figura 1 (a)).

No ano seguinte, a partir de leis fundamentais da termodinâmica, o efeito piezelétrico inverso (figura 1 (b)) foi previsto matematicamente por LIPPMANN (1881), sendo ele o contrário do efeito descoberto por Pierre e Jacques Curie, e sua autenticidade foi confirmada experimentalmente por eles. Portanto, por esse efeito contrário, o material sofre uma deformação mecânica quando colocado em uma diferença de potencial, devido a ação de um campo elétrico (PERLINGEIRO; PIMENTA; SILVA, 2016).

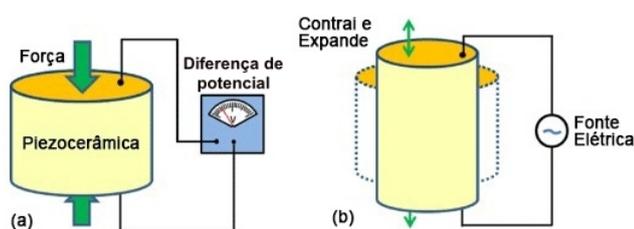


Figura 1: Ilustração do efeito piezelétrico: (a) efeito direto; (b) efeito inverso. Fonte: Adaptado de HAO et al. (2019).

A primeira aplicação significativa de materiais piezelétricos surgiu durante a Primeira Guerra Mundial, aproximadamente 35 anos depois da descoberta dos irmãos Curie, na construção de um sonar ultrassônico composto por placas piezelétricas, do

qual recebe crédito Paul Langevin e seus colegas na França pelo trabalho. Este dispositivo foi utilizado para conduzir um sinal de alta frequência dentro da água, e medir a profundidade por meio do retorno de ecos cronometrados. Com isso, devido ao sucesso da invenção de Langevin, materiais piezelétricos foram utilizados em diversas aplicações, entre elas estão os estabilizadores de frequência para osciladores de tubo de vácuo, sendo que, microfones, transdutores ultrassônicos e acelerômetros foram desenvolvidos e comercializados neste período (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

No decorrer dos anos, foram descobertas propriedades piezelétricas em diversos materiais, como por exemplo, Busch e Scherrer descobriram propriedades piezelétricas no fosfato monopotássico na década de 1930, o qual é um sal solúvel, usado como fertilizante, aditivo alimentar e fungicida. Já Jaffe e seus colegas de trabalho descobriram efeitos piezelétricos no titanato-zirconato de chumbo (PZT) em 1950, e desde então o sistema PZT, incluindo vários aditivos, se tornou a principal cerâmica piezelétrica para uma variedade de aplicações (ZHU, 2010). No final do ano de 1960, cientistas japoneses descobriram que o fluoreto de polivinilideno, que é um polímero de notável resistência química, contava com altas propriedades piezelétricas após polarização em alta temperatura e pressão (HU et al., 2018).

Por fim, na década de 1980 foram desenvolvidas cerâmicas de niobato de chumbo e magnésio (HAERTLING, 1999) e, no início dos anos 2000, alguns estudos mostraram que os coeficientes piezelétricos em cristais de titanato de chumbo, niobato de chumbo, e magnésio ultrapassavam 1.500 pC/N (ZHANG et al., 2018).

2.1.1 Cerâmicas piezelétricas

Uma cerâmica piezelétrica é um policristal com célula básica não-centrossimétrica que, de acordo com HAO et al. (2019), as que apresentam as melhores propriedades são as que cristalizam em uma estrutura do tipo perovskita. Este tipo de estrutura é um mineral amarelo, marrom ou preto, primeiramente denominado óxido de titânio de cálcio, sendo que sua fórmula química é CaTiO_3 , e após Lev Perovski descobri-lo em 1792, nomeou-se oficialmente como perovskita. Os compostos de perovskita têm fórmula genérica ABX_3 , em que A e B são cátions de tamanhos diferentes (geralmente os átomos A são maiores que os átomos B) e X é um ânion ligado a ambos, sendo normalmente oxigênio (ASSIREY, 2019). Na figura 2, tem-se a representação de uma estrutura perovskita do tipo ABO_3 .

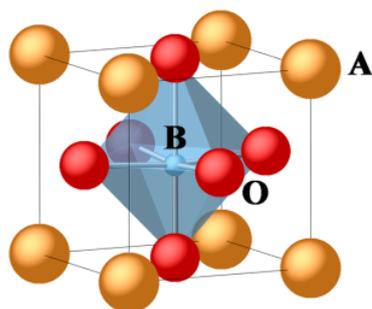


Figura 2: Célula unitária de uma estrutura perovskita. Fonte: HAO et al. (2019).

Conforme ASSIREY (2019), a viabilidade do material perovskita de combinar vários componentes substituindo parcialmente os cátions nas posições A e B melhorou várias características importantes, tais como propriedades dielétricas, ópticas, ferroeletricidade, supercondutividade, piezeletricidade, entre outras.

Os cristais da estrutura têm direção de polarização aleatória e o elemento cerâmico não tem polarização, conforme ilustra a figura 3 (a). Assim, para que os cristais tenham a mesma direção (figura 3 (b)), eles são expostos a um forte campo elétrico. Após esse processo, chamado de polarização, os cristais quase alinhados com o campo expandem-se e o elemento cerâmico dilata-se na direção do campo, então, o campo elétrico é removido e a polarização permanece com leves alterações (figura 3 (c)) ((MOHEIMANI; FLEMING, 2006)).

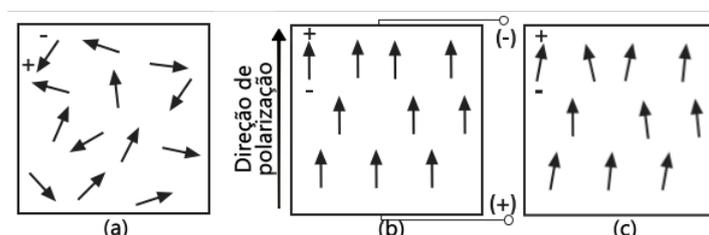


Figura 3: Processo de polarização de cerâmicas. Fonte: Adaptado de MOHEIMANI; FLEMING (2006).

As propriedades de uma cerâmica piezolétrica polarizada podem ser explicadas, de acordo com MOHEIMANI; FLEMING (2006), pela figura 4. Essa cerâmica se deforma quando submetida à estimulação elétrica e gera uma diferença de potencial quando submetida à ação mecânica. Dessa forma, para as próximas análises, leva-se como base a figura 4 (a).

Quando uma força atua na direção da polarização para comprimir a estrutura (e, portanto, torná-la um pouco mais baixa e larga, conforme figura 4 (b)), é gerada uma tensão com a mesma polaridade da cerâmica. Quando há uma tensão mecânica na direção de polarização (tornando a estrutura um pouco mais alta e fina, como mostra a figura 4 (c)), uma tensão elétrica na direção de polaridade oposta é gerada. No momento que uma tensão elétrica for aplicada à cerâmica, uma deformação na

estrutura vai ocorrer, o qual depende do sentido da polaridade da tensão elétrica. A compressão ou alongamento da estrutura é descrita em termos do coeficiente de Poisson do material. Se a polaridade da tensão elétrica for na mesma direção de polaridade da cerâmica, então ela irá alongar e seu diâmetro diminuir (figura 4 (d)), por outro lado, se a polaridade da tensão elétrica for no sentido oposto, então a cerâmica vai se tornar mais curta e mais larga (figura 4 (e)) (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

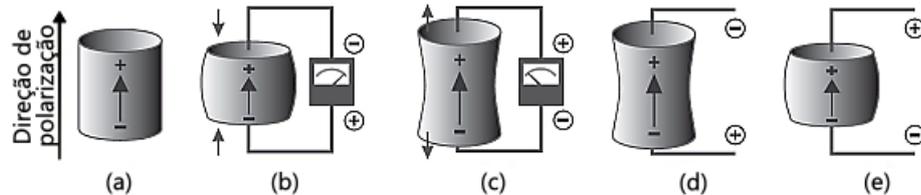


Figura 4: Propriedade da cerâmica piezoeétrica. Fonte: Adaptado de MOHEIMANI; FLEMING (2006).

Essas cerâmicas piezoeétricas podem ser usadas em sensores (convertendo energia mecânica em energia elétrica) ou em atuadores (convertendo energia elétrica em energia mecânica). O transdutor funcionando como um atuador piezoeétrico pode assumir várias formas: em ZHU (2010), ZHANG; TAKEZAWA; KANG (2017) e HU; ZHANG; KANG (2018) é utilizada a forma de uma placa ou em pilhas, em que várias camadas de material piezoeétrico são empilhadas sobre os eletrodos.

2.1.2 Equações constitutivas

De acordo com MORSCH; AWRUCH; LINN (2018), o problema da elasticidade linear estática é definido pelas equações de equilíbrio, relações de compatibilidade de deformações, lei de Hooke generalizada (relação constitutiva entre tensão e deformação) e condições de contorno. No caso de problemas dinâmicos, emprega-se a equação de movimento e algumas condições iniciais para os componentes de deslocamento e velocidade ainda precisam ser atendidas. Na medida em que a tensão no sólido depender somente da deformação, isto é, após a aplicação da carga o sólido voltar a sua forma inicial, o material é elástico (figura 5 (a)-(b)). Um mesmo material pode passar por diferentes efeitos de acordo com o tipo da relação entre a tensão e a deformação, que pode ser uma função linear ou não, e ainda, se o sólido não retorna a sua forma inicial, diz-se que o material sofreu deformação plástica (figura 5 (c)), e a tensão não depende somente da deformação. Na teoria da elasticidade linear a equação (ou relação) constitutiva é a Lei de Hooke generalizada.



Figura 5: Curvas de tensão-deformação para diferentes materiais. Fonte: Adaptado de MASE; SMELSER; MASE (2010).

Estendendo esses conceitos para problemas piezelétricos lineares, são adicionadas novas variáveis, equações e condições relacionadas à fenômenos de natureza elétrica. Assim, além de estarem relacionadas a componentes específicos de tensões e deformações, as relações constitutivas também envolverão componentes de campo elétrico e componentes de deslocamento elétrico.

De acordo com YANG (2005), as equações de movimento e carga que descrevem a teoria da piezeletricidade são, respectivamente:

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \ddot{q}_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \rho_e, \quad (2)$$

sendo ρ a densidade de massa, f_i a força de corpo por unidade de massa, q o vetor de deslocamento mecânico e ρ_e é a densidade das cargas livres.

Nas relações expressas abaixo, as variáveis tensão mecânica e campo elétrico são forças a serem aplicadas nas cerâmicas piezelétricas, já a deformação mecânica e o deslocamento elétrico são os resultados diretos da aplicação dessas forças (FERNANDEZ, 2015). Dessa forma, uma fórmula mista pode ser obtida, onde as variáveis independentes são E e S , e as variáveis dependentes são T e D , que estão relacionadas à equação constitutiva representadas da seguinte maneira:

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (3)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik} E_k, \quad (4)$$

onde T_{ij} , D_i , S_{kl} e E_k são, respectivamente, componentes do tensor de tensões mecânicas, do vetor de deslocamento elétrico, do tensor de deformações mecânicas e do vetor de campo elétrico. Os coeficientes c_{ijkl}^E , e_{kij} , ϵ_{ik} são as propriedades elásticas, piezelétricas e dielétricas¹, respectivamente.

¹Essa constante influencia no acúmulo de cargas de um capacitor. Quanto maior for essa constante em um meio, maior será a sua capacidade de acumular cargas para uma determinada diferença de potencial.

Dentro do meio piezelétrico, o campo elétrico é derivado de um potencial elétrico ϕ , que pode ser descrito pela seguinte equação:

$$E_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k}. \quad (5)$$

O problema proposto, além de satisfazer essas equações (1)-(5), precisa satisfazer condições de contorno (e iniciais no caso de um problema dinâmico).

2.1.3 Descrição dos tensores e notação matricial

A fim de determinar a solução para o problema de vibrações, devemos conhecer as matrizes de coeficientes materiais para a simetria específica do material que estamos considerando. Ao analisar a simetria, a representação matricial compacta é mais adequada do que a representação do tensor expandido (TIERSTEN, 1969), por levar em consideração somente os termos representativos dos tensores.

Se c_{ijkl}^E são componentes de um tensor isotrópico de quarta ordem, então tem-se que:

$$c_{ijkl}^E = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \iota \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (6)$$

onde α , β e ι são escalares, então c_{ijkl}^E são componentes de um tensor isotrópico. No caso de se considerar a lei de Hooke para materiais isotrópicos, β e ι são iguais (vide CHANDRASEKHARIAH; DEBNATH (1994), página 365).

Assim, de acordo com CHANDRASEKHARIAH; DEBNATH (1994), δ_{ij} são componentes de segunda ordem de um tensor isotrópico, tendo como relação:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (7)$$

os componentes $\delta_{ij} \delta_{kl}$, $\delta_{ik} \delta_{jl}$ e $\delta_{il} \delta_{jk}$ também são isotrópicos, agora de quarta ordem.

As grandezas envolvidas nas equações (3) e (4) permitem que os índices sejam reduzidos de forma que possam ser representados por vetores e matrizes compactadas (YANG, 2005). Considerando a natureza tensorial das equações (3) e (4), essa simplificação visa facilitar o processamento dessas equações, e é realizada pela equivalência entre as notações tensoriais, conforme mostrado na tabela 1.

Tabela 1: Equivalência entre a notação tensorial e reduzida.

| ij ou kl | p ou q |
|--------------|------------|
| 11 | 1 |
| 22 | 2 |
| 33 | 3 |
| 23 ou 32 | 4 |
| 31 ou 13 | 5 |
| 12 ou 21 | 6 |

Portanto, esta notação reduzida consiste em substituir os índices ij e kl por p e q , respectivamente, como estabelecido na tabela 1. Assim, as relações constitutivas das equações (3) e (4), na notação matricial compacta, podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$T_p = c_{pq}^E S_q - e_{kp} E_k \quad (8)$$

e

$$D_i = e_{iq} S_q + \epsilon_{ik} E_k. \quad (9)$$

Considerando que i, j, k e l assumem os valores 1, 2 e 3, e os índices p e q admitem os valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6, uma vez que todas as constantes são descritas por dois índices, é possível escrever as equações (8) e (9) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

e

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

De acordo com IEEE STANDARD ON PIEZOELECTRICITY (1988), dependendo da simetria do material, muitos dos componentes do tensor de propriedades das equa-

ções acima são zero ou podem ser escritas em função de outras componentes.

Os materiais piezelétricos são pelo menos transversalmente isotrópicos, que é o tipo mais simples de anisotropia, pois há isotropia nos planos ortogonais à direção de anisotropia (o eixo ao longo do qual as propriedades mudam). Para materiais hexagonais com anisotropia na direção 3, considerando o efeito de simetria, podem ser reduzidas as 21 propriedades do tensor elástico, 18 propriedades do tensor piezelétrico e 9 propriedades do tensor dielétrico para 5, 3 e 2 propriedades, respectivamente (FERNANDEZ, 2015). Desse modo, as matrizes de constantes elástica, piezelétrica e dielétrica são dadas, nesta ordem, por:

$$c_{pq}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix}, \quad (12)$$

com $c_{66}^E = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$;

$$e_{kp} = e_{iq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

e

$$\epsilon_{ik} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Os valores das propriedades elásticas, piezelétricas e dielétricas dependem do material piezelétrico utilizado.

2.1.4 Constantes elásticas, piezelétricas e dielétricas do material

Conforme as normas de piezeletricidade propostas em 1988 pelo IEEE (*The Institute of Electrical and Electronics Engineers*), o qual é amplamente aceito como sendo uma boa representação das propriedades destes materiais, os valores das constantes utilizadas nas relações constitutivas são obtidos através de amostras e técnicas experimentais (IEEE STANDARD ON PIEZOELECTRICITY, 1988).

A interpretação dos três tipos de constantes, sendo elas elástica (c^E), piezelétrica (e) e dielétrica (ϵ), é apresentado por MOHEIMANI; FLEMING (2006). A constante elástica c_{ij}^E é dada pela razão entre a tensão na direção j (desde que não ocorra mudança de tensão nas outras duas direções) e a deformação na direção i . A constante

piezométrica e_{ij} é dada pela razão entre o campo elétrico aplicado ao longo do eixo i (desde que as tensões se mantenham constantes) e a deformação na direção j . Por fim, a constante dielétrica ϵ_{ij} determina a carga por unidade de área no eixo i devido a ação de um campo elétrico aplicado ao longo do eixo j . Os índices 1 à 3 indicam tensões e deformações na direção normal, enquanto que os índices 4 à 6 indicam tensões e deformações por cisalhamento.

2.1.5 Estado plano de tensão

Como hipótese mecânica, considera-se que a componente normal do tensor de tensões na direção da espessura (eixo 3) de um ponto qualquer da superfície deve ser nula durante todo o movimento, admitindo nesse caso um estado plano de tensões:

$$T_3 = T_5 = T_6 = 0 \quad \text{e} \quad D_3 = 0. \quad (15)$$

Essa suposição permite tratar o problema em duas dimensões, de modo que após modificar as matrizes das equações constitutivas piezométricas (10) e (11), a seguinte equação matricial é obtida no estado plano de tensão mecânica (FERNANDEZ, 2015):

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_4 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} & c_{12}^E - \frac{c_{12}^E c_{13}^E}{c_{33}^E} & 0 & 0 & e_{31} - \frac{e_{31} c_{12}^E}{c_{11}^E} \\ c_{12}^E - \frac{c_{12}^E c_{13}^E}{c_{11}^E} & c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} & 0 & 0 & e_{33} - \frac{e_{31} c_{13}^E}{c_{11}^E} \\ 0 & 0 & c_{66} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} & -\epsilon_{11} & 0 \\ e_{31} - \frac{e_{31} c_{12}^E}{c_{11}^E} & e_{33} - \frac{e_{31} c_{13}^E}{c_{11}^E} & 0 & 0 & -\epsilon_{33} - \frac{e_{31}}{c_{11}^E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_4 \\ -E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

2.2 Dinâmica com análise modal

O comportamento dinâmico é causado por vibrações na estrutura, podendo elas serem vibrações livres (provocadas pelas condições iniciais de deslocamento e velocidade) ou vibrações forçadas (geradas por ações externas ao longo do tempo).

Nesta seção, será abordada a formulação matemática dos problemas de dinâmica estrutural, e para isso utilizaram-se alguns textos como base. A modelagem da dinâmica estrutural e a análise modal têm como base os livros: MEIROVITCH (2001) seções 7.4 à 7.8, CLAEYSSSEN; GALLICCHIO; TAMAGNA (2004) seção 3.2, BALACHANDRAN; MAGRAB (2011) seção 8.3 e subseções 3.5.3 e 7.2.3, GAWRONSKI (2004) subseção 2.2.2 e MENDONÇA; FANCELLO (2019) subseções 19.2.3 e 19.6.3.

