

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Faculdade de Educação

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Mestrado Profissional



Dissertação

ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA AUXILIADO

PELA GEOMETRIA COMPUTACIONAL:

Uma sequência didática desenvolvida com o uso do GeoGebra.

Débora Marília Hauenstein

Pelotas, 2022.

Débora Marília Hauenstein

**ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA AUXILIADO
PELA GEOMETRIA COMPUTACIONAL:**

Uma sequência didática desenvolvida com o uso do GeoGebra.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: André Luis Andrejew Ferreira

Pelotas, 2022.

DÉBORA MARÍLIA HAUENSTEIN

ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA AUXILIADO

PELA GEOMETRIA COMPUTACIONAL:

Uma sequência didática desenvolvida com o uso do GeoGebra.

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 23 de agosto de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Raimundo Carlos Machado Ferreira Filho - PPGECCED/IFSul – CAVG

Prof. Dr. Marcelo Batista de Souza - UFRR

Prof^a. Dr^a. Denise Nascimento Silveira - PPGECCM/UFPeI

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

H368e Hauenstein, Débora Marília

Ensino de geometria analítica auxiliado pela geometria computacional : uma sequência didática desenvolvida com o uso do geogebra / Débora Marília Hauenstein ; André Luis Andrejew Ferreira, orientador. — Pelotas, 2022.

166 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Pelotas, 2022.

1. Geometria analítica. 2. Geogebra. 3. Geometria computacional. 4. Sequência didática. 5. Educação matemática. I. Ferreira, André Luis Andrejew, orient. II. Título.

CDD : 516.3

Resumo

HAUENSTEIN, Débora Marília. **Ensino da Geometria Analítica Auxiliado pela Geometria Computacional: Uma sequência didática desenvolvida com o uso do GeoGebra**. Orientador: André Luis Andrejew Ferreira. 2022. 127 f. Dissertação. Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – Profissional. Faculdade de Educação, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

A presente pesquisa objetiva desenvolver, aplicar e analisar uma prática didática utilizando recursos da tecnologia da informação e comunicação, com auxílio do software GeoGebra e de tópicos da geometria computacional, para identificar elementos que possam contribuir para a melhoria dos índices de desempenho, e entendimento das dificuldades de aprendizagem, dos discentes matriculados na disciplina Geometria Analítica do Ensino Superior. O referencial teórico foi baseado na identificação de dificuldades de aprendizagem de estudantes em relação a conteúdos e em como as tecnologias educacionais poderiam contribuir para seu ensino, dando ênfase para recursos da geometria computacional e para experiências que usam o GeoGebra. A investigação é de cunho qualitativo, ancorada na pesquisa documental por meio de revisões bibliográficas que fundamentam as problemáticas de aprendizagem e as estratégias de ensino utilizadas na produção de uma sequência didática. Também realiza-se um estudo que envolve a aplicação desse produto com sujeitos de pesquisa do curso de graduação de Licenciatura em Matemática que estão cursando a disciplina Geometria Analítica em um Instituto Federal situado no Rio Grande do Sul. Na execução da pesquisa foram utilizados como instrumentos para coleta de dados listas de exercícios com questões discursivas e objetivas, além de construções elaboradas com o GeoGebra ao longo das aulas. Os resultados apontam um aumento na entrega de atividades dos estudantes e o despertar do interesse frente ao uso dos recursos computacionais em sala de aula. A prática apresenta indícios de que pode qualificar o processo de ensino dos conteúdos, tornando-o dinâmico e participativo para o estudante, proporcionando liberdade e pensamento crítico ao solucionar questões matemáticas da Geometria Analítica. Ao fim, indicamos alguns possíveis trabalhos futuros que podem dar continuidade ao estudo.

Palavras-chave: Geometria Analítica; GeoGebra; Geometria Computacional; Sequência Didática; Educação Matemática.