2.2.1 Modelagem da dinâmica estrutural

A equação que representa a forma geral de Lagrange para um sistema de n graus de liberdade é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k, \quad (17)$$

em que \mathcal{K} é a energia cinética, V a energia potencial, q_k são coordenadas generalizadas (grandeza física, como comprimento ou ângulo), \dot{q}_k são as velocidades generalizadas, e Q_k são forças generalizadas não conservativas (externas), que atuam sobre o k -ésimo elemento inercial. O número de coordenadas generalizadas de um sistema é sempre igual ao seu número de graus de liberdade. A energia cinética e potencial têm a forma funcional geral, respectivamente:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n), \quad (18)$$

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (19)$$

As forças não conservativas generalizadas podem ser obtidas a partir da expressão de trabalho virtual:

$$\overline{\delta W}_{nc} = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k, \quad (20)$$

no qual δq_k são deslocamentos virtuais generalizados.

Quando tenta-se aplicar a equação (17) a um sistema com amortecimento viscoso², o qual é o mecanismo de amortecimento mais usado em análise de vibrações, encontra-se rapidamente dificuldades, pois esta equação não considera explicitamente as forças de amortecimento viscoso. Essas forças podem estar subentendidas na força não conservativa generalizada, sendo composta por uma parte que contém um potencial generalizado e uma parte que não admite um potencial generalizado. Com isso, a força de amortecimento viscosa pode ser explicada no contexto da equação de Lagrange, expressa da seguinte forma:

$$Q_{kvisc} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}, \quad (21)$$

sendo \mathcal{F} uma função das velocidades generalizadas, conhecida como função de dissipação de Rayleigh. Portanto, assumindo que as forças generalizadas Q_k incluem todas as forças não conservativas, com exceção das forças viscosas, a equação de

²Refere-se a qualquer forma de amortecimento no qual a força de atrito é proporcional à velocidade. Amortecedores viscosos são integrados ao sistema mecânico gerando um termo linear à equação diferencial (KELLY, 2017).

Lagrange pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k + Q_{kvisc},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k. \quad (22)$$

Em geral, essas equações de Lagrange são não lineares, porém, para analisarmos as vibrações, assume-se que o deslocamento do equilíbrio é suficientemente pequeno para que os termos não lineares possam ser desprezados. Dessa forma, os deslocamentos são descritos na forma da equação (23) e as velocidades, seguindo a equação do deslocamento, satisfaz a equação (24), respectivamente:

$$q_k = q_{ek} + \tilde{q}_k(t) \quad (23)$$

e

$$\dot{q}_k(t) = \dot{\tilde{q}}_k(t), \quad (24)$$

no qual as constantes q_{ek} são os deslocamentos generalizados quando o sistema está em equilíbrio e $\tilde{q}_k(t)$ são pequenas perturbações do equilíbrio. As equações (23) e (24) compreendem as chamadas suposições de pequenos movimentos, sendo esses movimentos fechados em torno de um dado ponto de equilíbrio.

Reconhecendo que a energia cinética é quadrática em velocidades, tem-se:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j, \quad (25)$$

sendo m_{ij} coeficientes simétricos de massa. De forma análoga, a energia potencial é:

$$V = V(q_e) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q=q_e} \tilde{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} \tilde{q}_i \tilde{q}_j, \quad (26)$$

em que k_{ij} são coeficientes simétricos de influência da rigidez, e $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ e $q_e = [q_{e1}, q_{e2}, \dots, q_{en}]^T$.

Além disso, a força de amortecimento viscosa é uma função linear da velocidade, de modo que a função de dissipação de Rayleigh inclui apenas o termo de segunda ordem na velocidade. Assim, a função de dissipação de Rayleigh tem a seguinte forma:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j, \quad (27)$$

no qual c_{ij} são coeficientes simétricos de amortecimento constante.

A fim de encontrar a equação que rege o movimento da estrutura, substitui-se as

equações (25)-(27) na equação (22), e ainda, levando em consideração as expressões (23) e (24), tem-se:

$$\sum_{j=1}^n (m_{kj}\ddot{q}_j + c_{kj}\dot{q}_j + k_{kj}q_j) + \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{q=q_e} = Q_k. \quad (28)$$

Agora, para considerar sistemas vibratórios lineares, é necessário separar o termo constante dos termos lineares apresentados na equação (28), de forma que restem somente termos lineares. Dessa forma, a equação de equilíbrio (que satisfaz a condição de obter somente termos lineares na equação (28)), é:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{q=q_e} = 0, \quad (29)$$

assim, o balanço do termo (29) representa uma equação linear sobre o equilíbrio

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j) = Q_i, \quad (30)$$

em que substituí-se o índice k por i e reescreve-se m_{ij} , c_{ij} e k_{ij} da seguinte maneira:

$$M = [m_{ij}], \quad C = [c_{ij}], \quad K = [k_{ij}]. \quad (31)$$

Levando em conta os termos apresentados em (31), a equação (30) pode ser escrita na forma matricial:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q, \quad (32)$$

sendo M , C e K matrizes de massa, amortecimento e rigidez de tamanhos $n \times n$, respectivamente, Q um vetor de forças não conservativas generalizadas de tamanho $n \times 1$ e q o vetor que representa os deslocamentos de ordem $n \times 1$.

A energia cinética é expressa na forma quadrática matricial, e a equação (25) pode ser expressa como:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q}. \quad (33)$$

A função de dissipação de Rayleigh, seguindo a mesma ideia, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\dot{q}^T C \dot{q}, \quad (34)$$

e ainda, ignorando o termo constante $V(q_e)$ na equação (26), por somente causar uma translação na função de energia potencial, e considerando as equações de equilíbrio (29), a energia potencial sobre o equilíbrio tem a forma quadrática da matriz:

$$V = \frac{1}{2}q^T K q. \quad (35)$$

Como todas as formas quadráticas, as matrizes de coeficientes M , C e K são simétricas. Além disso, o vetor de força não conservativa generalizada Q , excluindo a força de amortecimento viscosa, é definido pelo trabalho virtual:

$$\overline{\delta W}_{nc} = Q^T \delta q. \quad (36)$$

Quando a equação que rege o movimento da estrutura é obtida, é necessário encontrar sua solução através de algum método. Entretanto, isso não é tão simples quando o modelo matemático é extenso e complexo, sendo então, indispensável a utilização de representações matemáticas que facilitem a resolução, como também, o uso de métodos numéricos. Dessa forma, a seguir serão apresentados duas ferramentas importantes na simplificação do modelo da equação (32), sendo elas a transformação para o modelo modal e a representação de modelos matemáticos em espaço de estados.

2.2.2 Análise modal

De maneira geral, a equação (32) é um sistema acoplado de equações, onde cada equação depende de várias variáveis (que são os graus de liberdade), e uma das maneiras de resolvê-lo é desacoplá-las utilizando uma transformação de coordenadas apropriadas. Esse desacoplamento fará com que cada equação dependa somente de uma variável. Como essas coordenadas são independentes, o resultado da transformação do sistema na equação (32) irá ter somente equações diferenciais independentes umas das outras, levando a uma série de propriedades úteis que simplificam a análise.

Considerando um sistema de n graus de liberdade, com vibrações livres ($Q = 0$) e sem amortecimento ($C = 0$), levando em conta simplificações sem perda de generalidade, a equação diferencial de movimento (32) pode ser escrita na forma:

$$M\ddot{q} + Kq = 0. \quad (37)$$

Esse tipo de sistema de equações diferenciais admite uma solução harmônica, que é uma função complexa, da forma:

$$q = \psi e^{i\omega t}, \quad (38)$$

em que ψ é um vetor chamado modo natural de vibração, ω são as frequências naturais da vibração correspondentes ao modo natural de vibração, i é a unidade imaginária e t é o tempo.

Substituindo a solução (38) na equação (37), tem-se:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2}{dt^2}(\psi e^{i\omega t}) + K \psi e^{i\omega t} &= 0, \\ -M\omega^2 \psi e^{i\omega t} + K \psi e^{i\omega t} &= 0, \\ (K - \omega^2 M) \psi e^{i\omega t} &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Como $e^{i\omega t}$ nunca é zero para qualquer valor real de t , da equação (39) tem-se:

$$(K - \omega^2 M) \psi = 0, \quad (40)$$

sendo que esta equação descreve um sistema de equações lineares algébricas homogêneas para as componentes de ψ , e portanto, a solução deste problema, sem ser a solução trivial ($\psi = 0$), é quando:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0, \quad (41)$$

que vai resultar em um problema de autovalor e autovetor. Os autovalores são os valores encontrados para ω^2 na resolução da equação (41), isto é, as raízes da expressão polinomial gerada após aplicar o determinante. Já os autovetores são os vetores ψ associados aos autovalores, ou seja, são os vetores obtidos quando aplica-se os valores de ω^2 da equação (41) na equação (40). Os valores de ω são denominados de frequências naturais e descrevem as frequências com que a estrutura vibra. Os autovalores associados são chamados de modos naturais e estão associados às amplitudes com que essas vibrações ocorrem.

Normalmente, a frequência natural será um número real e positivo, e o número de frequências naturais (e modos de vibração correspondentes) é igual ao número de graus de liberdade do modelo (este número será a ordem das matrizes de massa e rigidez). Organizando as frequências em ordem crescente, denomina-se de frequência fundamental a menor frequência natural apresentada, e conseqüentemente, o modo de vibração associado é chamado de modo de vibração fundamental.

Como o método mais conveniente para solucionar o problema é utilizar o modelo modal, considera-se a quantidade de n primeiros modos de vibração, conforme a ordem crescente das frequências naturais. Assim, pode-se reunir os modos em uma única matriz, denominada matriz modal, sendo que o número de linhas da matriz modal corresponde ao número de graus de liberdade, e também, o número de colunas corresponde aos modos de vibração considerados. Esta matriz é representada da seguinte maneira:

$$\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots, \psi_n], \quad (42)$$

no qual ψ_n é o vetor correspondente ao n -ésimo modo natural de vibração e ψ_i representa o modo natural de vibração a ser considerado. Após a construção da matriz modal, é possível obter o modelo modal da estrutura utilizando uma substituição de coordenadas da seguinte forma:

$$q = \Psi d, \quad (43)$$

em que Ψ é a matriz de transformação, sendo ela uma matriz quadrada não singular constante. A matriz Ψ pode ser considerada um operador que transforma o vetor d no vetor q .

Como Ψ é constante, também temos que:

$$\dot{q} = \Psi \dot{d}, \quad \ddot{q} = \Psi \ddot{d}, \quad (44)$$

de maneira que Ψ conecta os vetores de velocidade \dot{d} e \dot{q} e os vetores de aceleração \ddot{d} e \ddot{q} .

Aplicando a substituição de coordenadas (43) e (44) na equação (32), e considerando o amortecimento e a força externa (sabendo que o resultado não perde a generalidade), tem-se:

$$M\Psi\ddot{d} + C\Psi\dot{d} + K\Psi d = Q. \quad (45)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (45) por Ψ^T , obtém-se o modelo modal:

$$\Psi^T M\Psi\ddot{d} + \Psi^T C\Psi\dot{d} + \Psi^T K\Psi d = \Psi^T Q. \quad (46)$$

2.2.2.1 Normalização e ortonormalidade

Com o intuito de simplificar a expressão (46), utilizam-se propriedades dos autovetores e autovalores que são apresentadas por MENDONÇA; FANCELLO (2019).

De início, define-se um produto escalar, também conhecido como produto interno entre dois vetores, sendo a definição de comprimento ou norma $\|\psi^r\|$ de um vetor ψ^r , dado por:

$$\|\psi^r\| = \sqrt{\psi^r \cdot \psi^r} = \sqrt{\psi^{rT} M \psi^r}. \quad (47)$$

Como o termo dentro do radical não pode ser negativo para todo ψ^r , pois não há como interpretar um comprimento complexo, o valor apresentado na equação (47) pode ser definido como uma constante de peso sempre positiva.

Supondo um autopar $(\omega; \psi^r)$ encontrado através do problema (40) que satisfaça:

$$[K - \omega M]\psi^r = 0, \quad (48)$$

e multiplicando as n equações por uma constante escalar qualquer h_e , temos a equa-

ção (48) na forma:

$$[K - \omega M](h_e \psi^r) = 0, \quad (49)$$

na qual $h_e \psi^r$ também é um autovetor, o que mostra que qualquer combinação linear de autovetores ψ^r satisfaz a equação (48). Após a determinação de cada autovetor realiza-se a normalização pela matriz de massa, ou seja, calcula-se sua norma por (47) e faz-se:

$$\bar{\psi}^r = \frac{1}{\sqrt{\psi^{rT} M \psi^r}} \psi^r. \quad (50)$$

Com isso, é possível confirmar que $\bar{\psi}^r$ tem norma unitária, isto é,

$$\bar{\psi}^{rT} M \bar{\psi}^r = 1. \quad (51)$$

Portanto, utilizando a matriz modal (42), a relação de ortonormalidade (51) pode ser escrita na forma matricial:

$$\Psi^T M \Psi = I, \quad (52)$$

onde I é a matriz identidade de ordem $n \times n$.

Considerando agora o mesmo autopar $(\omega; \psi^r)$ de (40), tem-se:

$$(K - \omega M)\psi = 0,$$

$$K\psi - \omega M\psi = 0,$$

e utilizando a matriz modal (42), pode-se escrever na forma matricial:

$$K\Psi = M\Psi\Omega, \quad (53)$$

sendo Ω é a matriz diagonal composta pelos autovalores:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad (54)$$

sendo ω_n as frequências naturais em relação ao n -ésimo modo de vibração e ω_i são as frequências naturais a serem consideradas.

Multiplicando a expressão (53) por Ψ^T , obtém-se:

$$\Psi^T K \Psi = \Psi^T M \Psi \Omega, \quad (55)$$

com isso, devido à ortonormalidade dos autovetores em relação à matriz de massa (52), simplifica-se o lado direito de (55) e tem-se:

$$\Psi^T K \Psi = \Omega. \quad (56)$$

Por fim, considerando o amortecimento de forma a utilizar uma combinação linear entre a massa e a rigidez, tem-se:

$$C = \alpha_0 M + \alpha_1 K, \quad (57)$$

que é a expansão de Rayleigh. Utilizando as relações de ortonormalidade da matriz modal Ψ :

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \Psi^T C \Psi, \\ \underline{C} &= \Psi^T (\alpha_0 M + \alpha_1 K) \Psi, \\ \underline{C} &= \alpha_0 \Psi^T M \Psi + \alpha_1 \Psi^T K \Psi, \\ \underline{C} &= \alpha_0 I + \alpha_1 \Omega, \end{aligned} \quad (58)$$

podendo-se afirmar que \underline{C} é diagonal.

Agora, introduzindo o amortecimento matricial crítico, através da relação (MENDONÇA; FANCELLO, 2019):

$$2\zeta\Omega = \alpha_0 I + \alpha_1 \Omega, \quad (59)$$

e sabendo da equação (58) que $\underline{C} = 2\zeta\Omega$ é diagonal, pode-se representar \underline{C}_{ii} em termos do amortecimento modal, como a seguinte matriz:

$$Z = 2 \begin{bmatrix} \zeta_1 \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_i \omega_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_n \omega_n \end{bmatrix}, \quad (60)$$

onde ζ_n representa o amortecimento em relação ao n -ésimo modo de vibração e ζ_i representa o amortecimento a ser considerado.

Portanto, levando em consideração as equações (52), (56) e (60), é possível reescrever o modelo modal (45) da seguinte maneira:

$$\ddot{d} + Z\dot{d} + \Omega d = \underline{Q}, \quad (61)$$

sendo $Z = \text{diag}(2\zeta_i \omega_i)$, $\Omega = \text{diag}(\omega_i^2)$ e $\underline{Q} = \Psi^T Q$.

A equação (61) é mais simples de ser resolvida numericamente quando comparada à equação (32), visto que a solução continua contendo a mesma quantidade de variáveis, entretanto não é necessário considerar todos os modos de vibração (indiferente dos graus de liberdade). Outro fato que facilita a resolução na forma modal, diz respeito as matrizes Z e Ω , pois são matrizes diagonais, fazendo com que o sistema de equações diferenciais de segunda ordem esteja desacoplado.

As condições iniciais em coordenadas modais podem ser obtidas pelos valores dos deslocamentos $q(0)$ e velocidades $\dot{q}(0)$ (RAO, 2009), na forma:

$$d(0) = \Psi^T M q(0), \quad (62)$$

$$\dot{d}(0) = \Psi^T M \dot{q}(0). \quad (63)$$

Após resolver o problema (61) com as condições iniciais (62) e (63), pode-se determinar os deslocamentos reais através da equação (43).

2.2.3 Representação em espaço de estados

Uma possibilidade para resolver o modelo modal é utilizar a representação em espaço de estados, o qual consiste no procedimento de solução padrão da teoria das equações diferenciais ordinárias, em que a equação (61) é reescrita como um conjunto de equações de primeira ordem, cujo formato é denominado de espaço de estados.

Assim, introduzindo novos vetores y_1 e y_2 , definidos por:

$$\begin{aligned} y_1 &= d, & \dot{y}_1 &= \dot{d}, \\ y_2 &= \dot{d} = \dot{y}_1, & \dot{y}_2 &= \ddot{d}, \end{aligned} \quad (64)$$

pode-se reescrever a equação (61) como:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 + Z y_2 + \Omega y_1 &= \underline{Q}, \\ \dot{y}_2 &= \underline{Q} - Z y_2 - \Omega y_1. \end{aligned} \quad (66)$$

Na forma de espaço de estados, as variáveis do vetor de estados (τ) são os deslocamentos ($\tau = [y_1 \ y_2]^T$) e as velocidades modais ($\dot{\tau} = [\dot{y}_1 \ \dot{y}_2]^T$), assim, a equação (61) é representada na forma de estado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega & -Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{Q} \end{bmatrix}, \quad (67)$$

sendo 0 a matriz nula com ordem igual a n e o sistema em espaço de estados passa

a ter ordem $2n$.

2.3 Análise da dinâmica pelo MEF com material piezoeletrico

De acordo com LIU; QUEK (2013), o princípio do MEF tem como objetivo encontrar uma solução aproximada da distribuição das variáveis no domínio do problema que são de difícil obtenção analítica. Esse processo é feito discretizando o domínio em pequenos pedaços, chamados de elementos finitos (sendo que o conjunto de todos os elementos forma a malha de elementos finitos). Dessa maneira, a ideia é analisar a equação de equilíbrio para cada elemento, obtendo a equação local e após, associar a contribuição de cada elemento em uma equação global.

Para problemas relacionados com estruturas de tipo viga, cujo domínio é idealmente retangular, os elementos utilizados também podem ser retangulares. A figura abaixo mostra um exemplo de um domínio retangular:

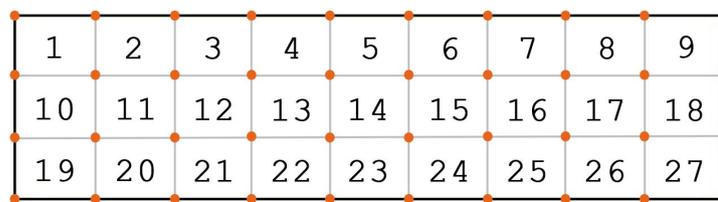


Figura 6: Exemplo de uma malha de elementos finitos.

Neste trabalho, está sendo utilizada uma malha de elementos retangulares. O domínio é dividido em m linhas e n colunas, totalizando $m \times n$ elementos, e os vértices dos elementos finitos são calculados como $(m + 1) \times (n + 1)$, sendo denominados pontos nodais (ou nós), e são nesses pontos que os deslocamentos são calculados pelo MEF (SORIANO, 2009). Portanto, o domínio da imagem acima (figura 6) está dividido em 3 linhas de elementos e 9 colunas de elementos, totalizando 27 elementos e 40 nós (destacados em laranja).

Uma ferramenta importante do MEF é usar funções interpoladoras para normalizar elementos por meio de mudanças de coordenadas. Isto é, um elemento de tamanho $a \times b$ possui os nós (vértices do retângulo) nos pontos $(-a/2, -b/2)$, $(-a/2, b/2)$, $(a/2, -b/2)$, $(a/2, b/2)$ e, após a alteração do sistema de coordenadas, ele passará a ter os nós nos pontos $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$. A figura a seguir apresenta um elemento retangular de dimensões $a \times b$, e o mesmo elemento após a transformação nas coordenadas (ξ, η) .

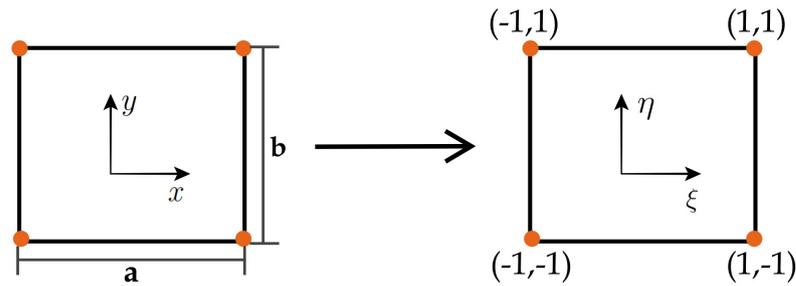


Figura 7: Mudança de coordenadas de um elemento finito.

Os elementos discretizados, cujo domínio é denominado Ω_e , possuem quatro nós em cada elemento. Em cada nó tem-se três graus de liberdade (dois elásticos e um elétrico), sendo eles: o movimento horizontal do nó (x_{ij}) e o movimento vertical do nó (y_{ij}) e ainda uma tensão elétrica aplicada (ϕ_{ij}), conforme ilustra a figura 8.

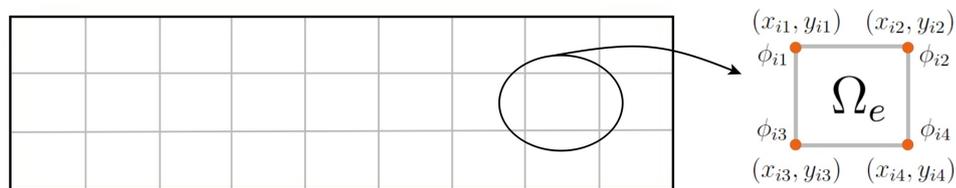


Figura 8: Informações contidas em cada elemento da malha de elementos finitos.

2.3.1 Formulação dos deslocamentos

O deslocamento de um ponto, em casos bidimensionais, é dado por um vetor de duas componentes:

$$q_e = \begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix}, \quad (68)$$

sendo que cada componente indica o deslocamento em uma das direções.

Através de funções de interpolação, o deslocamento em uma direção em um ponto qualquer do elemento é dado por uma combinação linear entre os deslocamentos (na mesma direção) nos pontos nodais. Dessa forma, o deslocamento (q) em um ponto x é:

$$q(x) = \sum_{a=1}^4 N_e q_e, \quad (69)$$

em que N_e são funções de interpolação e q_e são deslocamentos nos pontos nodais (para a componente v do deslocamento a expressão é análoga).

De acordo com SORIANO (2009), as funções de interpolação podem ser obtidas através da multiplicação de funções lineares na coordenada ξ com funções lineares na coordenada η , de maneira que a função assumira valor unitário em um ponto nodal e valor nulo nos demais. Na figura 9, é visível que quando o ponto x for exatamente o ponto 1, a função de interpolação N_1 assume valor unitário e as demais funções de

interpolação assumem valor nulo (a mesma ideia vale para os pontos 2, 3 e 4 e as funções de interpolação N_2, N_3 e N_4 , respectivamente).

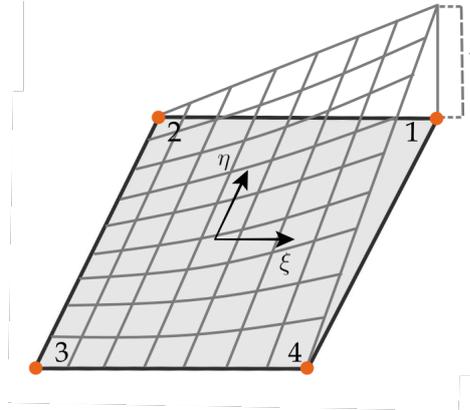


Figura 9: Função de interpolação N_1 .

Nesse sentido, a função interpoladora N_1 é dada por $N_1(\xi, \eta) = \Xi_1(\xi)I_1(\eta)$, sendo N_1 é nula nos pontos 2, 3 e 4, e, conseqüentemente $\Xi_1(-1) = 0$ e $I_1(-1) = 0$, resultando em $\Xi_1 = (1+\xi)$ e $I_1 = (1+\eta)$. Assim, $N_1(1, 1) = (1+1)(1+1) = 4$, não sendo unitário o valor da função interpoladora; para contornar essa situação, basta dividir a função N_1 por 4. Da mesma forma são obtidas as demais funções interpoladoras, sendo elas:

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \\ N_2(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \\ N_3(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_4(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \end{cases} \quad (70)$$

Considerando o vetor dos deslocamentos apresentado em (68) e as funções de interpolação em (70), tem-se:

$$q_e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ v_1 \\ q_2 \\ v_2 \\ q_3 \\ v_3 \\ q_4 \\ v_4 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

De acordo com LIU; QUEK (2013), a relação entre deslocamentos e deformações é dada pela equação:

$$S = \mathcal{D}q_e, \quad (72)$$

que na forma matricial é dada por:

$$\begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix}, \quad (73)$$

sendo S_{xx} e S_{yy} as deformações ao longo do eixo x e do eixo y , respectivamente, e γ_{xy} é a deformação de cisalhamento.

Substituindo a equação (71) na equação (73), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ v_1 \\ q_2 \\ v_2 \\ q_3 \\ v_3 \\ q_4 \\ v_4 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Levando em consideração a regra da cadeia para as derivadas parciais, segue que:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (75)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad (76)$$

que podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Assim, conforme a figura 7, tem-se que $x = (a/2)\xi$ e $y = (b/2)\eta$ e portanto:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (78)$$

e como consequência,

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{2}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \quad (79)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{2}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}. \quad (80)$$

Substituindo as derivadas parciais encontradas nas equações (79) e (80) na equação (74), tem-se:

$$\begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = B_q \begin{bmatrix} q_1 \\ v_1 \\ q_2 \\ v_2 \\ q_3 \\ v_3 \\ q_4 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad (81)$$

sendo:

$$B_q = \begin{bmatrix} \frac{1+\eta}{2a} & 0 & -\frac{1+\eta}{2a} & 0 & -\frac{1-\eta}{2a} & 0 & \frac{1-\eta}{2a} & 0 \\ 0 & \frac{1+\xi}{2b} & 0 & \frac{1-\xi}{2b} & 0 & -\frac{1-\xi}{2b} & 0 & -\frac{1+\xi}{2b} \\ \frac{1+\xi}{2b} & \frac{1+\eta}{2a} & \frac{1-\xi}{2b} & -\frac{1+\eta}{2a} & -\frac{1-\xi}{2b} & -\frac{1-\eta}{2a} & -\frac{1+\xi}{2b} & \frac{1-\eta}{2a} \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Portanto, como o MEF é utilizado para calcular os deslocamentos e potenciais elétricos, são utilizados princípios adequados para estabelecer equações para os elementos, e posteriormente, os elementos são acoplados uns aos outros (LIU; QUEK, 2013).

A seguir será apresentado o princípio variacional baseado no princípio de Hamilton, usando expressões de energia cinética, potencial (deformação) e trabalho virtual, bem como equações constitutivas piezelétricas. O princípio variacional introduzido é uma expressão geral do comportamento de meios piezelétricos e pode ser modelado por elementos finitos.

2.3.2 Princípio variacional

Com base no Lagrangeano e no trabalho virtual, as equações dinâmicas de uma estrutura piezelétrica podem ser derivadas usando o princípio de Hamilton (TZOU; TSENG, 1990), que é dado por:

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{L} + W) dt = 0, \quad (83)$$

sendo \mathcal{L} o Lagrangeano e W o trabalho virtual das forças externas e elétricas atuando no sistema. t_0 e t_f definem o intervalo de tempo, e suas variações devem zerar em $t = 0$ e $t = t_f$.

O Lagrangeano é estabelecido pela energia disponível no meio piezelétrico como:

$$\mathcal{L} = \int_{\Theta} (\mathcal{K} - V) d\Theta, \quad (84)$$

isto é, a diferença entre a energia cinética total do sistema \mathcal{K} e a energia potencial V associada à deformação do sistema.

Conforme IEEE STANDARD ON PIEZOELECTRICITY (1988), na teoria da piezoelectricidade linear, a energia potencial é expressa como:

$$V = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{kij} E_k S_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ik} E_k E_j. \quad (85)$$

Substituindo as relações constitutivas apresentadas em (3) e (4) na equação (85), obtém-se, em notação indicial (PIEFORT, 2001):

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} [c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - 2e_{kij} E_k S_{ij} - \epsilon_{ik} E_k E_j], \\ V &= \frac{1}{2} [c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{kij} E_k S_{ij} - e_{kij} E_k S_{ij} - \epsilon_{ik} E_k E_j], \\ V &= \frac{1}{2} [S_{ij} \underbrace{(c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k)}_{T_{ij}} - E_k \underbrace{(e_{kij} S_{ij} + \epsilon_{ik} E_j)}_{D_i}], \end{aligned}$$

que pode ser escrita na forma matricial:

$$V = \frac{1}{2} [S^T T - E^T D]. \quad (86)$$

Aplicando o operador variacional à energia potencial, pela regra da cadeia, tem-se:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \delta [S_{ij} (c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k) - E_k (e_{kij} S_{ij} + \epsilon_{ik} E_j)], \\ &\frac{1}{2} [\delta S_{ij} (c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k) - \delta E_k (e_{kij} S_{ij} + \epsilon_{ik} E_j)] \\ &= \frac{1}{2} [\delta (S_{ij} c_{ijkl}^E S_{kl} - S_{ij} e_{kij} E_k) - \delta (E_k e_{kij} S_{ij} + E_k \epsilon_{ik} E_j)], \\ &= \frac{1}{2} [\delta S_{ij} c_{ijkl}^E S_{kl} + S_{ij} c_{ijkl}^E \delta S_{kl} - \delta S_{ij} e_{kij} E_k - S_{ij} e_{kij} \delta E_k - (\delta E_k e_{kij} S_{ij} + E_k e_{kij} \delta S_{ij} + \delta E_k \epsilon_{ik} E_j + E_k \epsilon_{ik} \delta E_j)], \end{aligned} \quad (87)$$

e considerando a simetria dos tensores S_{ij} e E_k , a equação (87) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (2\delta S_{ij} c_{ijkl}^E S_{kl} - 2\delta S_{ij} e_{kij} E_k - 2\delta E_k e_{kij} S_{ij} - 2\delta E_k \epsilon_{ik} E_j), \\ &= \delta S_{ij} c_{ijkl}^E S_{kl} - \delta S_{ij} e_{kij} E_k - \delta E_k e_{kij} S_{ij} - \delta E_k \epsilon_{ik} E_j, \end{aligned}$$

$$= \delta S_{ij}(c_{ijkl}^E S_{kl} - S_{ij} e_{kij} E_k) - \delta E_k(e_{kij} S_{ij} + E_k \epsilon_{ik} E_j), \quad (88)$$

e substituindo (88) na energia potencial apresentada em (86), resulta-se na variação da energia potencial, na forma matricial:

$$\delta V = \delta S^T (c^E S - eE) - \delta E^T (eS + \epsilon E). \quad (89)$$

Considerando a energia cinética, que já foi apresentada na forma matricial em (33):

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} M \dot{q}^T \dot{q}, \quad (90)$$

e aplicando a variação, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{K} &= \frac{1}{2} M \delta(\dot{q}^T \dot{q}), \\ &= \frac{1}{2} M (\delta \dot{q}^T \dot{q} + \dot{q}^T \delta \dot{q}), \\ &= M \delta \dot{q}^T \dot{q}. \end{aligned} \quad (91)$$

Integrando a equação (91) por partes, sobre o intervalo de tempo t_0 e t_f , tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathcal{K} dt &= \int_{t_0}^{t_f} M \delta \dot{q}^T \dot{q} dt, \\ &= M \delta q^T \dot{q} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} M \delta q^T \ddot{q} dt, \end{aligned} \quad (92)$$

e como a variação δq é zero em $t = t_0$ e $t = t_f$, o primeiro termo da equação (92) torna-se nulo. Assim, a variação da energia cinética é escrita da forma:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathcal{K} dt &= - \int_{t_0}^{t_f} M \delta q^T \ddot{q} dt, \\ \delta \mathcal{K} &= -M \delta q^T \ddot{q}. \end{aligned} \quad (93)$$

Substituindo (89) e (93) na expressão (84), encontra-se o Lagrangeano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{\Omega_d} \{-M \dot{q}^T \ddot{q} - [S^T (c^E S - eE) - E^T (eS + \epsilon E)]\} d\Theta, \\ \mathcal{L} &= \int_{\Omega_d} (-M \dot{q}^T \ddot{q} - S^T c^E S + S^T eE + E^T eS + E^T \epsilon E) d\Theta. \end{aligned} \quad (94)$$

A figura 10 ilustra o problema abordado, sendo Γ_1 o contorno do material não piezolétrico, Γ_2 o contorno do material piezolétrico, Γ_3 a porção de Γ_1 em que são aplicadas as condições de contorno essenciais (por exemplo engaste ou apoio) para o material

não piezolétrico e Γ_4 a porção de Γ_2 de aplicação das condições de contorno essenciais (tal como isolamento elétrico) para o material piezolétrico. Já Ω_d é o domínio de todo o material e Ω_p é o domínio do material piezolétrico.

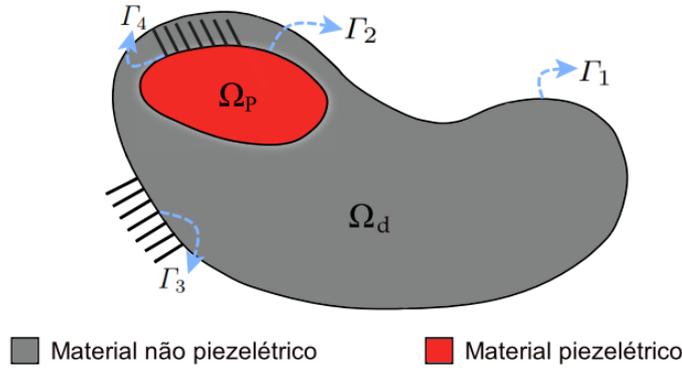


Figura 10: Ilustração da estrutura composta piezolétrica.

Para este problema, as condições de contorno fundamentais são o campo de deslocamentos estabelecido na região $\Gamma_3(q = \bar{q})$ e o potencial elétrico na região $\Gamma_4(\phi = \bar{\phi})$.

Devido à força mecânica externa e à carga elétrica aplicada, para qualquer variação no campo de deslocamento e potencial elétrico, $\delta q = 0$ em Γ_3 e $\delta \phi = 0$ em Γ_4 (SILVEIRA, 2012). Assim, o trabalho virtual é:

$$W = \int_{\Omega_d} \delta q^T f_{\Omega} d\Theta + \int_{\Gamma_1} \delta q^T f_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta \phi \varsigma d\Gamma + \delta q^T f_P - \delta \phi \kappa_P, \quad (95)$$

em que f_{Ω} , f_{Γ} e f_P são as forças de corpo, de superfície sobre Γ_1 e forças pontuais, respectivamente, ς é a carga elétrica superficial sobre Γ_2 e κ_P são as cargas elétricas concentradas. Substituindo o Lagrangeano apresentado na equação (94) e o trabalho virtual dado pela equação (95) no princípio de Hamilton (equação (83)) tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_d} [-M\delta(q^T \ddot{q}) - \delta(S^T c^E S) + \delta(S^T e E) + \delta(E^T e S) + \delta(E^T \epsilon E)] d\Theta + \int_{\Omega_d} \delta q^T f_{\Omega} d\Theta \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} \delta q^T f_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta \phi \varsigma d\Gamma + \delta q^T f_P - \delta \phi \kappa_P, \\ 0 &= - \int_{\Omega_d} [M\delta(q^T \ddot{q}) + \delta(S^T c^E S) - \delta(S^T e E) - \delta(E^T e S) - \delta(E^T \epsilon E) - \delta q^T f_{\Omega}] d\Theta \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} \delta q^T f_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta \phi \varsigma d\Gamma + \delta q^T f_P - \delta \phi \kappa_P. \end{aligned} \quad (96)$$

2.3.3 Formulação de elementos finitos para piezeletricidade

De acordo com as formulações de elementos finitos, através das funções de interpolação (N_q e N_{ϕ}), pode-se expressar o campo de deslocamento e o potencial elétrico

para cada elemento finito por meio dos valores nodais q_e e ϕ_e (MENUZZI, 2014).

Assim, para a parte referente aos deslocamentos, são utilizadas as equações (68)-(82) desenvolvidas na subseção 2.3.1. Para a parte relacionada aos potenciais elétricos é realizado um processo similar, considerando:

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^4 N_e \phi_e, \quad (97)$$

em que N_e são as mesmas funções de interpolação usadas nos deslocamentos e ϕ_e são os potenciais elétricos nos pontos nodais.

Na forma matricial, a equação (97) é dada por:

$$\phi = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}, \quad (98)$$

assim, considerando a equação do campo elétrico, descrita em (5), e levando em conta a equação (98), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Substituindo as derivadas parciais (equações (79) e (80)) na equação (99), tem-se:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = -B_\phi \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}, \quad (100)$$

sendo:

$$B_\phi = \begin{bmatrix} \frac{1+\eta}{1+\xi} & -\frac{1+\eta}{1-\xi} & -\frac{1-\eta}{1-\xi} & \frac{1-\eta}{1+\xi} \\ \frac{2a}{2b} & \frac{2a}{2b} & -\frac{2a}{2b} & -\frac{2a}{2b} \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Lembrando, das equações (69) e (97), que são:

$$q = N_q q_e, \quad (102)$$

$$\phi = N_\phi \phi_e, \quad (103)$$

no qual N_q e N_ϕ são as funções de interpolação de deslocamento e potencial elétrico, respectivamente. O campo de deformações mecânicas S e o campo elétrico E estão relacionados aos deslocamentos e potenciais nodais pelas funções derivadas de forma B_q e B_ϕ , podendo-se reescrever as equações (74) e (99) como:

$$S = \mathcal{D}N_q q_e = B_q q_e, \quad (104)$$

$$E = -\Lambda N_\phi \phi_e = -B_\phi \phi_e, \quad (105)$$

sendo \mathcal{D} e Λ os operadores de derivação (apresentados em (73) e (99), respectivamente).