Abstract

HAUENSTEIN, Débora Marília. **Teaching Analytical Geometry Aided by Computational Geometry: A didactic sequence developed using GeoGebra.**

Advisor: André Luis Andrejew Ferreira. 2022. 127 f. Dissertation. Master in Science and Mathematics Teaching - Professional. Faculdade de Educação, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

The present research aims to develop, apply and analyze a didactic practice using information and communication technology resources, with the help of GeoGebra software and computational geometry topics, to identify elements that can contribute to the improvement of performance indices, and understanding of the learning difficulties, of students enrolled in the discipline Analytical Geometry of Higher Education. The theoretical framework was based on the identification of students' learning difficulties in relation to content and on how educational technologies could contribute to their teaching, emphasizing computational geometry resources and experiences using GeoGebra. The investigation is of a qualitative nature, anchored in documental research through bibliographic reviews that support the learning issues and teaching strategies used in the production of a didactic sequence. A study is also carried out that involves the application of this product with research subjects from the Mathematics Degree course who are studying Analytical Geometry at a Federal Institute located in Rio Grande do Sul. In carrying out the research, lists of exercises with discursive and objective questions were used as instruments for data collection, as well as constructions developed with GeoGebra throughout the classes. The results point to an increase in the delivery of student activities and the awakening of interest in the use of computing resources in the classroom. The practice shows evidence that it can qualify the content teaching process, making it dynamic and participatory for the student, providing freedom and critical thinking when solving mathematical issues of Analytical Geometry. At the end, we indicate some possible future works that can continue the study.

Keywords: Analytical Geometry; GeoGebra; Computational Geometry; Didactic Sequence; Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Comparação entre o desempenho brasileiro e a média da OCDE.	15
Figura 2 - Currículo Referência para o Ensino Infantil e Fundamental.	37
Figura 3 - Currículo Referência para o Ensino Médio.	38
Figura 4 - Mapeamento de Pontos	44
Figura 5 - Modelo Computacional de um Manequim de Frente.....	44
Figura 6 - Modelo Computacional de um Manequim de Perfil.....	45
Figura 7 - Pesquisa em Educação Matemática que agrega métodos quantitativos e qualitativos.	62
Figura 8 - Representação gráfica de um vetor.	72
Figura 9 - Dependência e Independência Linear entre um par de vetores.....	73
Figura 10 - Dependência e Independência Linear entre uma tripla de vetores.	73
Figura 11 - Vetor, Paralelismo e Norma	74
Figura 12 - Grade de retas para mapeamento de pontos	74
Figura 13 - Retas que passam por um ponto	76
Figura 14 - Reta definida por dois pontos	76
Figura 15 - Vetor diretor da reta definida por dois pontos.	77
Figura 16 - Representação da Equação Vetorial da Reta.	77
Figura 17 - Múltiplos planos passam por dois pontos	80
Figura 18 - Três pontos não colineares definem um plano	81
Figura 19 - Vetores diretores do Plano.....	81
Figura 20 - Representação da Equação Vetorial do Plano.	82
Figura 21 - Mapeamento de pontos no Exercício.....	84
Figura 22 - Intersecção entre retas	85
Figura 23 - Intersecção entre reta e plano	86
Figura 24 - Planos paralelos e transversais	87
Figura 25 - Grade para Mapeamento de Pontos	88
Figura 26 - Garrafa com marcações dos pontos de interesse.....	89
Figura 27 - Planos paralelos traçados com o uso do GeoGebra.....	90
Figura 28 - Planos perpendiculares com o uso do GeoGebra.....	91
Figura 29 - Grade de planos tridimensional no GeoGebra.....	92
Figura 30 - Mapeamento do contorno da garrafa.....	93

Figura 31 - Modelo computacional gráfico da garrafa	94
Figura 32 - Distribuição do número de acertos dos alunos.	97
Figura 33 - Distribuição do número de acertos dos alunos.	99
Figura 34 - Alternativas indicadas em cada questão analisada.....	102