Substituindo as equações (102) à (105) em cada termo do princípio de Hamilton (96) e considerando as propriedades de transposição de matrizes, obtém-se:

$$1^\circ \text{ termo : } \int_{\Theta} M \delta q^T \ddot{q} d\Theta = \int_{\Theta} M \delta N_q^T q_e^T N_q \ddot{q}_e d\Theta,$$

$$2^\circ \text{ termo : } \int_{\Theta} \delta S^T c^E S d\Theta = \int_{\Theta} \delta B_q^T q_e^T c B_q q_e d\Theta,$$

$$3^\circ \text{ termo : } \int_{\Theta} \delta S^T e E d\Theta = \int_{\Theta} \delta B_q^T q_e^T e (-B_\phi \phi_e) d\Theta,$$

$$4^\circ \text{ termo : } \int_{\Theta} \delta E^T e S d\Theta = \int_{\Theta} \delta (-B_\phi^T \phi_e^T) e B_q q_e d\Theta,$$

$$5^\circ \text{ termo : } \int_{\Theta} \delta E^T \epsilon E d\Theta = \int_{\Theta} \delta (-B_\phi^T \phi_e^T) \epsilon (-B_\phi \phi_e) d\Theta,$$

$$6^\circ \text{ termo : } \int_{\Theta} \delta q^T f_\Omega d\Theta = \int_{\Theta} \delta N_q^T q_e^T f_\Omega d\Theta,$$

$$7^\circ \text{ termo : } \int_{\Gamma_1} \delta q^T f_\Gamma d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \delta N_q^T q_e^T f_\Gamma d\Gamma,$$

$$8^\circ \text{ termo : } \int_{\Gamma_2} \delta \phi \zeta d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \delta N_\phi^T \phi_e^T \zeta d\Gamma,$$

$$9^\circ \text{ termo : } \delta q^T f_P = \delta N_q^T q_e^T f_P,$$

$$10^\circ \text{ termo : } \delta \phi \kappa_P = \delta N_\phi^T \phi_e^T \kappa_P,$$

resultando em:

$$\begin{aligned} 0 = & -\delta q_e^T \int_{\Theta} M N_q^T N_q d\Theta \ddot{q}_e - \delta q_e^T \int_{\Theta} B_q^T c^E B_q d\Theta q_e - \delta q_e^T \int_{\Theta} B_q^T e B_\phi d\Theta \phi_e \\ & - \delta \phi_e^T \int_{\Theta} B_\phi^T e B_q d\Theta q_e + \delta \phi_e^T \int_{\Theta} B_\phi^T \epsilon B_\phi d\Theta \phi_e + \delta q_e^T \int_{\Theta} N_q^T f_\Omega d\Theta \end{aligned} \quad (106)$$

$$+\delta q_e^T \int_{\Gamma_1} N_q^T f_\Gamma d\Gamma + \delta q_e^T N_q^T f_P - \delta \phi_e^T \int_{\Gamma_2} N_\phi^T \varsigma d\Gamma - \delta \phi_e^T N_\phi^T \kappa_P,$$

em que qualquer mudança arbitrária no deslocamento mecânico ou potencial elétrico compatível com as condições fundamentais de contorno deve ser verificada. Reescrevendo a equação (106) de forma a colocar os termos δq_e^T e $\delta \phi_e^T$ em evidência, tem-se:

$$\begin{aligned} 0 = & -\delta q_e^T \left[\int_{\Theta} MN_q^T N_q d\Theta \ddot{q}_e + \int_{\Theta} B_q^T c^E B_q d\Theta q_e + \int_{\Theta} B_q^T e B_\phi d\Theta \phi_e \right. \\ & \left. - \int_{\Theta} N_q^T f_\Omega d\Theta - \int_{\Gamma_1} N_q^T f_\Gamma d\Gamma - N_q^T f_P \right] - \delta \phi_e^T \left[\int_{\Theta} B_\phi^T e B_q d\Theta q_e \right. \\ & \left. - \int_{\Theta} B_\phi^T \epsilon B_\phi d\Theta \phi_e + \int_{\Gamma_2} N_\phi^T \varsigma d\Gamma + N_\phi^T \kappa_P \right]. \end{aligned} \quad (107)$$

Como a equação (107) é válida para quaisquer variações δq_e^T e $\delta \phi_e^T$, então:

$$\begin{aligned} - \int_{\Theta} MN_q^T N_q d\Theta \ddot{q}_e - \int_{\Theta} B_q^T c^E B_q d\Theta q_e - \int_{\Theta} B_q^T e B_\phi d\Theta \phi_e + \int_{\Theta} N_q^T f_\Omega d\Theta + \int_{\Gamma_1} N_q^T f_\Gamma d\Gamma + N_q^T f_P = 0, \\ \int_{\Theta} MN_q^T N_q d\Theta \ddot{q}_e + \int_{\Theta} B_q^T c^E B_q d\Theta q_e + \int_{\Theta} B_q^T e B_\phi d\Theta \phi_e = \int_{\Theta} N_q^T f_\Omega d\Theta + \int_{\Gamma_1} N_q^T f_\Gamma d\Gamma + N_q^T f_P \end{aligned} \quad (108)$$

e

$$\begin{aligned} - \int_{\Theta} B_\phi^T e B_q d\Theta q_e + \int_{\Theta} B_\phi^T \epsilon B_\phi d\Theta \phi_e - \int_{\Gamma_2} N_\phi^T \varsigma d\Gamma - N_\phi^T \kappa_P = 0, \\ \int_{\Theta} B_\phi^T e B_q d\Theta q_e - \int_{\Theta} B_\phi^T \epsilon B_\phi d\Theta \phi_e = - \int_{\Gamma_2} N_\phi^T \varsigma d\Gamma - N_\phi^T \kappa_P. \end{aligned} \quad (109)$$

Assim, para cada elemento finito, as equações (108) e (109) podem ser escritas em forma matricial como:

$$M_{qq}^e \ddot{q}_e + K_{qq}^e q_e + K_{q\phi}^e \phi_e = f^e, \quad (110)$$

$$K_{\phi q}^e q_e + K_{\phi\phi}^e \phi_e = \kappa^e, \quad (111)$$

em que as matrizes apresentadas acima, são dadas por:

$$M_{qq}^e = \int_{\Omega_e} MN_q^T N_q d\Theta, \quad (112)$$

$$K_{qq}^e = \int_{\Omega_e} B_q^T c^E B_q d\Theta, \quad (113)$$

$$K_{q\phi}^e = \int_{\Omega_e} B_q^T e B_\phi d\Theta, \quad (114)$$

$$K_{\phi\phi}^e = - \int_{\Omega_e} B_{\phi}^T \epsilon B_{\phi} d\Theta, \quad (115)$$

$$K_{\phi q}^e = \int_{\Omega_e} B_{\phi}^T e B_q d\Theta = K_{q\phi}^{eT}, \quad (116)$$

e as forças e cargas são:

$$f^e = \int_{\Omega_e} N_q^T f_{\Omega} d\Theta + \int_{\Gamma_1} N_q^T f_{\Gamma} d\Gamma + N_q^T f_P, \quad (117)$$

$$\kappa^e = - \int_{\Gamma_2} N_{\phi}^T \varsigma d\Gamma - N_{\phi}^T \kappa_P. \quad (118)$$

As matrizes apresentadas em (110) e (111) representam: M_{qq}^e matriz de massa, K_{qq}^e matriz de rigidez mecânica, $K_{q\phi}^e$ e $K_{\phi q}^e$ matrizes de acoplamento piezoeletrico, $K_{\phi\phi}^e$ matriz de rigidez dielétrica. As forças apresentadas em (117) e (118) representam: f^e força mecânica externa e κ^e a carga elétrica. Além disso, em (113), tem-se que:

$$c^E = \frac{E_c(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (119)$$

no qual E_c e ν são constantes que caracterizam o material e são chamados, respectivamente, módulo de Young e coeficiente de Poisson do material de base isotrópico.

Pode-se também, reescrever as equações (110) e (111) em um sistema matricial, da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} M_{qq}^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{qq}^e & K_{q\phi}^e \\ K_{\phi q}^e & K_{\phi\phi}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^e \\ \kappa^e \end{bmatrix}, \quad (120)$$

Cada elemento da malha é conectado aos seus elementos adjacentes por meio de nós, de forma que o deslocamento mecânico e o potencial elétrico são contínuos de um elemento a outro. Portanto, o princípio hamiltoniano da estrutura completa deve ser verificado por uma equação com uma matriz global, que é obtida através da contribuição de cada elemento finito.

A equação (120) não leva em consideração as perdas mecânicas que ocorrem no material. Para contornar isso, utiliza-se as equações de elementos finitos globais que considerem o amortecimento da estrutura piezoeletrica, então:

$$\begin{bmatrix} M_{qq}^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{qq}^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{qq}^e & K_{q\phi}^e \\ K_{\phi q}^e & K_{\phi\phi}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^e \\ \kappa^e \end{bmatrix}, \quad (121)$$

em que C_{qq}^e é a matriz de amortecimento global vista em (57).

A equação (121) é utilizada para descrever a dinâmica da estrutura onde há mate-

rial piezolétrico. Para a estrutura sem material piezolétrico, a equação da dinâmica é dada por:

$$M_{qq}^e \ddot{q} + C_{qq}^e \dot{q} + K_{qq}^e q = f^e. \quad (122)$$

2.3.3.1 Análise modal

De acordo com a teoria dos elementos finitos, os vetores e matrizes da resposta global da estrutura são compostos das contribuições de cada um dos elementos finitos de acordo com a posição de graus de liberdade respectivos. Nos elementos que compartilham nós, as contribuições são somadas. Depois de montar essas matrizes, a equação global dos elementos finitos de todo o domínio pode ser escrita na forma modal como (HOMAYOUNI-AMLASHI et al., 2020):

$$\begin{bmatrix} M_{qq} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{qq} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{q\phi} \\ K_{\phi q} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ Q \end{bmatrix}. \quad (123)$$

Considerando agora, uma excitação harmônica de frequência ω , com:

$$d = d_0 e^{i\omega t}, \quad \phi = \phi_0 e^{i\omega t}, \quad F = F_0 e^{i\omega t}, \quad Q = Q_0 e^{i\omega t}, \quad (124)$$

em que F_0 e Q_0 são as amplitudes da força harmônica, e d_0 , ϕ_0 as amplitudes do deslocamento e potencial elétrico, respectivamente.

A primeira linha da equação (123) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} M_{qq} \ddot{d} + C_{qq} \dot{d} + K_{qq} d + K_{q\phi} \phi &= F, \\ M_{qq} \ddot{d} + C_{qq} \dot{d} + K_{qq} d &= F - K_{q\phi} \phi, \end{aligned} \quad (125)$$

que, seguindo o mesmo processo da análise modal apresentada na subseção 2.2.2, e aplicando na equação (125), obtém-se a equação global na forma modal:

$$\ddot{d} + Z \dot{d} + \Omega d = \Psi^T F - \Psi^T K_{q\phi} \phi. \quad (126)$$

Para a estrutura exclusivamente sem o material piezolétrico, a equação (126) não terá o termo negativo do lado direito, pois ela será obtida a partir da equação (122).

2.3.3.2 Representação em espaço de estados

Para resolver o modelo modal, utiliza-se da mesma ferramenta apresentada na subseção 2.2.3, sendo a equação (126) reescrita em forma de espaço de estados.

Portanto, introduzindo os mesmos vetores y_1 e y_2 definidos em (64), e considerando na forma de espaço de estados as variáveis do vetor de estados τ , a equação (126)

na forma de estado, é:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega & -Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi^T F - \Psi^T K_{q\phi} \phi \end{bmatrix}. \quad (127)$$

Note que a ordem do sistema (126) é $2(m + 1)(n + 1)$, enquanto que a ordem do sistema (127) é $4(m + 1)(n + 1)$. No entanto, os modos de vibração representativos em estruturas do tipo vigas de metal, normalmente são poucos, como por exemplo, os três primeiros (MOLTER, 2008), o que reduz em muito a ordem do sistema trabalhado.

3 CONTROLE DE VIBRAÇÕES

Este capítulo abordará os dois controles utilizados neste trabalho, o controle passivo (BNAs) e o controle ativo (RQL). A seção 3.1 apresenta o conceito e a formulação matemática dos BNAs, sendo que esta seção está baseada nos trabalhos de PIERCE (1970), MIRONOV (1988), SOUZA (2018), ZHAO; PRASAD (2019) e PELAT et al. (2020). Já a seção 3.2, aborda a teoria do controlador RQL, e está baseada nos livros do NAIDU (2003) e do OGATA (2014).

3.1 Controle passivo usando o efeito dos BNAs

Uma abordagem a ser utilizada para o controle passivo de vibrações são os buracos negros acústicos. O perfil dos BNAs nas estruturas segue uma lei de potência (que será apresentado na sequência), sendo que a energia de vibração é concentrada em razão da redução da velocidade das ondas.

A representação dos BNAs apareceu com base no preceito de que, se a espessura de uma viga diminui suavemente ao longo de seu comprimento, uma onda de flexão pode se propagar na mesma, sem reflexão. Assim, a partir dessa análise, pode-se perceber que o número de onda da estrutura depende da espessura da mesma.

A quantidade de ondas presentes em uma estrutura indica quantos ciclos de onda ocorrem por unidade de comprimento, sendo que esta quantidade interfere diretamente na velocidade e na amplitude da onda, e assim, afeta na reflexão da onda na estrutura. A fim de validar as informações descritas, é necessário definir alguns dados relevantes que serão discutidos e analisados em sequência.

Uma estrutura que tem um buraco com espessura variando de acordo com uma função de potência é ilustrada na figura 11, sendo que essa função satisfaz a condição de diminuir suavemente sua espessura. Nesta mesma figura, vê-se o efeito da concentração do BNA, onde a amplitude da onda incidente aumenta significativamente ao se propagar para a extremidade.

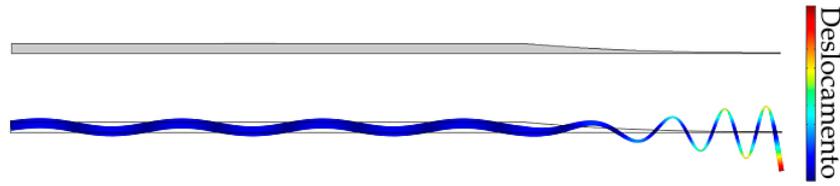


Figura 11: Estrutura que satisfaz a função de potência. Fonte: Adaptado de ZHAO; PRASAD (2019).

A função que define esse tipo de perfil para os buracos é a que MIRONOV (1988) expôs em seu trabalho, o qual diz que a velocidade da onda de flexão vai a zero para vigas e placas, cuja espessura diminui de acordo com:

$$h(x) = \varepsilon x^{m_o}, \quad (128)$$

em que h é a espessura, ε é uma constante, m_o é a ordem da lei de potência, a qual deve ser um número racional positivo maior ou igual a 2, e x é a variável que dá a posição em cada ponto ao longo da viga.

A função (128) é uma função ideal para aplicar os conceitos mencionados, no entanto, devido às limitações do processo de fabricação real, a espessura nunca se torna zero, havendo sempre uma espessura residual (h_1). Então, a equação da curva da lei de potência (128) se torna:

$$h(x) = \varepsilon x^{m_o} + h_1. \quad (129)$$

O formato de um buraco com a espessura definida pela equação (129) está retratado na figura 12:

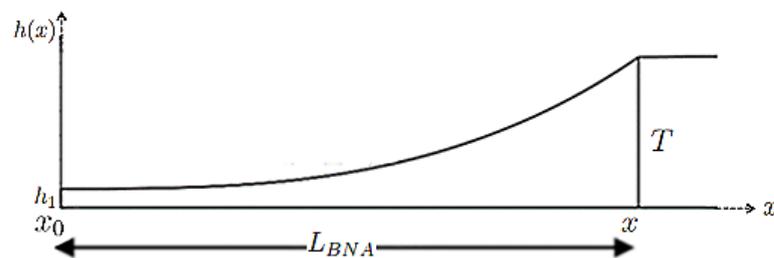


Figura 12: Formato de um BNA. Fonte: Adaptado de ZHAO; PRASAD (2019).

Para uma espessura específica da viga (T), a constante ε afeta o comprimento do BNA de maneira que:

$$L_{BNA} = \sqrt[m_o]{\frac{T - h_1}{\varepsilon}}, \quad (130)$$

e assim, da equação (130), facilmente encontra-se a constante ε :

$$L_{BNA}^{m_o} = \frac{T - h_1}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon = \frac{T - h_1}{L_{BNA} m_o}. \quad (131)$$

Com isso, a equação (129) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$h(x) = \frac{T - h_1}{L_{BNA} m_o} x^{m_o} + h_1, \quad (132)$$

na qual T é a espessura da viga, h_1 é a espessura residual do BNA e L_{BNA} é o comprimento do buraco.

Definidos os parâmetros presentes em uma estrutura com BNA, neste momento, será apresentado o número de ondas $k(x)$, conforme exemplificado na figura 13, pois dessa forma sabe-se quantos são os ciclos da onda a cada unidade de comprimento.

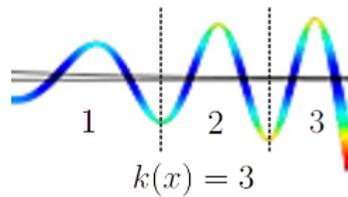


Figura 13: Número de ondas.

Em vista disso, esta dissertação parte da equação do movimento de uma viga para obter as expressões do número de ondas e a amplitude das ondas, e conseqüentemente, encontrar as velocidades de fase local (velocidade de propagação de uma onda) e de grupo local (velocidade de propagação de um grupo de ondas).

Assim, toma-se a equação de movimento para uma viga uniforme de Euler-Bernoulli, que é dada por:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E_c I(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (133)$$

sendo E_c o módulo de Young, I o momento de inércia da seção transversal da viga, ρ a densidade da massa e A a área da seção transversal da viga.

A equação (133) admite uma solução harmônica, expressa como:

$$w(x, t) = W(x) e^{i\omega_a t}, \quad (134)$$

onde ω_a é a frequência angular da onda de flexão. Assim, substituindo a equação (134) na equação (133), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E_c I(x) \frac{\partial^2 W(x) e^{i\omega_a t}}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 W(x) e^{i\omega_a t}}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E_c I(x) e^{i\omega_a t} \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) (-\omega_a^2) W(x) e^{i\omega_a t} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E_c I(x) \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right] - \omega_a^2 \rho A(x) W(x) = 0. \quad (135)$$

Uma maneira de fornecer soluções aproximadas da equação diferencial (135), com diferentes ordens de aproximação, é utilizando o método de WKB, recebendo este nome em homenagem aos físicos Gregor Wentzel, Hendrik Anthony Kramers e Léon Brillouin, que o desenvolveram em 1926. Este método é utilizado neste trabalho, pois a aproximação WKB de primeira ordem fornece as expressões do número de ondas, da amplitude, e em seguida, da variação da velocidade de fase local e da velocidade de grupo local.

O método de WKB utiliza uma função eikonal para determinar a função $W(x)$ apresentada em (134). A função eikonal, $S(x)$, depende da posição x , e as frentes de ondas (que é o conjunto dos pontos atingidos pela perturbação na mesma altura), estão contidas nesta função, que vão na direção para qual $S(x)$ varia o mais rapidamente. Dessa forma, considerando a função eikonal:

$$S(x) = \ln \tilde{W}(x) - i\theta(x), \quad (136)$$

a função $W(x)$ na equação (134) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} W(x) &= e^{S(x)}, \\ W(x) &= e^{\ln \tilde{W}(x) - i\theta(x)}, \\ W(x) &= e^{\ln \tilde{W}(x)} e^{-i\theta(x)}, \\ W(x) &= \tilde{W}(x) e^{-i\theta(x)}, \end{aligned} \quad (137)$$

sendo \tilde{W} à amplitude local e θ é equivalente a mudança de fase da onda.

Reescrevendo a equação (135), levando em conta a equação (137), tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E_c I(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{W}(x) e^{-i\theta(x)} \right] - \omega_a^2 \rho A(x) \tilde{W}(x) e^{-i\theta(x)} = 0, \quad (138)$$

e assim, calculando suas derivadas pela regra do produto (apresentadas em vermelho no anexo A), pode-se separar a parte real e a parte imaginária da equação. Levando em consideração a aproximação WKB de primeira ordem, a parte real do problema irá determinar o número de ondas, enquanto a parte imaginária irá estabelecer a equação da amplitude.

Neste sentido, $d\tilde{W}(x)/dx$, $d\theta(x)/dx$ e $dI(x)/dx$ são de primeira ordem, $d^2\tilde{W}(x)/dx^2$, $d^2\theta(x)/dx^2$ e $d^2I(x)/dx^2$ são de segunda ordem, e os demais são de ordens superiores. Os produtos de primeira ordem são considerados de segunda ordem e portanto, são desprezados (PIERCE, 1970).

Portanto, a aproximação para a parte real, dando importância apenas aos termos que tem somente ordem mais baixa (destacado em azul no anexo A), tem-se:

$$-\omega_a^2 \rho A(x) \tilde{W}(x) e^{-i\theta(x)} + E_c I(x) \tilde{W}(x) \left[\frac{d\theta(x)}{dx} \right]^4 e^{-i\theta(x)} = 0, \quad (139)$$

dividindo a expressão (139) pelo termo $e^{-i\theta(x)}$ e por $\omega_a^2 \rho A(x) \tilde{W}(x)$, resulta em:

$$-1 + \frac{E_c I(x)}{\omega_a^2 \rho A(x)} \left[\frac{d\theta(x)}{dx} \right]^4 = 0, \quad (140)$$

portanto:

$$\left[\frac{d\theta(x)}{dx} \right]^4 = \frac{\omega_a^2 \rho A(x)}{E_c I(x)},$$

$$\sqrt[4]{\left[\frac{d\theta(x)}{dx} \right]^4} = \sqrt[4]{\frac{\omega_a^2 \rho A(x)}{E_c I(x)}},$$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \left[\frac{\rho A(x)}{E_c I(x)} \right]^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega_a}, \quad (141)$$

$$\theta(x) = \int \left[\frac{\rho A(x)}{E_c I(x)} \right]^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega_a} dx. \quad (142)$$

De acordo com SOUZA (2018), o número de ondas é equivalente ao integrando apresentado na equação (142), então:

$$k(x) = \left[\frac{\rho A(x)}{E_c I(x)} \right]^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega_a}, \quad (143)$$

sendo a área (A) e o momento de inércia (I) da seção transversal de uma viga de base retangular b , (SHABANA, 1996), respectivamente:

$$A(x) = bh(x), \quad (144)$$

$$I(x) = \frac{bh^3(x)}{12}. \quad (145)$$

Substituindo as relações (144) e (145) na equação (143), tem-se a equação que define o número de ondas:

$$k(x) = \sqrt[4]{\frac{\rho bh(x) 12}{E_c bh^3(x)}} \sqrt{\omega_a},$$

$$k(x) = \sqrt[4]{\frac{12\rho}{E_c h^2(x)}} \sqrt{\omega_a}. \quad (146)$$

Duas grandezas podem ser usadas para aferir a velocidade de fase da onda, sendo elas a velocidade de fase local (v_f) e velocidade de grupo local (v_g). A primeira refere-se a velocidade da própria onda, já a segunda está relacionada à velocidade com que um grupo de ondas se propaga. Essas velocidades (local e de grupo) reduzem com a diminuição da espessura, assim, se a espessura varia suavemente e atinge um valor zero, as velocidades de onda correspondentes também se reduzem a zero. Como consequência, verifica-se que a onda não atinge a ponta da estrutura, portanto, não pode ser refletida.

A velocidade de fase local, de acordo com MIRONOV (1988), é descrita como:

$$v_f = \frac{\omega_a}{k(x)}, \quad (147)$$

assim, substituindo a expressão do número de ondas (146) na equação (147) e racionalizando-a, tem-se:

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{\omega_a}{\sqrt{\omega_a}} \sqrt[4]{\frac{E_c h^2(x)}{12\rho}}, \\ v_f &= \frac{\omega_a}{\sqrt{\omega_a}} \frac{\sqrt{\omega_a}}{\sqrt{\omega_a}} \sqrt[4]{\frac{E_c h^2(x)}{12\rho}}, \\ v_f &= \sqrt[4]{\frac{E_c}{12\rho}} \sqrt{\omega_a h(x)}. \end{aligned} \quad (148)$$

A velocidade de grupo local é o dobro da velocidade de fase local, assim:

$$\begin{aligned} v_g &= 2 \sqrt[4]{\frac{E_c}{12\rho}} \sqrt{\omega_a h(x)}, \\ v_g &= \sqrt[4]{\frac{2^4 E_c}{12\rho}} \sqrt{\omega_a h(x)}, \\ v_g &= \sqrt[4]{\frac{4E_c}{3\rho}} \sqrt{\omega_a h(x)}. \end{aligned} \quad (149)$$

Com base nas equações (148) e (149) é possível confirmar que a espessura interfere de forma direta na velocidade da onda, visto que, quando $h(x)$ tende a zero, as velocidades da onda também tenderão a zero.

Agora, considera-se a parte imaginária da equação (138) igual à zero para encontrar a expressão que determina a amplitude da onda. Desta vez, leva-se em conta somente os termos que apresentam derivada de até segunda ordem em θ (destacados

em azul no anexo A), e ainda, divide-se a expressão por $e^{i\theta(x)}$, obtendo:

$$6E_c I(x) \left[\frac{d}{dx} \theta(x) \right]^2 \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) + 4E_c I(x) \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left[\frac{d}{dx} \theta(x) \right]^3 \quad (150)$$

$$+ 2E_c I(x) \left[\frac{d}{dx} \theta(x) \right]^3 \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) = 0.$$

O motivo pelo qual foram selecionados os termos até segunda ordem em θ se dá pelo fato de que sua primeira derivada foi definida em (141), dessa forma, substituindo (141) na equação (150), tem-se somente termos de primeira ordem. Assim, a aproximação para a parte imaginária é dada por:

$$6E_c I(x) \left\{ \left[\frac{\rho A(x)}{E_c I(x)} \right]^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega_a} \right\}^2 \tilde{W}(x) \frac{d}{dx} \left(\left[\frac{\rho A(x)}{E_c I(x)} \right]^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega_a} \right) + 4E_c I(x) \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \quad (151)$$

$$\left\{ \left[\frac{\rho A(x)}{E_c I(x)} \right]^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega_a} \right\}^3 + 2E_c I(x) \left\{ \left[\frac{\rho A(x)}{E_c I(x)} \right]^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega_a} \right\}^3 \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) = 0,$$

sendo que esta equação admite solução na forma (SOUZA, 2018):

$$\tilde{W}(x) = \frac{C_1}{E_c I(x)^{1/8} \rho A(x)^{3/8}}, \quad (152)$$

em que C_1 é uma constante.

Assim, substituindo as relações do momento de inércia da seção transversal da viga (I) e da área da seção transversal da viga (A) apresentadas em (145) e (144) na equação (152), tem-se:

$$\tilde{W}(x) = \frac{C_1}{E_c \{ [bh^3(x)]/12 \}^{1/8} \rho [bh(x)]^{3/8}}, \quad (153)$$

em que pode-se separar as constantes contidas no denominador da equação (152) da variável dependente $h(x)$, como:

$$\tilde{W}(x) = \frac{C_1}{C_2 h(x)^{3/8} h(x)^{3/8}},$$

$$\tilde{W}(x) = \frac{C_1}{C_2 h(x)^{3/4}}, \quad (154)$$

no qual $D = C_1/C_2$, e portanto, a expressão que define a amplitude da onda é dada por:

$$\tilde{W}(x) = \frac{D}{h(x)^{3/4}}. \quad (155)$$

Sendo assim, considerando que a espessura tenda a zero, a amplitude tenderá ao

infinito, comprovando que a amplitude aumenta conforme a espessura diminui.

Visto isso, tem-se a comprovação de que os BNAs podem ser considerados como um controle passivo de vibração, pois no momento em que a onda passa na viga que contém o buraco, a mesma diminui sua velocidade e aumenta sua amplitude. Dessa forma, a vibração existente na viga fica concentrada no BNA, e conseqüentemente ela não prossegue para o restante da estrutura, e não é refletida de volta.

3.2 Controle ativo usando RQL

Um método que é utilizado como controle ativo de vibrações é o RQL - Regulador Quadrático Linear, que normalmente é empregado para determinar a realimentação de um sistema. Este controle, irá levar em consideração um atuador piezolétrico acoplado à viga.

Dessa forma, considerando o seguinte sistema em espaço de estados, e suas respectivas condições iniciais (OGATA, 2014; NAIDU, 2003):

$$\begin{aligned}\dot{\tau}(t) &= A_c(t)\tau(t) + B(t)\phi(t), \\ \tau(0) &= \tau_0,\end{aligned}\tag{156}$$

em que $\tau \in R^n$ é o vetor de estado, $A_c \in R^{n \times n}$ é matriz de estado, $B \in R^{n \times m}$ é a matriz de controle e $\phi \in R^m$ é o vetor de entrada de controle do atuador (m refere-se a variável do controle e n refere-se a variável de estado). Conforme a equação (127), sabe-se que as matrizes A_c e B são:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega & -Z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi^T F - \Psi^T K_{q\phi} \end{bmatrix}.\tag{157}$$

O problema do controle ótimo linear consiste em minimizar o seguinte funcional em forma quadrática:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\tau^T(t)Q_c(t)\tau(t) + \phi^T(t)R(t)\phi(t)]dt,\tag{158}$$

sujeito às restrições dadas pela equação (156). Este problema é denominado problema do regulador ótimo linear com funcional quadrático. Nesse problema, $Q_c \in R^{n \times n}$ é uma matriz hermitiana real definida-positiva ou semidefinida-positiva, que considera a energia dos estados do sistema, enquanto $R \in R^{m \times m}$ é uma matriz hermitiana ou simétrica definida-positiva ($R > 0$), que pondera a energia do sinal de controle (PADOIN, 2014).

O problema linear quadrático pode ser denominado de acordo com o tempo final

t_f , das seguintes formas (ROSA, 2020):

- *Problema linear-quadrático do controle ótimo com horizonte finito*, quando t_f é finito. Neste caso todas as matrizes podem depender do tempo.
- *Problema linear-quadrático do controle ótimo com horizonte infinito*, quando $t_f = \infty$. Ele também pode ser chamado de *regulador com tempo infinito* ou *regulador linear-quadrático*, e todas as matrizes são constantes.

Para sistemas autônomos as matrizes A_c , B , Q_c e R são constantes, e o sistema (156) pode ser reescrito como:

$$\dot{\tau}(t) = A_c\tau(t) + B\phi(t), \quad (159)$$

e o funcional apresentado em (158), que representa o índice de desempenho, fica:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\tau^T(t)Q_c\tau(t) + \phi^T(t)R\phi(t)]dt. \quad (160)$$

De acordo com OGATA (2014), a lei de controle ótimo para esse funcional é dada por:

$$\phi(t) = -G\tau(t), \quad (161)$$

sendo que, se os elementos da matriz G forem determinados de forma a minimizar o índice de desempenho J , então (161) é ótimo para qualquer que seja o estado inicial $\tau(0)$. A figura 14 ilustra o diagrama de blocos para configuração ótima.

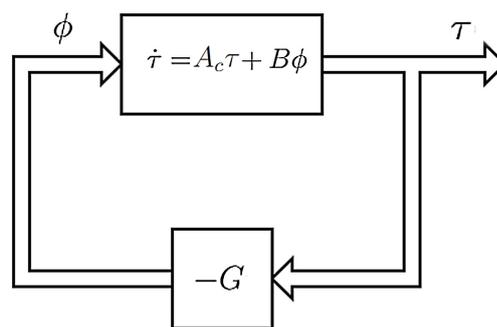


Figura 14: Sistema de controle ótimo.

A matriz G é uma matriz de ganhos de realimentação, sendo que o ganho ótimo é expresso por:

$$G = -R^{-1}B^T P, \quad (162)$$

em que P é uma matriz simétrica definida-positiva e é encontrada pela solução da

equação algébrica de Riccati:

$$A_c^T P + P A_c - P B R^{-1} B^T + Q_c = 0. \quad (163)$$

Assim, substituindo a equação (161) na equação (159), tem-se a equação do sistema em malha fechada:

$$\dot{\tau} = A_c \tau - B G \tau = (A_c - B G) \tau. \quad (164)$$

A estabilidade assintótica do sistema (159) é garantida através da condição suficiente para o mínimo, dada pelo caráter definido-positivo das matrizes Q_c e R (NAIDU, 2003), isto é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial^2 \tau} & \frac{\partial^2 H}{\partial \tau \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \tau \partial u} & \frac{\partial^2 H}{\partial^2 u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_c & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, \quad (165)$$

em que H é o Hamiltoniano do problema de controle ótimo (funcional (158) e restrições (156)). Por conhecimento, o Hamiltoniano é dado por:

$$H(\tau(t), \phi(t), \lambda(t)) = \frac{1}{2} (\tau(t)^T Q_c(t) \tau(t) + \phi(t)^T R(t) \phi(t)) + \lambda(t)^T (A_c(t) \tau(t) + B(t) \phi(t)), \quad (166)$$

e $\lambda(t)$ é um vetor de co-estado. A condição necessária para o mínimo é que as variações de H em relação as variáveis τ , ϕ e λ sejam iguais a zero.

A condição suficiente para que o valor de J seja finito é a controlabilidade completa das matrizes A_c e B . Isto é, a matriz de controlabilidade:

$$\begin{bmatrix} B & A_c B & \dots & A_c^{n-1} B \end{bmatrix}, \quad (167)$$

não pode ser singular, ou seja, ela deve conter n colunas linearmente independentes, precisa ter posto completo,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} B & A_c B & \dots & A_c^{n-1} B \end{bmatrix} = n. \quad (168)$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção apresenta os resultados e discussões oriundos da implementação computacional da proposta metodológica para a resolução do problema sugerido.

Para uma análise inicial, utilizou-se uma malha de elementos finitos com 204 elementos em x e 19 elementos em y , cuja discretização resultou em uma malha de 3876 elementos finitos, tendo a viga $1m$ de comprimento por $0,1m$ de largura. Cada elemento finito isoparamétrico tem quatro nós e dois graus de liberdade por nó. Devido a utilização do elemento retangular de quatro nós (quad4), para a parte do controle passivo e ativo, a malha foi refinada na borda superior e inferior. Fez-se isto, pelo fato de que a utilização dos elementos quad4 podem gerar alguns problemas de análise mecânica quando se tem somente uma linha deles, pois se tornam frágeis. Assim, a fim de diminuir a fragilidade, colocou-se duas linhas de elementos nas bordas superior e inferior.

O material estrutural utilizado nas simulações foi o alumínio, sendo as propriedades do material apresentadas na tabela 2 (MOLTER et al., 2010; MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

Tabela 2: Propriedades materiais do alumínio.

| Alumínio | |
|-------------------------|------------------------|
| Módulo de Young | $65 \times 10^9 N/m^2$ |
| Densidade | $2890 kg/m^3$ |
| Coefficiente de Poisson | 0,334 |

Na tabela 3, são apresentadas as propriedades materiais do PZT5A (PREUMONT, 2011) e suas constantes constitutivas (MOLTER; FONSECA; SANTOS FERNANDEZ, 2016) que serão utilizadas na parte do controle.

Tabela 3: Propriedades materiais do PZT5A.

| PZT5A | |
|--------------------------|----------------------|
| Módulo de Young | $50 \times 10^9 GPa$ |
| Densidade | $7600 kg/m^3$ |
| Constantes elásticas | $(10^{10} N/m^2)$ |
| c_{11} | 12,1 |
| c_{12} | 7,54 |
| c_{66} | 2,25 |
| Constantes piezolétricas | (C/m^2) |
| e_{15} | 12,3 |
| e_{31} | -5,4 |
| e_{33} | 15,8 |

As simulações foram feitas através de códigos implementados no MATLAB® e os gráficos da amplitude de vibração foram obtidos pela Transformada Rápida de Fourier. Nas simulações realizadas consideraram-se vibrações livres e uma viga em balanço com engaste no lado esquerdo (conforme ilustra a figura 15). Os coeficientes de amortecimento usados foram $\zeta_1 = 0,005$, $\zeta_2 = 0,02$ e $\zeta_3 = 0,0008$. Para fins de análise, considerou-se para todos os casos, o deslocamento na direção y do último nó da discretização, sendo este o do canto inferior no final da parte livre da estrutura (destacado em vermelho na figura 15).



Figura 15: Viga engastada de um lado.

4.1 Validação do código implementado para o MEF

Com o intuito de validar o código implementado, foi realizada uma colaboração com o doutorando Meng He, estudante da Universidade de Ciência e Tecnologia de Huazhong, em Wuhan, na China. Assim, através dessa parceria, comparou-se os resultados obtidos para as frequências da estrutura utilizada, sem buraco e com 1, 2 e 3 buracos elípticos, por meio de simulações realizadas no *software* MATLAB® e no *software* COMSOL Multiphysics®.

Nas figuras abaixo são apresentados os deslocamentos modais obtidos pelo

MATLAB® (lado esquerdo) e pelo COMSOL Multiphysics® (lado direito), para 3 modos da viga, sem buraco (figura 16) e com 1, 2 e 3 buracos (figuras 17, 18 e 19, respectivamente).

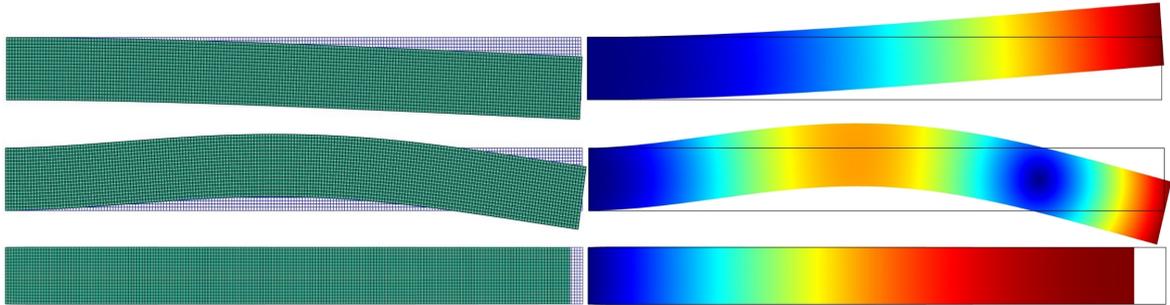


Figura 16: Comparação entre simulações feitas no MATLAB® e no COMSOL Multiphysics® - viga sem buraco e três primeiros modos.