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Pontuação do Brasil no Pisa de 2000 até 2018.	14
Tabela 2 - Ranking e notas de alguns países participantes do Pisa 2018.	14
Tabela 3 - Percentual de reprovação nas disciplinas em comum entre licenciatura e bacharelado da UFG – 2014/1 a 2017/2.	17
Tabela 4 - Frequência percentual do nível de ensino investigado e conteúdos abordados em pesquisas sobre o ensino de Geometria Analítica com TDIC	31
Tabela 5 - Revisão bibliográfica sobre dificuldades de aprendizagem em Geometria Analítica.....	58
Tabela 6 - Artigos estudados na revisão bibliográfica sobre as experiências didáticas desenvolvidas com o GeoGebra para o tratamento das dificuldades em Geometria Analítica	59
Tabela 7 - Livros que fundamentaram os conteúdos de Geometria Analítica.	70
Tabela 8 - Número de acertos de cada aluno.	96
Tabela 9 - Análise estatística descritiva do número de acertos.....	97
Tabela 10 - Quantidade de alunos que acertou cada questão.....	99
Tabela 11 - Análise estatística descritiva do número de acertos de cada questão.	100
Tabela 12 - Alternativas indicadas em cada questão	102

LISTA DE ABREVIATURAS

ARAMIS	Ambiente de Aprendizagem de Computação Gráfica a Distância
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEFET/MG	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Cieb	Centro de Inovação para a Educação Brasileira
FAPESP	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
GPS	Global Positioning System
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
OECD	Organization for Economic Cooperation and Development
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
Pisa	Programme for International Student Assessment
SciELO	Scientific Electronic Library Online
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
UFG	Universidade Federal de Goiás
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRR	Universidade Federal de Roraima
Unesp	Universidade Estadual Paulista
UNIPAMPA	Universidade Federal do Pampa

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
2. OBJETIVOS.....	22
2.1 Problema de Pesquisa	22
2.2 Objetivo Geral	23
2.3 Objetivos Específicos	23
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	25
3.1. Dificuldades de aprendizado em Geometria Analítica.....	25
3.2. O Ensino com Recursos Tecnológicos.....	33
3.3. Geometria Computacional como Recurso Pedagógico.....	40
3.4. Experiências no Ensino da Geometria Analítica com o GeoGebra	45
4. METODOLOGIA DE PESQUISA.....	54
4.1 Procedimentos Metodológicos	54
4.2 Revisão Bibliográfica.....	56
4.3. Pesquisa Quantitativa	61
4.4 Pesquisa Qualitativa.....	63
5. DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE.....	66
5.1 O Tratamento das Dificuldades de Aprendizado	66
5.2 Proposta de Sequência Didática	69
5.2.1 Aula 1: Vetores e o Estudo da Reta.....	71
5.2.2 Aula 2: Estudo da Equação do Plano	79
5.2.3 Aula 3: Construção da Grade Tridimensional	85
5.2.4 Aula 4: Modelo Computacional Gráfico de um sólido de Revolução	89
6. ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS.....	95
6.1 Análise Quantitativa	96
6.2 Análise Qualitativa.....	104
6.2.1 Mapeamento de Pontos.....	106
6.2.2 Definição de Retas e Planos.....	108
6.2.3 Entendimento das Diferentes Equações da Reta e do Plano	110
6.2.4 Resolução de Sistema por Meio de Experimentos com o Geogebra.....	112
6.3 Conclusões e Trabalhos Futuros.....	114
7. REFERÊNCIAS.....	116

ANEXOS	124
Anexo A: Folha de exercícios da aula 1	125
Anexo B: Folha de exercícios da aula 2	126
Anexo C: Folha de exercícios da aula 3.....	127
APÊNDICES	128

1. INTRODUÇÃO

Diversos estudos apontam que a matemática pode ser considerada uma disciplina de difícil entendimento para os discentes brasileiros. Como exemplo, destacamos o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), tradução de Programme for International Student Assessment (INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA, 2022), que é um estudo comparativo internacional realizado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) a cada três anos (ORGANIZATION FOR ECONOMIC COOPERATION AND DEVELOPMENT, 2022).

O Pisa promove a coleta de informações sobre o desempenho acadêmico nas áreas de leitura, matemática e ciências de estudantes na faixa etária dos 15 anos, idade em que se espera que o ensino básico esteja concluído, na maioria dos países. Além disso, essa pesquisa contextualiza os dados levantados com as propostas que estão relacionadas à aprendizagem, dentro e fora da escola.