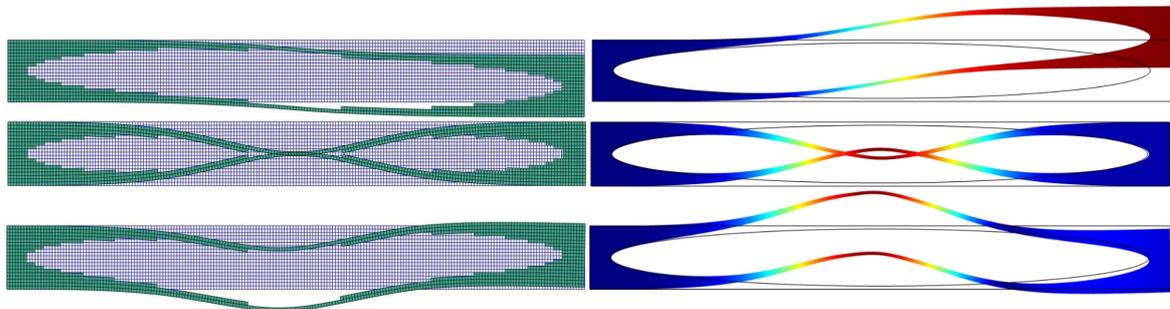


Figura 17: Comparação entre simulações feitas no MATLAB® e no COMSOL Multiphysics® - viga com um buraco e três primeiros modos.

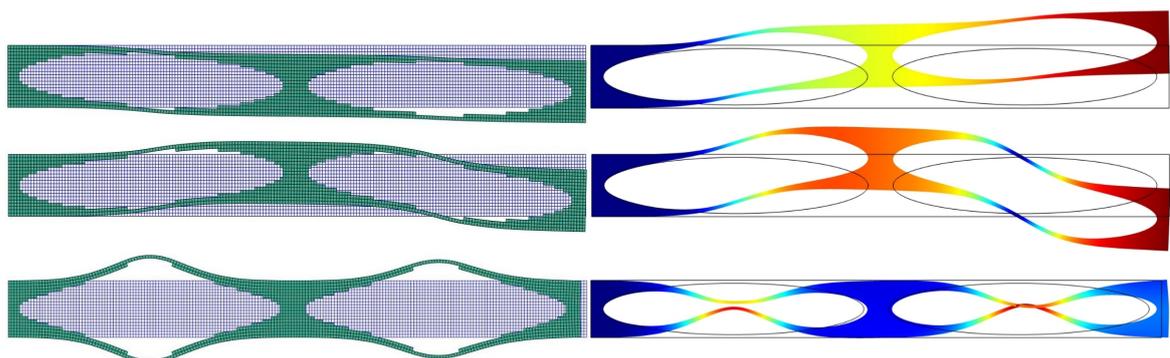


Figura 18: Comparação entre simulações feitas no MATLAB® e no COMSOL Multiphysics® - viga com dois buracos e três primeiros modos.

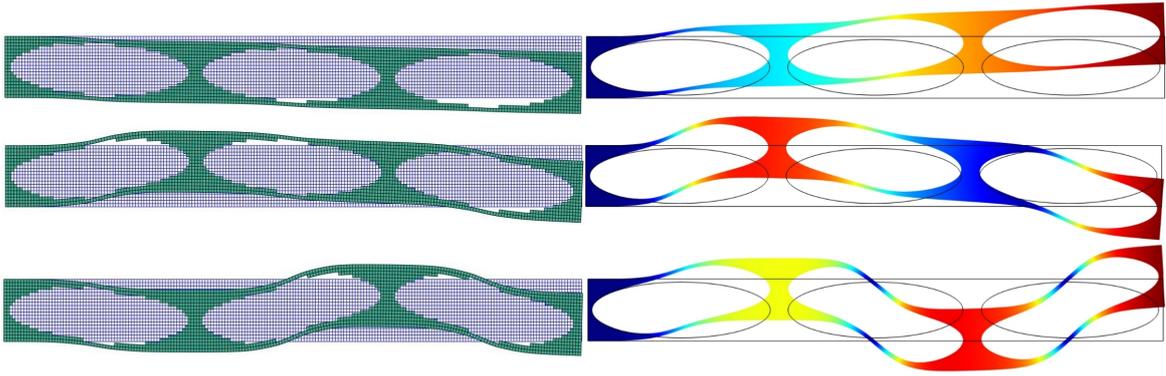


Figura 19: Comparação entre simulações feitas no MATLAB[®] e no COMSOL Multiphysics[®] - viga com três buracos e três primeiros modos.

Como medida de comparação do código utilizado neste trabalho e o do colaborador Meng He, comparou-se as frequências resultantes das simulações obtidas pelos dois *softwares* (MATLAB[®] e COMSOL Multiphysics[®]). Assim, para uma melhor visualização, organizou-se as frequências obtidas de acordo com a tabela abaixo.

Tabela 4: Comparação entre as frequências dos *softwares* MATLAB[®] e COMSOL Multiphysics[®].

| Quantidade de buracos | Modos | Frequências (Hz) | |
|-----------------------|-------|---------------------|----------------------------------|
| | | MATLAB [®] | COMSOL Multiphysics [®] |
| Sem buraco | 1 | 76, 16 | 76, 16 |
| | 2 | 456, 58 | 456, 58 |
| | 3 | 1187, 30 | 1187, 30 |
| Um buraco | 1 | 19, 03 | 17, 20 |
| | 2 | 133, 79 | 145, 88 |
| | 3 | 168, 14 | 176, 27 |
| Dois buracos | 1 | 36, 49 | 34, 65 |
| | 2 | 96, 99 | 89, 90 |
| | 3 | 484, 38 | 527, 21 |
| Três buracos | 1 | 47, 76 | 47, 08 |
| | 2 | 146, 06 | 140, 68 |
| | 3 | 230, 50 | 215, 40 |

Conforme os resultados apresentados na tabela 4, pode-se notar que o código implementado em MATLAB[®] retornou com resultados bastante próximos aos do COMSOL Multiphysics[®]. Vê-se que as frequências da estrutura sem buraco (figura 16) são iguais para ambos os *softwares*, enquanto as frequências para 1, 2 e 3 buracos (figuras 17, 18 e 19) tiveram pequenas diferenças.

O fato do resultado das frequências da viga sem buraco serem idênticas para ambos os *softwares*, faz com que o programa utilizado neste trabalho seja validado, pois a malha de elementos finitos é a mesma nos dois *softwares* e não há a interferência de buracos (o que faz com que a estrutura modifique). Ainda, a diferença entre as frequências para 1, 2 e 3 buracos ocorre porque os buracos gerados pelo *software* COMSOL Multiphysics® se aproximam muito mais da forma elíptica (não sendo visível suas imperfeições), já os buracos gerados pelo *software* MATLAB® têm forma elíptica, porém apresentam zigue-zague em suas bordas, assim, essa pequena diferença de frequência se deu pela estrutura da malha não ser idêntica.

Verificada a corretude do código implementado, a partir de agora ele será utilizado na implementação do controle passivo (seção 4.3) e ativo (seção 4.4) de vibrações.

4.2 Amplitude da onda

O perfil dos BNAs nas estruturas segue uma lei de potência, apresentado na seção 3.1, equação (129), sendo que essa função satisfaz a condição de diminuir suavemente a espessura da estrutura. Contudo, no momento em que a onda se propaga para a extremidade, a amplitude desta onda aumenta significadamente, e, para comprovar isto, utilizou-se a equação (155) para gerar o gráfico da amplitude para dois casos de estruturas (para fins de comparação, D foi tomado como 10^{12}).

O primeiro caso está ilustrado na figura 20, onde o buraco não tem uma espessura fina nas bordas.

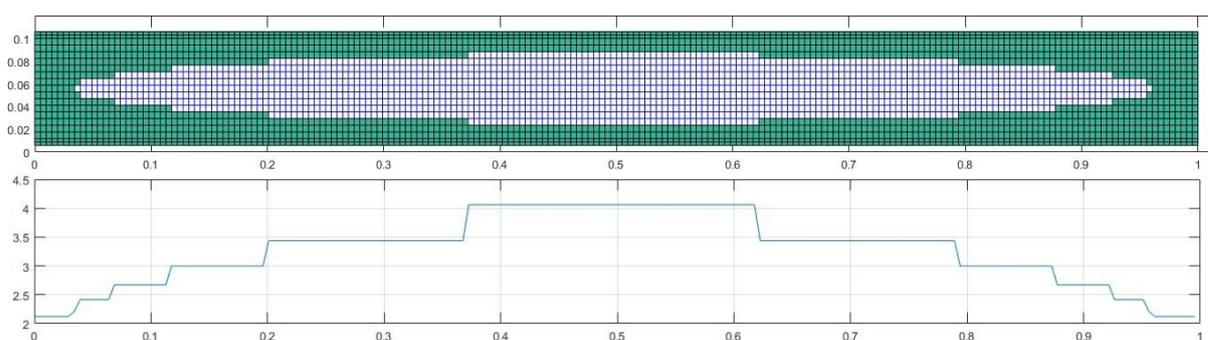


Figura 20: Viga de $1m$ de comprimento e um buraco com sua respectiva amplitude (\hat{W}).

O segundo caso está ilustrado na figura 21, onde a espessura diminui suavemente, com bordas refinadas, e portanto, a amplitude da onda é significativamente maior quando comparada com a da viga apresentada anteriormente.

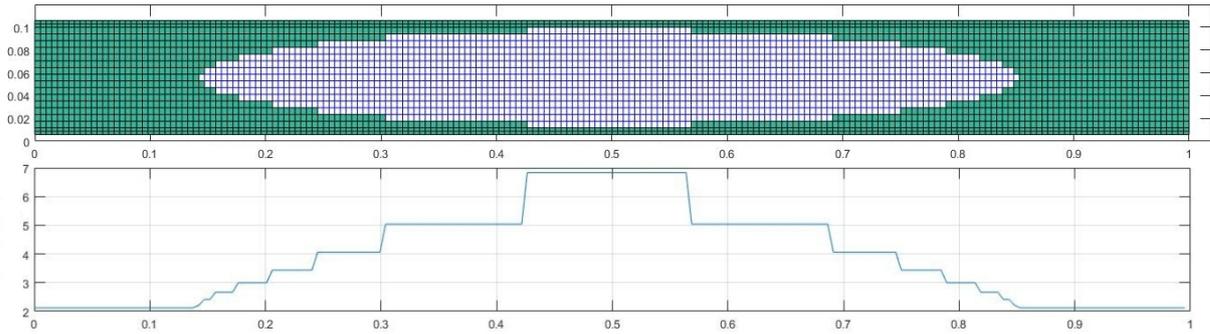


Figura 21: Viga de $1m$ de comprimento e um buraco (bordas refinadas) com sua respectiva amplitude (\tilde{W}).

Sendo assim, considerando que a espessura tenda a zero, a amplitude tenderá ao infinito, mostrando que a amplitude aumenta conforme a espessura diminui, como citado na seção 3.1.

É importante ressaltar, que as figuras 20 e 21 são ilustrativas para mostrar o comportamento da amplitude da onda. Entretanto, numa aplicação real, uma onda que inicia num lado da viga não reflete para além do buraco, ou tem uma mínima reflexão.

4.3 Controle passivo via efeito do BNA

Neste trabalho utilizou-se a técnica dos BNAs para o controle passivo. Como esta é uma técnica de rejeito, ou seja, é feita retirando material da estrutura, implementou-se uma metodologia para mapear os elementos nos locais em que os BNAs foram posicionados e, após isso, zerou-se a rigidez e a massa desses elementos, assim, anulando a contribuição destes elementos na dinâmica estrutural.

Para definir as posições e dimensões dos BNAs usou-se curvas elípticas, que serviram de guia para definir quais elementos fazem parte dos BNAs.

A equação de uma elipse deslocada da origem é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a_c^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b_c^2} = 1, \quad (169)$$

sendo que a_c e b_c são os parâmetros dos eixos, e definem o tamanho do BNA, já x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto central da elipse, e definem o posicionamento do BNA. Na tabela 5 estão apresentadas as coordenadas para cada formato de BNA.

Tabela 5: Coordenadas dos BNAs.

| Quantidade de buracos | a_c^2 | b_c^2 | x_0 sem atuador | x_0 com atuador | y_0 |
|-----------------------|---------|---------|-------------------|-------------------|-----------------|
| Um buraco | 51 | 5200 | $\frac{20}{2}$ | $\frac{22}{2}$ | $\frac{204}{2}$ |
| Dois buracos | 51 | 1300 | $\frac{20}{2}$ | $\frac{22}{2}$ | $\frac{204}{4}$ |
| Três buracos | 51 | 580 | $\frac{20}{2}$ | $\frac{22}{2}$ | $\frac{204}{6}$ |

A escolha do BNA ter forma elíptica se dá pelo fato de que ele segue o formato da lei de potência apresentada em (129) e, além disso, esta forma apresenta uma formulação simples para descrever uma curva.

A fim de analisar qual configuração de buraco é mais adequada para aplicar o controle ativo, serão apresentadas as respostas das amplitudes de todas as configurações dos BNA utilizados neste trabalho. Com isso, irá se avaliar qual configuração apresenta uma menor amplitude de vibração, levando em conta os três primeiros modos não axiais.

Na figura 22 são apresentados os três primeiros modos e a resposta de amplitude da vibração da viga sem buraco.

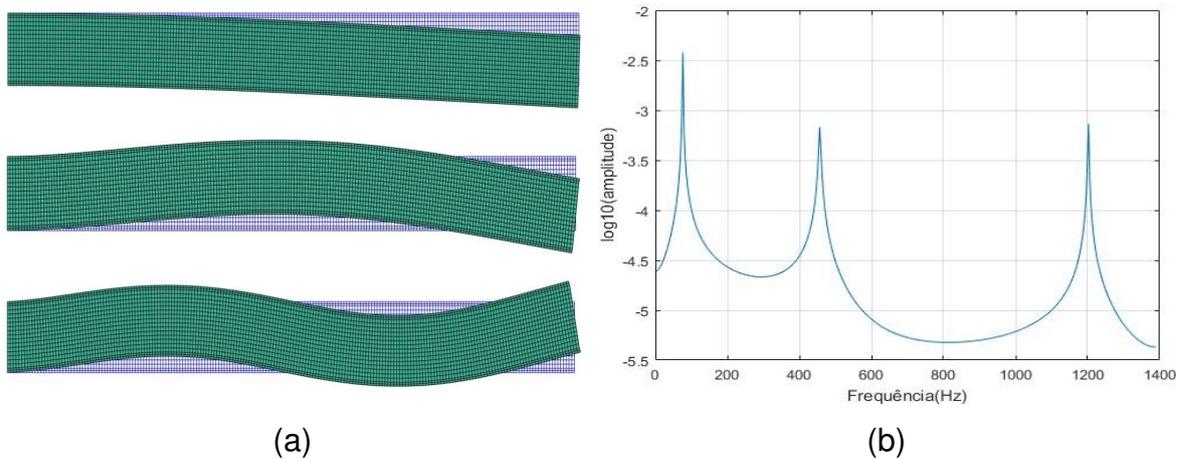


Figura 22: Três primeiros modos (a) e resposta de amplitude da vibração (b) para viga sem buraco.

A primeira configuração de buracos a ser analisada é da viga com um BNA, sendo que os três primeiros modos são mostrados na figura 23-(a) e sua resposta de amplitude é mostrada na figura 23-(b).

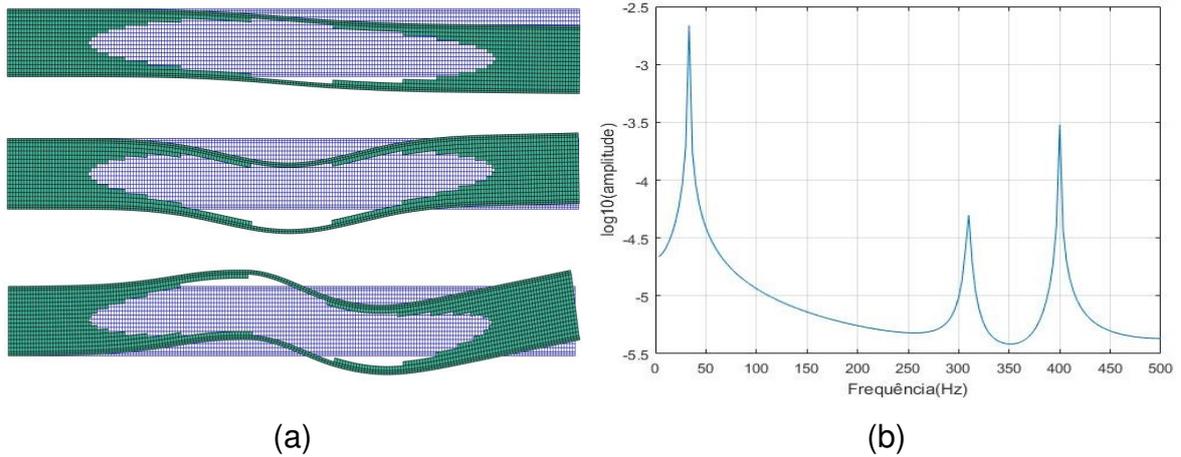


Figura 23: Três primeiros modos (a) e resposta de amplitude da vibração (b) para viga com um BNA.

A segunda configuração de buracos a ser observada é da viga com dois BNAs, sendo que os três primeiros modos dessa viga são mostrados na figura 24-(a) e sua resposta de amplitude é mostrada na figura 24-(b).

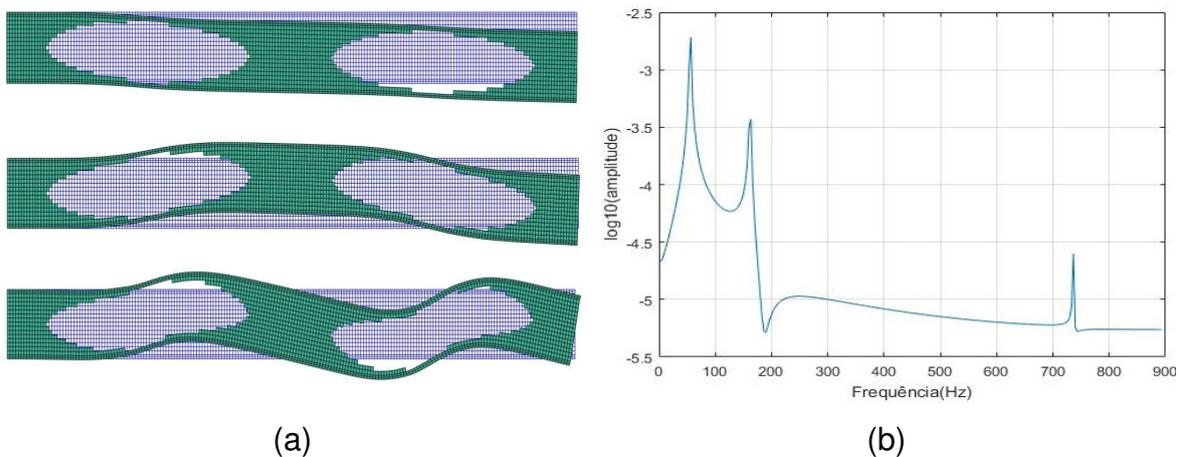


Figura 24: Três primeiros modos (a) e resposta de amplitude da vibração (b) para viga com dois BNAs.