O Pisa é uma avaliação internacional, organizada sem apreciar as particularidades da educação brasileira. Devemos ter consciência de que a pesquisa realizada pela OCDE com as informações coletadas não é direcionada para a realidade nacional. No entanto, os dados levantados ainda podem ser qualificados e possuem valor para análise da dificuldade que existe no ensino da matemática.

Waiselfisz (2009) estudou os dados do Programme for International Student Assessment de 2006 e observou que o desempenho dos estudantes brasileiros do ensino básico, em ciências exatas, é inferior à média mundial, sendo que 55% dos alunos não atingiram o nível básico de proficiência em ciências e 68,1% estão no pior nível de proficiência em matemática. Nogueira (2018) realizou uma análise semelhante com os dados de 2015 e observou que o país ocupou apenas a 66ª posição no ranking que avaliou o desempenho de 70 países.

... podemos observar que os resultados da América Latina encontram-se bem distantes dos países da OCDE: algo perto de 100 pontos em 500 (média estatística da OCDE para a construção das escalas de proficiência). Inclusive o Chile, país latino-americano que apresentou os resultados mais elevados, encontra-se ainda distante, nas três áreas, das competências médias evidenciadas pelos alunos da OCDE. [...] Já a situação de Argentina, Brasil e Colômbia é bem semelhante, com pontuações conjuntas

em torno dos 382 pontos nas disciplinas, sempre abaixo dos 400 pontos. (WAISELFISZ, 2009, p.21).

A última edição do Pisa ocorreu em 2018 (devido à pandemia da COVID-19 a realização dos exames de 2021 foi cancelado e transferida para o ano de 2022 (INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA, 2022)). Na Tabela 1 listamos os resultados obtidos pelo Brasil em todas as edições e observamos um aumento de 50 pontos no período entre 2000 e 2018.

Tabela 1 - Pontuação do Brasil no Pisa de 2000 até 2018.

Ano	2000	2003	2006	2009	2012	2015	2018
Pontuação	334	356	386	391	391	377	384

Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exameseducacionais/pisa/historico>

Notamos que o Brasil obteve um aumento na pontuação da área de matemática com relação à última edição, no entanto, ainda apresenta um baixo desempenho em comparação com os outros 78 países participantes, ocupando apenas a 71ª posição no ranking geral da disciplina. A Tabela 2 apresenta os resultados de alguns dos participantes no Pisa 2018.

Tabela 2 - Ranking e notas de alguns países participantes do Pisa 2018.

País	Ranking	Nota
China	1º	591
Singapura	2º	569
Macau (China)	3º	558
Honk Kong (China)	4º	551
Coréia	7º	526
Estônia	8º	523
Polônia	10º	516
Canadá	12º	512
Finlândia	16º	507
Irlanda	21º	500
Brasil	71º	384

Fonte: BERMÚDEZ, 2019.

Também é possível verificar que nos últimos 15 anos o Brasil esteve abaixo da média geral apresentada pelo exame. A Figura 1 representa a comparação do desempenho brasileiro na disciplina de matemática com relação à média calculada pela OCDE de todos os países que realizaram a prova naquele respectivo ano.