A terceira e última configuração de buracos a ser testada é da viga com três BNAs, sendo que os três primeiros modos são exibidos na figura 25-(a) e sua resposta de amplitude é mostrada na figura 25-(b).

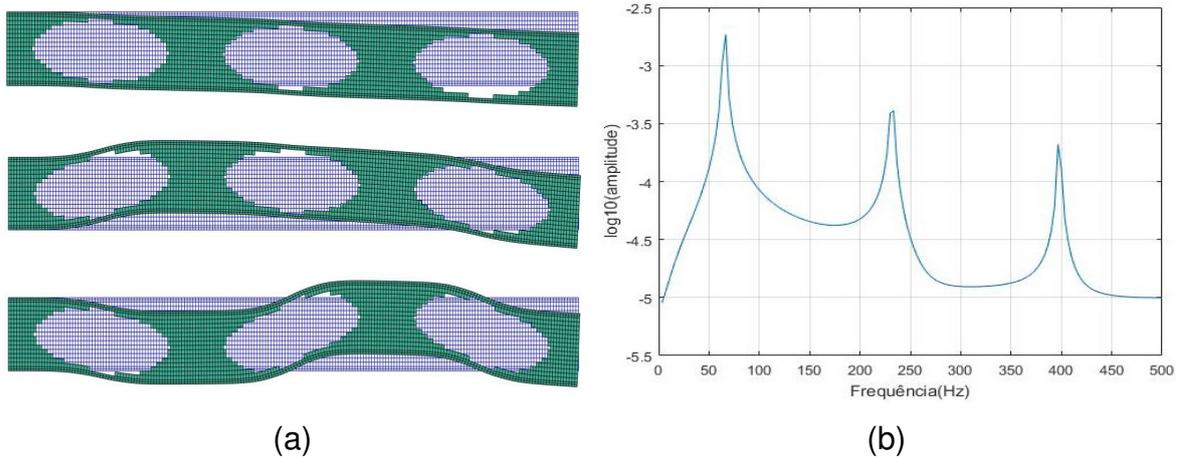


Figura 25: Três primeiros modos (a) e resposta de amplitude da vibração (b) para viga com três BNAs.

Abaixo segue uma tabela com os valores das somas das amplitudes máximas e suas três primeiras frequências naturais para a viga sem buraco e para cada configuração de viga com buracos mostrada acima.

Tabela 6: Resultados dos testes com os BNAs.

| Quantidade de buracos | $A_{\text{máx}}(dB)$ | $\omega_1(Hz)$ | $\omega_2(Hz)$ | $\omega_3(Hz)$ |
|-----------------------|----------------------|----------------|----------------|----------------|
| Sem buraco | -9,32 | 76,16 | 456,58 | 1201,70 |
| Um buraco | -11,13 | 32,99 | 308,56 | 398,36 |
| Dois buracos | -11,15 | 55,47 | 161,92 | 736,15 |
| Três buracos | -10,25 | 65,22 | 231,04 | 396,57 |

Pode-se observar que a configuração com dois buracos apresentou uma melhor resposta, visto que teve uma amplitude máxima de deslocamento transversal menor, quando comparada com as demais.

Apesar de neste trabalho serem considerados apenas três modos de vibração, verificou-se que já houve uma boa atenuação de vibrações quando inserido o/os BNA(s), o que mostra que o efeito na diminuição de vibrações também depende da estrutura a ser utilizada.

4.4 Controle ativo via atuador piezoeletrico e controle RQL

Antes da implementação do controlador RQL, acoplou-se o atuador piezoeletrico na estrutura que obteve melhor resultado após a aplicação do controle passivo (dois BNAs). Assim, adicionou-se 8 elementos nas bordas superior e inferior, onde as características de rigidez e massa foram definidas com base no material PZT5A (citadas na tabela 3). A escolha da posição do atuador piezoeletrico justifica-se pois, assume-se

que a vibração inicia no começo da viga, com isso pretende-se amenizar as oscilações desde o primeiro momento, visto que a medida que a onda entra no BNA, a mesma não é refletida para o restante da estrutura.

Os três primeiros modos desta estrutura com o atuador piezoeletrico estão apresentados na figura 26, e suas frequências naturais são $\omega_1 = 55,46 \text{ Hz}$, $\omega_2 = 160,59 \text{ Hz}$ e $\omega_3 = 732,57 \text{ Hz}$, respectivamente.

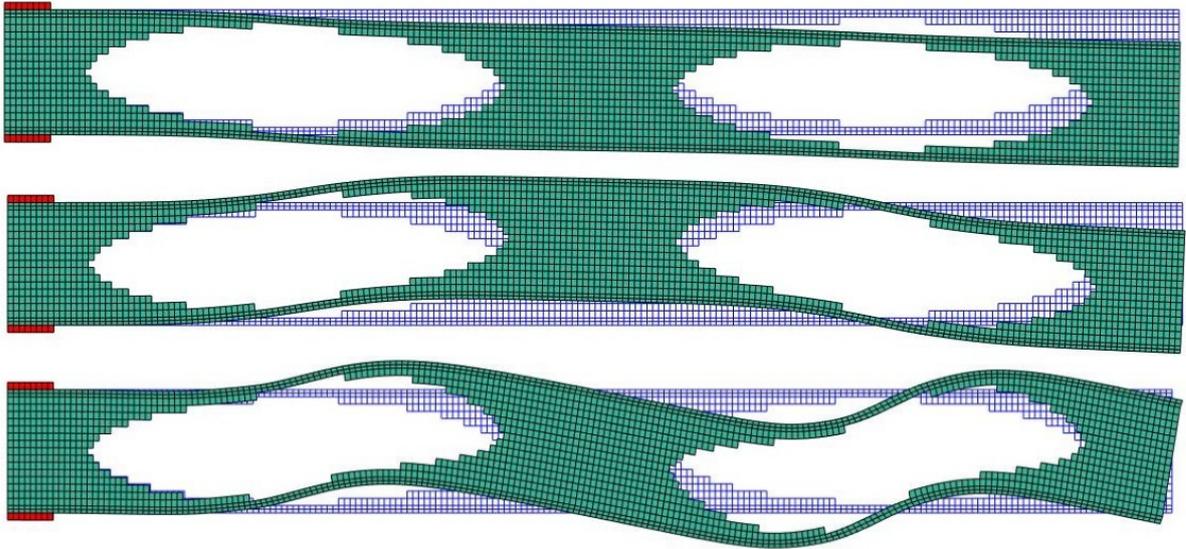


Figura 26: Três primeiros modos para a viga com dois BNAs e com atuador piezoeletrico.

Neste trabalho não há nenhuma carga externa atuando no sistema, entretanto, considerou-se uma condição inicial, apresentada em (62), em que $[q(0) \dot{q}(0)]^T = [0, 1, 0, 1]^T$.

Para a implementação do controle RQL foi definido que as matrizes R e Q_c são identidades, com dimensão 72×72 e dimensão 2×2 multiplicada por 10^{10} , respectivamente. Após o cálculo das matrizes G , considerou-se a equação (161), e assim foi possível reescrever a equação (156-a), como:

$$\dot{\tau} = (A_c - GB)\tau. \quad (170)$$

Após isso, aplicou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem para a resolução do sistema (170), e com as soluções dos deslocamentos modais, foi possível analisar o deslocamento com controle.

O deslocamento dos três primeiros modos da viga com controle ativo são mostrados abaixo. Sem buraco na figura 27 e com dois buracos na figura 28.

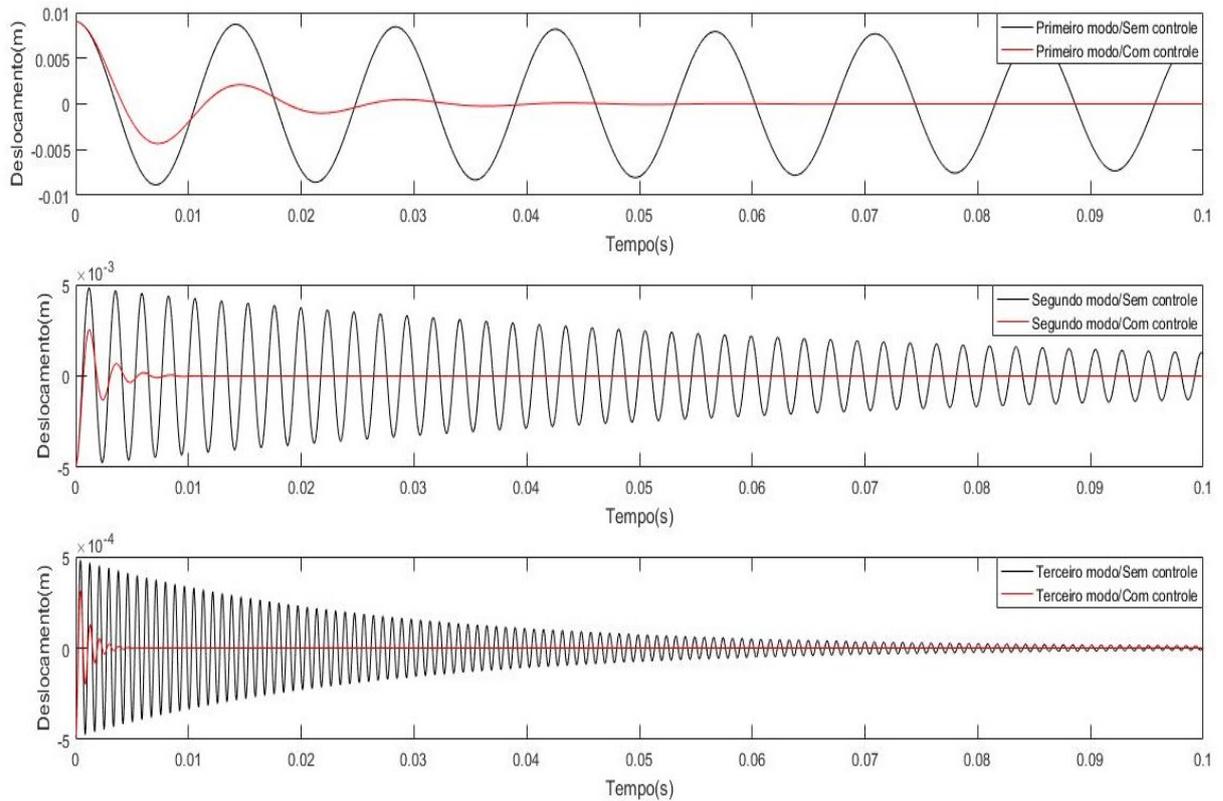


Figura 27: Deslocamento da viga sem BNA e um atuador piezolétrico com e sem controle ativo para os três primeiros modos.

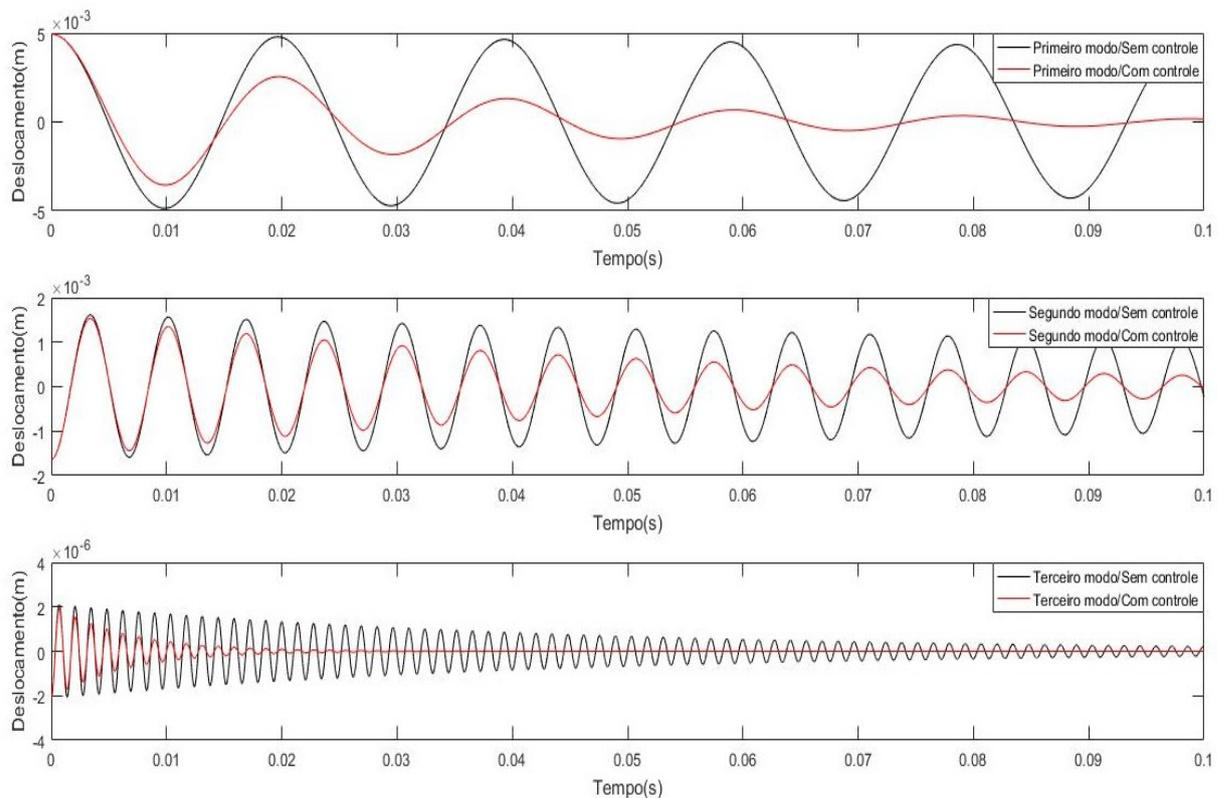


Figura 28: Deslocamento da viga com dois BNAs e um atuador piezolétrico com e sem controle ativo para os três primeiros modos.

Pode-se observar que a vibração reduziu significadamente para todos os modos. O potencial elétrico pode ser calculado a partir da equação (161), que neste trabalho excede os valores para um projeto executável. Isto foi feito desta forma para um estudo qualitativo do controle. Os potenciais elétricos utilizados em projetos reais são inferiores aos praticados neste estudo, o que implica que o controle da vibração ocorre num período de tempo maior.

Por fim, uma última análise foi realizada referente aos valores da matriz Q_c , a fim de verificar como ela interfere na resposta da amplitude, considerando para essa análise somente o primeiro modo. Foram testados valores para $Q_c = \text{diag}(10^7, 10^7)$, $Q_c = \text{diag}(10^8, 10^8)$, $Q_c = \text{diag}(10^9, 10^9)$ e $Q_c = \text{diag}(10^{10}, 10^{10})$, conforme ilustra a figura 29.

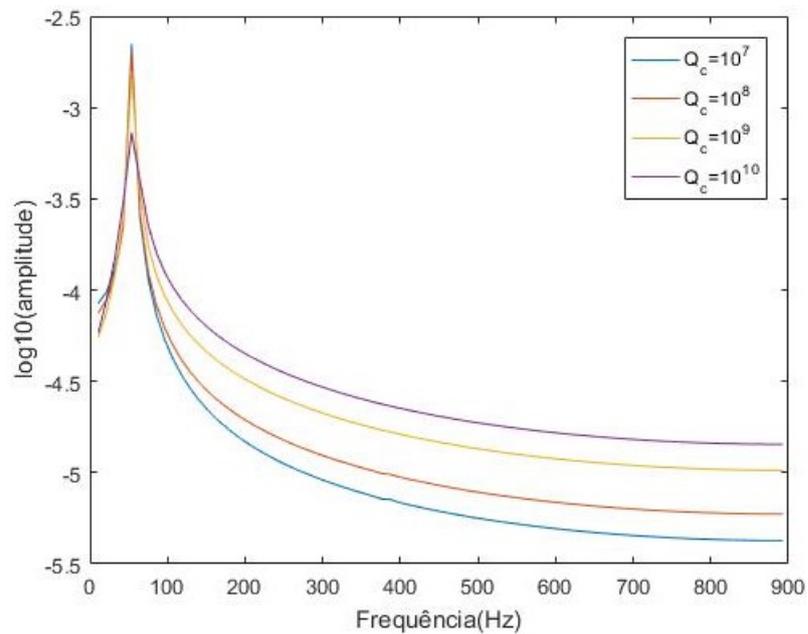


Figura 29: Comparação de amplitudes de vibração para diferentes valores de Q_c .

Vê-se que, quanto maior o valor da matriz Q_c , menor a resposta da amplitude, o que afeta o resultado quando aplicado o controle RQL.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS PARA FUTUROS TRABALHOS

Este trabalho propôs o controle de vibrações, em uma viga engastada, através de duas técnicas de controle, sendo utilizadas simultaneamente, uma de controle passivo, através de buracos nas vigas, e uma de controle ativo, através do acoplamento de atuadores piezelétricos na estrutura.

Foram apresentados alguns resultados teóricos referentes ao controle passivo (usando o efeito dos BNAs) e ao controle ativo (usando como atuador o material piezelétrico). A ideia da técnica dos BNAs é que, quando inseridos buracos na estrutura, a energia da onda é concentrada dentro deste buraco, e assim não há propagação e reflexão da onda na viga. Isto é, a velocidade da onda é reduzida e sua amplitude é aumentada, sendo assim, a vibração fica restrita no interior do buraco. Neste trabalho utilizou-se o método WKB para encontrar as equações que governam o efeito dos BNAs. Em comparação com outros trabalhos, que não utilizaram o método WKB, como os de MIRONOV (1988); KRYLOV; TILMAN (2004); ZHAO; PRASAD (2019), a ideia da amplitude da onda tender ao infinito permanece a mesma, conforme mostrado na equação (155).

De acordo com a tabela 6, a configuração com dois buracos apresentou uma melhor resposta, pois sua amplitude máxima de deslocamento transversal foi menor quando comparada com as demais. Notou-se também, que a utilização da técnica dos BNAs para o controle passivo de vibrações auxiliou na redução das vibrações, visto que houve diminuição da amplitude da onda.

Em relação ao controle ativo, foi proposto a implementação do controlador RQL para operar um atuador piezelétrico. Observou-se que, quando o atuador é acoplado à viga, a frequência dos modos de vibração da viga tem uma leve diminuição e ainda, sem o controle RQL, a vibração se mantém por um tempo superior quando comparada ao deslocamento com o controle (figura 28), o que mostra que o controle RQL foi eficiente ao controlar as vibrações.