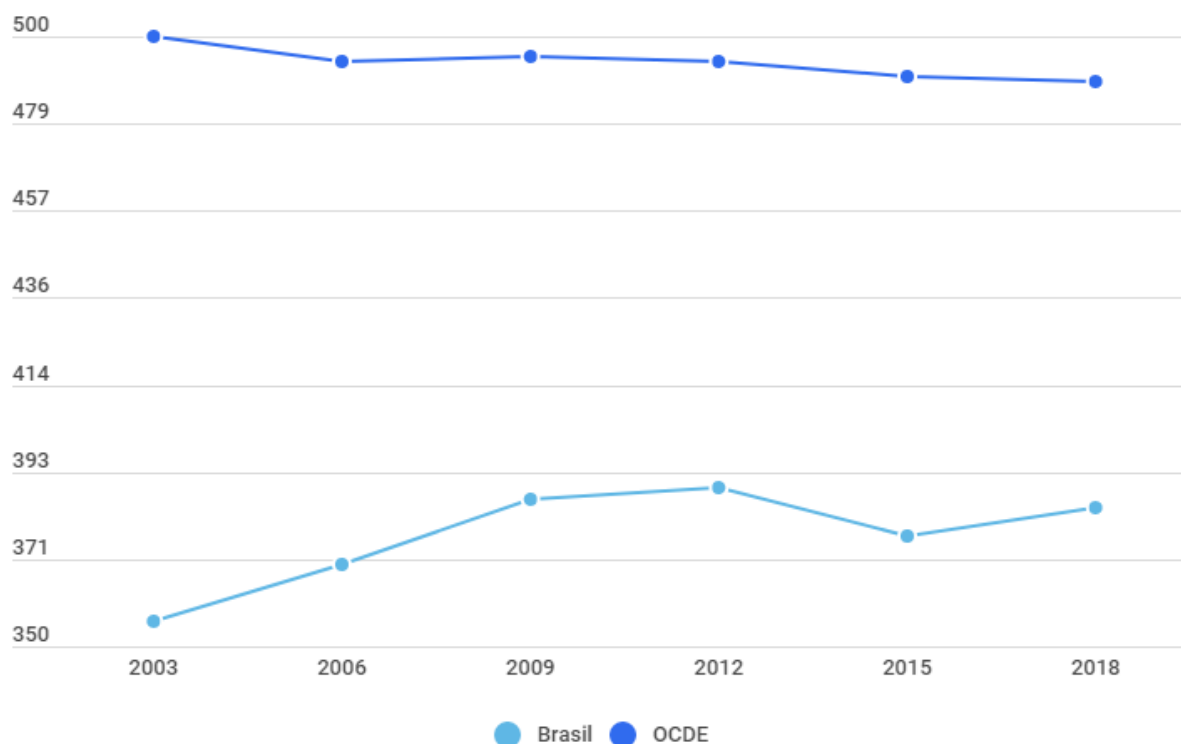


Figura 1 - Comparação entre o desempenho brasileiro e a média da OCDE.
Fonte: LYCEUM, 2019.

Por meio desses dados verificamos que a disciplina de matemática pode ser considerada difícil pelos discentes brasileiros, sendo assim, tal problemática justifica a necessidade de pesquisas que busquem compreender esse fenômeno e se proponham a buscar soluções para amenizar seus impactos nos estudantes. Neste trabalho investigamos as dificuldades de ensino e aprendizagem observadas na disciplina Geometria Analítica de cursos de nível superior. Diversos artigos discutem essa temática na literatura, demonstrando sua relevância como problema de pesquisa e a necessidade da continuidade desses estudos.

A Geometria Analítica possui aplicações práticas relevantes que podem ser exploradas em sala de aula, como os sistemas de posicionamento global conhecidos pela sigla GPS (Global Positioning System) e os elementos da computação gráfica e da modelagem de figuras em três dimensões que são utilizados nas áreas da

construção civil, arquitetura e design (LACERDA, 2015). Além de contribuírem para o desenvolvimento teórico dos campos científicos da física, da matemática e das engenharias.

A Geometria, parte integrante do saber matemático, exige linguagem e procedimentos apropriados para que suas relações conceituais e sua especificidade quanto às representações simbólicas sejam entendidas. Por isso, a preocupação dos educadores matemáticos com sua prática pedagógica não é recente. Ela é um ramo da Matemática que possui um campo muito fecundo, e a maneira como for estudada irá refletir no desenvolvimento intelectual, no raciocínio lógico e na capacidade de abstração e generalização do aluno (MURARI, 2004, p. 204).

Carvalho, Dias e Ferreira (2015) realizaram um mapeamento das dificuldades de aprendizagem da disciplina Geometria Analítica nos cursos de Engenharia, Licenciatura em Física, Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Química do Campus Bagé da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), situada no estado do Rio Grande do Sul. Para desenvolver esse trabalho os pesquisadores realizaram a aplicação de uma avaliação diagnóstica nas turmas, buscando identificar as principais dificuldades enfrentadas pelos discentes durante o processo de construção de conhecimento.