Em relação a matriz Q_c , conclui-se que, quando os valores da matriz Q_c são alterados, o controle das vibrações pode ocorrer antes, ou não, dependendo dos valores

desta matriz. Na medida que aumentamos os valores de Q_c , a amplitude de vibração diminui, conforme ilustra a figura 29, afetando diretamente o controle ativo.

Por fim, pode-se observar pela tabela 6 e pelas figuras 26 e 28 que a junção das duas técnicas de controle, tanto ativo como passivo, é o desejado, pois ambas tiveram contribuição na redução das vibrações.

A pesquisa realizada neste trabalho abriu interessantes possibilidades para continuação dos estudos, em trabalhos futuros. Dessa forma, pretende-se averiguar a resistência mecânica das estruturas em estudo e analisar casos do comportamento dos modos de vibração de estruturas otimizadas, com materiais piezelétricos e com os BNAs como restrições de domínio. Além disso, tem-se como ideia analisar o comportamento dos modos de vibração nas mesmas estruturas, mas não otimizadas, porém com buracos, e comparar os resultados entre as estruturas otimizadas e não otimizadas, com diferentes quantidades e geometrias dos BNAs.

Ainda, como continuação desta pesquisa, pode-se desenvolver uma metodologia para otimização da quantidade e geometria dos BNAs e utilizar os materiais piezelétricos, estrategicamente posicionados, como coletores de energia.

REFERÊNCIAS

- ASSIREY, E. A. R. Perovskite synthesis, properties and their related biochemical and industrial application. **Saudi Pharmaceutical Journal**, [S.l.], v.27, n.6, p.817–829, 2019.
- BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. **Vibrações mecânicas**. Toronto: Cengage Learning, 2011. 616p.
- CHANDRAN, P. S.; THAMPAN, P. V. A study on vibration control of structures due to seismic excitation using tuned mass damper. **International Journal of Scientific & Engineering Research**, [S.l.], v.8, n.11, p.105–112, 2017.
- CHANDRASEKHARAIHAH, D. S.; DEBNATH, L. **Continuum mechanics**. Boston: Academic Press, 1994. 595p.
- CLAEYSSSEN, J.; GALLICCHIO, E.; TAMAGNA, A. **Sistemas vibratórios amortecidos**. Porto Alegre: UFRGS, 2004. 141p.
- DENIS, V. **Vibration damping in beams using the acoustic black hole effect**. 2014. 149p. Tese de Doutorado em Acústica — Université du Maine, France.
- DUBAY, R.; HASSAN, M.; LI, C.; CHAREST, M. Finite element based model predictive control for active vibration suppression of a one-link flexible manipulator. **ISA Transactions**, [S.l.], v.53, n.5, p.1609–1619, 2014.
- FERNANDEZ, L. d. S. **Otimização topológica simultânea à localização de atuadores em estruturas**. 2015. 131p. Dissertação de Mestrado em Modelagem Matemática — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.
- GAWRONSKI, W. K. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 411p.
- GONÇALVES, J. F.; LEON, D. M. D.; PERONDI, E. A. A simultaneous approach for compliance minimization and piezoelectric actuator design considering the polarization

profile. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S.I.], v.121, n.2, p.334–353, 2019.

GUZMÁN, D. G.; SILVA, E. C. N.; RUBIO, W. M. Topology optimization of piezoelectric sensor and actuator layers for active vibration control. **Smart Materials and Structures**, [S.I.], v.29, n.8, p.085009, 2020.

HAERTLING, G. H. Ferroelectric Ceramics: History and Technology. **Journal of the American Ceramic Society**, [S.I.], v.82, n.4, p.797–818, 1999.

HAO, J.; LI, W.; ZHAI, J.; CHEN, H. Progress in high-strain perovskite piezoelectric ceramics. **Materials Science and Engineering: R: Reports**, [S.I.], v.135, p.1–57, 2019.

HE, M.; ZHANG, X.; SANTOS FERNANDEZ, L. dos; MOLTER, A.; XIA, L.; SHI, T. Multi-material topology optimization of piezoelectric composite structures for energy harvesting. **Composite Structures**, [S.I.], v.265, p.113783, 2021.

HERRMANN, C.; DEWULF, W.; HAUSCHILD, M.; KALUZA, A.; KARA, S.; SKERLOS, S. Life cycle engineering of lightweight structures. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, [S.I.], v.67, n.2, p.651–672, 2018.

HIRUTA, T.; HOSOYA, N.; MAEDA, S.; KAJIWARA, I. Experimental validation of vibration control in membrane structures using dielectric elastomer actuators in a vacuum environment. **International Journal of Mechanical Sciences**, [S.I.], v.191, p.106049, 2021.

HOMAYOUNI-AMLASHI, A.; SCHLINQUER, T.; MOHAND-OUSAIID, A.; RAKOTONDRABE, M. 2D topology optimization MATLAB codes for piezoelectric actuators and energy harvesters. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.I.], v.63, p.983–1014, 2020.

HU, J.; ZHANG, X.; KANG, Z. Layout design of piezoelectric patches in structural linear quadratic regulator optimal control using topology optimization. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, [S.I.], v.29, n.10, p.2277–2294, 2018.

HU, Y.; KANG, W.; FANG, Y.; XIE, L.; QIU, L.; JIN, T. Piezoelectric Poly(vinylidene fluoride) (PVDF) Polymer-Based Sensor for Wrist Motion Signal Detection. **Applied Sciences**, [S.I.], v.8, n.5, p.836, 2018.

HU, Y.-R.; NG, A. Active robust vibration control of flexible structures. **Journal of Sound and Vibration**, [S.I.], v.288, n.1-2, p.43–56, 2005.

IEEE Standard on Piezoelectricity. **ANSI/IEEE Std 176-1987**, [S.I.], 1988.

KELLY, S. **Vibrações mecânicas**: teorias e aplicações. São Paulo: Cengage Learning, 2017. 560p.

KRYLOV, V.; TILMAN, F. Acoustic 'black holes' for flexural waves as effective vibration dampers. **Journal of Sound and Vibration**, [S.l.], v.274, n.3-5, p.605–619, 2004.

LIPPMANN, M. G. Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques. **Journal de Physique Théorique et Appliquée**, [S.l.], v.10, n.1, p.381–394, 1881.

LIU, G. R.; QUEK, S. **The finite element method**: a practical course. Oxford Boston: Butterworth-Heinemann, 2013. 433p.

MASE, G. T.; SMELSER, R. E.; MASE, G. E. **Continuum Mechanics for Engineers**. Boca Raton: CRC Press, 2010. 399p.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of vibrations**. Boston: McGraw-Hill, 2001. 826p.

MENDONÇA, P. d. T. R.; FANCELLO, E. A. **O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos**. Florianópolis: Orsa Maggiore, 2019. 690p.

MENUZZI, O. **Metodologia para localização de atuadores/sensores piezelétricos para o controle de vibrações via otimização topológica**. 2014. 157p. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

MIRONOV, M. A. Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval. **Soviet Physics Acoustics-USSR**, [S.l.], v.34, n.3, p.318–319, 1988.

MIRONOV, M. A.; PISLYAKOV, V. V. One-dimensional acoustic waves in retarding structures with propagation velocity tending to zero. **Acoustical Physics**, [S.l.], v.48, n.3, p.347–352, 2002.

MOHAMMADREZAZADEH, S.; JAFARI, A. A. Active vibration control of rotating laminated composite truncated conical shells through magnetostrictive layers based on first-order shear deformation theory. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, [S.l.], v.42, n.6, p.304, 2020.

MOHEIMANI, S. R.; FLEMING, A. J. **Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping**. London: Springer, 2006. 271p.

MOLTER, A. **Controle de manipuladores robóticos flexíveis usando atuadores e sensores piezelétricos otimizados**. 2008. 136p. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

MOLTER, A.; FONSECA, J. S. O.; SANTOS FERNANDEZ, L. dos. Simultaneous topology optimization of structure and piezoelectric actuators distribution. **Applied Mathematical Modelling**, [S.l.], v.40, n.9-10, p.5576–5588, 2016.

MOLTER, A.; SANTOS FERNANDEZ, L. dos; LAUZ, J. B. An optimality criteria-based method for the simultaneous optimization of the structural design and placement of piezoelectric actuators. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.59, n.4, p.1125–1141, 2018.

MOLTER, A.; SILVEIRA, O. A. A. da; FONSECA, J. S. O.; BOTTEGA, V. Simultaneous Piezoelectric Actuator and Sensor Placement Optimization and Control Design of Manipulators with Flexible Links Using SDRE Method. **Mathematical Problems in Engineering**, [S.l.], v.2010, p.1–23, 2010.

MORSCH, I. B.; AWRUCH, A. M.; LINN, R. V. **Teoria da Elasticidade Aplicada à Mecânica Estrutural**. Porto Alegre: UFRGS, 2018. 316p.

NAIDU, D. S. **Optimal control systems**. Boca Raton: CRC Press, 2003. 460p.

NICOLETTI, R. **Estudo do controle ativo e passivo de vibrações em sistemas rotativos e estruturais**. 2013. 185p. Título de Livre Docente na área de Dinâmica de Máquinas: Modelos e Análise de Respostas — Universidade de São Paulo, São Carlos.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2014. 809p.

OU, J. S.; KIKUCHI, N. Optimal design of controlled structures. **Structural Optimization**, [S.l.], v.11, n.1-2, p.19–28, 1996.

PADOIN, E. **Otimização topológica de cascas compostas laminadas com atuador piezoelétrico para o controle de vibrações**. 2014. 197p. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

PELAT, A.; GAUTIER, F.; CONLON, S. C.; SEMPERLOTTI, F. The acoustic black hole: A review of theory and applications. **Journal of Sound and Vibration**, [S.l.], v.476, p.115316, 2020.

PEÑA, L. A. P. **Resposta dinâmica de edificações adjacentes acopladas**: considerações sobre a interação solo-estrutura. 2017. 240p. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil — Universidade de Brasília, Distrito Federal.

PERLINGEIRO, A. R.; PIMENTA, G. M.; SILVA, S. E. da. **Geração de energia através de materiais piezoelétricos**. 2016. 62p. Trabalho de Conclusão de Curso em

Engenharia Mecânica — Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET), Rio de Janeiro.

PIEFORT, V. **Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures**. 2001. 154p. Tese de Doutorado em Ciências Aplicadas — Université Libre de Bruxelles, Bruxelles.

PIERCE, A. D. Physical Interpretation of the WKB or Eikonal Approximation for Waves and Vibrations in Inhomogeneous Beams and Plates. **The Journal of the Acoustical Society of America**, [S.l.], v.48, n.1B, p.275–284, 1970.

PREUMONT, A. **Vibration Control of Active Structures**. Berlin: Springer-Verlag, 2011. 436p.

RAO, S. **Vibrações mecânicas**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009. 449p.

ROSA, G. S. da. **Modelagem matemática de circuitos elétricos equivalentes em plantas**. 2020. 64p. Dissertação de Mestrado em Modelagem Matemática — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

SHABANA, A. A. **Vibration of Discrete and Continuous Systems**. New York: Springer, 1996. 407p.

SILVEIRA, O. A. d. **Projeto simultâneo de otimização topológica e controle para redução de vibrações utilizando material piezelétrico**. 2012. 131p. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SORIANO, H. L. **Elementos finitos**: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009. 411p.

SOUZA, M. R. **Variability in the dynamic response of connected structures possessing spatially slowly varying properties**. 2018. 187p. Tese de Doutorado em Filosofia — University of Southampton, Southampton.

TIAN, J.; GUO, Q.; SHI, G. Laminated piezoelectric beam element for dynamic analysis of piezolaminated smart beams and GA-based LQR active vibration control. **Composite Structures**, [S.l.], v.252, p.112480, 2020.

TIERSTEN, H. F. **Linear Piezoelectric Plate Vibrations**. New York: Springer, 1969. 216p.

TZOU, H.; TSENG, C. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: A piezoelectric finite element approach. **Journal of Sound and Vibration**, [S.l.], v.138, n.1, p.17–34, 1990.

WALD, R. M. **General Relativity**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1984. 495p.

WEIMANN, T.; DOMINGUES, R. K.; MOLTER, A. Controle de vibrações em vigas usando buracos prescritos e atuadores piezoelétricos. **Revista Brasileira de Computação Aplicada**, [S.l.], v.13, n.2, p.113–121, 2021.

YANG, J. **An Introduction to the Theory of Piezoelectricity**. Boston: Springer, 2005. 309p.

ZHANG, S.; LI, F.; YU, F.; JIANG, X.; LEE, H.-Y.; LUO, J.; SHROUT, T. R. Recent Developments in Piezoelectric Crystals. **Journal of the Korean Ceramic Society**, [S.l.], v.55, n.5, p.419–439, 2018.

ZHANG, X.; TAKEZAWA, A.; KANG, Z. Topology optimization of piezoelectric smart structures for minimum energy consumption under active control. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.58, n.1, p.185–199, 2017.

ZHAO, C.; PRASAD, M. Acoustic Black Holes in Structural Design for Vibration and Noise Control. **Acoustics**, [S.l.], v.1, n.1, p.220–251, 2019.

ZHU, X. Piezoelectric ceramics materials: processing, properties, characterization, and applications. In: **Piezoelectric materials** : structure, properties, and applications. New York: Nova Science Publishers, Inc, 2010. p.36.

ANEXO A CÁLCULO DAS DERIVADAS

A equação a ser derivada pela regra do produto é:

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E_c I(x) \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{W}(x) e^{-i\theta(x)}}_{\text{auxiliar 1}} \right]}_{\text{auxiliar 2}} - \omega_a^2 \rho A(x) \tilde{W}(x) e^{-i\theta(x)} = 0.$$

Resolvendo o auxiliar 1:

- Primeira derivada:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) e^{-i\theta(x)} - i \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \right].$$

- Segunda derivada:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) e^{-i\theta(x)} - 2i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} - i \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} - \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 e^{-i\theta(x)}.$$

Resolvendo o auxiliar 2:

- Primeira derivada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ E_c \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) e^{-i\theta(x)} - 2i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \right. \right. \\ & \left. \left. - i \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} - \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 e^{-i\theta(x)} \right] + E_c I(x) \left[\left(\frac{d^3}{dx^3} \tilde{W}(x) \right) e^{-i\theta(x)} \right. \right. \\ & \left. \left. - 3i \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} - 3i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \right. \right. \\ & \left. \left. - 3 \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 e^{-i\theta(x)} - i \tilde{W}(x) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 3 \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} + i \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^3 e^{-i\theta(x)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

• Segunda derivada:

$$\begin{aligned}
& E_c \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) e^{-i\theta(x)} - 2i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \right. \\
& - i \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} - \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 e^{-i\theta(x)} \left. \right] + 2 E_c \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) \left[\left(\frac{d^3}{dx^3} \tilde{W}(x) \right) e^{-i\theta(x)} \right. \\
& - 3i \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} - 3i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \\
& - 3 \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 e^{-i\theta(x)} - i \tilde{W}(x) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \\
& \left. - 3 \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} + i \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^3 e^{-i\theta(x)} \right] \\
& + E_c I(x) \left[\left(\frac{d^4}{dx^4} \tilde{W}(x) \right) e^{-i\theta(x)} + 4i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^3 e^{-i\theta(x)} \right. \\
& + 6i \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 e^{-i\theta(x)} \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) - 4i \left(\frac{d^3}{dx^3} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \\
& - 6 \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 e^{-i\theta(x)} - 6i \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \\
& - i \tilde{W}(x) \left(\frac{d^4}{dx^4} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} - 12 \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \\
& - 4i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} - 4 \tilde{W}(x) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{-i\theta(x)} \\
& \left. - 3 \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right)^2 e^{-i\theta(x)} + \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^4 e^{-i\theta(x)} \right].
\end{aligned}$$

Simplificando, tem-se:

$$\begin{aligned}
& E e^{-i\theta(x)} \left[2i \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^3 \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) + \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^4 \tilde{W}(x) I(x) \right. \\
& - 6i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) + 4i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^3 I(x) \\
& - 6i \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) I(x) - \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 \tilde{W}(x) \\
& + 6i \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) I(x) - 6 \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 I(x) \\
& \left. - 6i \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) - i \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6 \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) - 12 \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) I(x) \\
& \quad - 2i \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) - i \tilde{W}(x) I(x) \left(\frac{d^4}{dx^4} \theta(x) \right) \\
& -6 \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) - 4 \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \tilde{W}(x) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) I(x) \\
& \quad - 2i \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) - 3 \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right)^2 I(x) \\
& \quad - 4i \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \tilde{W}(x) \right) I(x) - 4i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) I(x) \\
& \quad + \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) + 2 \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \tilde{W}(x) \right) + I(x) \left(\frac{d^4}{dx^4} \tilde{W}(x) \right) \Big].
\end{aligned}$$

Separando a parte real e a parte imaginária, e ainda igualando-as à zero, obtém-se:

- Parte real:

$$\begin{aligned}
& E_c e^{-i\theta(x)} \left[\left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^4 \tilde{W}(x) I(x) - \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 \tilde{W}(x) \right. \\
& \quad - 6 \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 I(x) - 6 \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) \\
& \quad - 12 \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) I(x) - 6 \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) \\
& \quad - 4 \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \tilde{W}(x) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) I(x) - 3 \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right)^2 I(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \\
& \quad \left. + 2 \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \tilde{W}(x) \right) + I(x) \left(\frac{d^4}{dx^4} \tilde{W}(x) \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

- Parte imaginária:

$$\begin{aligned}
& E_c e^{-i\theta(x)} \left[-2i \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) - i \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) \right. \\
& \quad - 6i \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) + 6i \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) I(x) \\
& \quad + 4i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^3 I(x) + 2i \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^3 \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) \\
& \quad - 4i \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \tilde{W}(x) \right) I(x) - 2i \tilde{W}(x) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) \\
& \quad - 6i \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) I(x) - i \tilde{W}(x) I(x) \left(\frac{d^4}{dx^4} \theta(x) \right) \\
& \quad \left. - 6i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) - 4i \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) I(x) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Em termos de validade da suposição do método de WKB, o valor absoluto dos termos negligenciados da parte real deve ser muito menor que um (SOUZA, 2018), assim:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{|\omega_a^2 \rho A(x) \tilde{W}(x)|} - \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 \tilde{W}(x) - 6 \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 I(x) \right. \\
& - 6 \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) - 12 \left(\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) I(x) \\
& - 6 \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) - 4 \left(\frac{d}{dx} \theta(x) \right) \tilde{W}(x) \left(\frac{d^3}{dx^3} \theta(x) \right) I(x) \\
& - 3 \tilde{W}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right)^2 I(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} I(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \tilde{W}(x) \right) + 2 \left(\frac{d}{dx} I(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \tilde{W}(x) \right) \\
& \left. + I(x) \left(\frac{d^4}{dx^4} \tilde{W}(x) \right) \right| \ll 1.
\end{aligned}$$

Controle de vibrações em vigas usando o efeito de Buracos Negros Acústicos e atuadores piezelétricos

– Tatiane Weimann



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Controle de vibrações em vigas usando o efeito de Buracos Negros Acústicos e atuadores piezelétricos

TATIANE WEIMANN

Pelotas, 2022