Como resultado, foi possível constatar que um baixo percentual dos discentes entra no Ensino Superior com o domínio apropriado dos conceitos matemáticos fundamentais da geometria que são necessários para o desenvolvimento dos conteúdos trabalhados ao longo do curso de Geometria Analítica. Além disso, os autores destacam a necessidade da realização de pesquisas qualitativas sobre esses problemas no aprendizado, visando à identificação das adversidades pontuais que interferem na estruturação dos saberes e buscando a constituição de uma perspectiva completa da situação.

Rosa, Santos e Mendes (2019) analisam o desempenho de estudantes dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Goiás (UFG), regional de Goiânia, que ingressaram no curso em 2014, ao longo do período para sua integralização em oito semestres letivos. A Tabela 3 apresenta o percentual de reprovações dos alunos nas 20 disciplinas em comum nos cursos, sendo esse um dos parâmetros investigados para o desenvolvimento do estudo.

Tabela 3 - Percentual de reprovação nas disciplinas em comum entre licenciatura e bacharelado da UFG – 2014/1 a 2017/2.

Licenciatura	%	Bacharelado	%
Física I	64,7	Física I	75,0
Geometria Analítica	64,0	Laboratório de Física I	70,0
Matemática Elementar	63,3	Teoria dos Números	55,6
Álgebra Linear I	59,3	Cálculo 2 ^a	54,5
Cálculo 1A	58,0	Funções de Variável Complexa	50,0
Geometria Euclidiana	56,8	Fundamentos de Geometria	50,0
Álgebra I	55,9	Álgebra Linear I	41,7
Laboratório de Física I	55,2	Cálculo 1 ^a	41,7
Cálculo 2A	55,0	Cálculo 3 ^a	36,4
Teoria dos Números	53,2	Geometria Analítica	33,6

Fonte: ROSA; SANTOS; MENDES, 2019, p. 15.

A disciplina Geometria Analítica aparece com segundo maior índice de insucessos para os licenciandos, enquanto que para os discentes do bacharelado ocupa a décima posição.

Observamos que mais da metade dos licenciandos e mais de um terço dos bacharelandos reprovaram alguma vez na disciplina Geometria Analítica, jogando luz para problemas de aprendizagem que precisam ser investigados e tratados no Ensino Superior. Podemos observar que em ambos os cursos existem outras disciplinas de geometria que também figuram entre as dez mais problemáticas, além das que fazem uso de seus conteúdos como pré-requisitos, como é o caso das disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear.

Esse panorama reforça o baixo desempenho dos estudantes nos primeiros dois semestres do curso, sendo que no primeiro semestre o desempenho é pior, visto que o maior percentual de reprovação ocorre em três das quatro disciplinas do fluxo (ROSA, SANTOS E MENDES, 2019, p. 417).

A argumentação ressalta a importância da Geometria Analítica tanto para formação docente quanto para discente e, portanto, seus conteúdos devem ser adequadamente ministrados e compreendidos. Sendo assim, é necessário buscar

soluções para os baixos índices de desempenho acadêmico dos estudantes, investigando quais adversidades têm sido enfrentadas no processo de aprendizagem dos conteúdos.

Nesta pesquisa, realizamos uma revisão bibliográfica para identificar as principais dificuldades na abstração dos conteúdos da Geometria Analítica presentes na literatura. De posse desses dados, qualificamos uma sequência didática voltada para o tratamento das dificuldades na disciplina.

Para o entendimento do leitor, consideramos uma sequência didática, como sendo uma forma de organizar, metodologicamente, e de forma sequencial, a realização de atividades didáticas, visando melhorar a educação e o entendimento do aluno sobre o conteúdo (MONTEIRO, CASTILHO, SOUZA, 2019).

O relatório intitulado Políticas Efetivas, Escolas de Sucesso (Effective Policies, Successful Schools), desenvolvido utilizando os dados obtidos com a aplicação do Pisa 2018, alerta que uma boa infraestrutura escolar que providencie o acesso a salas de aula, laboratórios e bibliotecas, assim como a disponibilidade de materiais didáticos educacionais que possam contribuir para o aprendizado dos alunos e para a prática docente, como livros e computadores, são elementos importantes para alcançar uma educação de qualidade.

Os resultados do Pisa e, a análise do referido relatório, indicam que países que fornecem acesso às Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) para sua comunidade escolar conseguem obter melhores índices de desempenho (ORGANIZATION FOR ECONOMIC COOPERATION AND DEVELOPMENT, 2020).

O projeto de pesquisa intitulado “Objetos de Aprendizagem na Sala de Aula: Recursos, Metodologias e Estratégias para melhoria da Qualidade da Aprendizagem” (FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2013), realizado pelo núcleo de ensino da Universidade Estadual Paulista (Unesp), investigou a efetividade do uso de objetos de ensino que utilizam recursos tecnológicos. O estudo ocorreu por meio da aplicação de atividades com 400 alunos distribuídos nos três anos do Ensino Médio da Escola Estadual Bento de Abreu, nas disciplinas de física, matemática, química, português e filosofia (FISCARELLI, MARQUES, 2016).

Os resultados obtidos pela referida pesquisa apontam para benefícios significativos no rendimento escolar, visto que o uso de objetos de aprendizagem elevou, em média, 25% do comprometimento e dedicação dos alunos. Como exemplo, observa-se que na realização das atividades tradicionais, cerca de 30% desses alunos entregavam as tarefas com pelo menos um exercício em branco, enquanto que com a nova proposta de ensino esse quantitativo não atinge sequer os 5%. Os dados são impactantes quando consideramos apenas as disciplinas de física e matemática, demonstrando que o uso de ferramentas tecnológicas educativas contribui para melhorar em, aproximadamente, 32% o desempenho dos alunos com relação às clássicas metodologias expositivas (FISCARELLI, MARQUES, 2016).

O estudo indica que objetos de aprendizagem que fazem uso de elementos tecnológicos podem contribuir para a recuperação do cenário educacional brasileiro, com relação aos baixos índices de aproveitamento da disciplina de matemática apontados pelos dados do Pisa. Nesse sentido, usamos recursos computacionais para desenvolver uma proposta pedagógica para tratar de problemas de ensino dos conteúdos da disciplina Geometria Analítica, visando contribuir para melhoria do desempenho discente na matéria (FISCARELLI, MARQUES, 2016).

Para associar os conteúdos estudados na Geometria Analítica com os recursos computacionais que podem ser explorados na produção de objetos de aprendizagem utilizamos tópicos da geometria computacional, visto que essa é uma aplicação prática da disciplina que está presente em diversos campos sociais e profissionais.

As aplicações da Geometria Analítica dadas pela computação gráfica podem ser utilizadas como recurso motivacional para promover o aprendizado dos discentes de ensino médio e superior.

Estamos constantemente em contato com expressões artísticas e mídias de entretenimento produzidas por ferramentas da computação gráfica. Praticamente todo comercial ou filme está repleto de imagens projetadas e efeitos especiais. Sendo assim, a temática pode despertar o interesse do aluno em compreender como conteúdos vistos em sala de aula podem ser utilizados nesse contexto prático, por meio da formalização acadêmica, ao mesmo tempo em que prepara o discente para lidar com os usos cotidianos e profissionais.

A proposta de utilizar conceitos da geometria computacional no ambiente de sala de aula pode ser considerada pouco usual, por mais que a tecnologia já esteja presente em diversos outros ramos, pouco professores exploram seu potencial pedagógico (PEREIRA; FRANCO, 2018). No entanto, a modernidade simplificou o acesso aos recursos necessários para outras áreas, possibilitando sua inserção nos ambientes educacionais e a produção de trabalhos que incentivam a continuidade dos estudos sobre o tema.

Alguns softwares educacionais já exploram as potencialidades de imagens digitais como ferramenta de ensino. O uso de tecnologias com recursos gráficos possibilita que o aluno visualize conceitos abstratos e dinâmicos que não poderiam ser representados em uma lousa, contribuindo para o entendimento dos conteúdos. Tais ferramentas podem ser consideradas úteis para tratar dos problemas no ensino da Geometria Analítica, uma vez que permitem a representação de elementos geométricos por meio de gravuras que podem ser melhor compreendidas.

Para desenvolver práticas de aula que explorem os elementos da geometria computacional como ferramenta didática para o tratamento da Geometria Analítica utilizamos o software educacional GeoGebra¹.

O software GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter (HOHENWARTER; FUCHS, 2004) com o intuito de ser usado em metodologias de ensino para ciências exatas. O recurso é voltado para a abordagem da geometria dinâmica e possui instrumentos que relacionam tópicos da geometria e da álgebra, contribuindo para o estudo da Geometria Analítica, pois propicia a associação entre visualização geométrica e o cálculo algébrico (SOUZA; FONTES; BORBA, 2019).

Optamos pela utilização desse software devido ao seu potencial pedagógico para o ensino, o que decorre de sua interface dinâmica, visto que ela possibilita a manipulação interativa dos elementos geométricos e algébricos que são utilizados pelos discentes na experimentação dos conteúdos.

Segundo Moura, Santos e Silva (2016), a interatividade do software GeoGebra permite o desenvolvimento de práticas investigativas por meio da realização de simulações computacionais que podem ser analisadas no ambiente

¹ GeoGebra.org

escolar, fazendo com que o aprendizado seja efetivo, uma vez que são exploradas estratégias que vão muito além do uso do papel e lápis.

Souza (2016) realizou um estudo na Universidade Federal de Roraima (UFRR) onde o software GeoGebra foi usado no ensino da disciplina Geometria Analítica, onde constatou-se que, nos contatos iniciais com o software, os alunos demonstraram interesse na aprendizagem do conteúdo. Quando considerado o desempenho das turmas, houve melhorias nos índices de aprovação e evasão, o que pode ser considerado um fortalecimento da aprendizagem. Nesse sentido, a função pedagógica do referido software pode ser potencializada com a inclusão de elementos da geometria computacional, visto que representa uma aplicação prática do conteúdo que pode atuar como um recurso motivacional para o discente.

Com base nos dados e argumentos apresentados nesta introdução, desenvolvemos e aplicamos atividades voltadas para o ensino da Geometria Analítica, dando ênfase para as problemáticas recorrentes na literatura, e que utilizam o software educacional GeoGebra como ferramenta pedagógica contextualizada com as aplicações do conteúdo no campo da geometria computacional.

O restante do trabalho está organizado como segue. No capítulo 2, apresentamos o problema que motivou o estudo e seus objetivos. No capítulo 3, discutimos os conceitos teóricos que fundamentam nossa argumentação. No capítulo 4, tratamos dos métodos aplicados para o desenvolvimento da pesquisa. No capítulo 5, abordamos a elaboração da sequência didática que constitui o produto educacional desta dissertação (Apêndice A). Por fim, no capítulo 6 listamos os resultados e conclusões obtidas com a investigação.

2. OBJETIVOS

Iniciamos a seção apresentando os questionamentos que motivaram a realização deste estudo e enunciamos formalmente o problema de pesquisa que orientou o desenvolvimento da fundamentação teórica e a escolha das metodologias empregadas na investigação.

Definimos o objetivo geral de forma que ele contemple a busca por soluções para o problema de pesquisa. Em seguida, listamos os objetivos específicos que executamos visando atingir o referido objetivo.

2.1 Problema de Pesquisa

Investigamos o problema dos baixos índices de desempenho acadêmico observados na matéria de matemática e, especificamente, nos conteúdos da disciplina Geometria Analítica dos cursos de Ensino Superior. Procuramos compreender algumas das dificuldades enfrentadas pelos discentes e quais são suas causas e, então, elaboramos, aplicamos e analisamos práticas didáticas que podem contribuir para diminuição dessas adversidades.

Para o entendimento do leitor, ao longo do texto vamos considerar que os termos “prática didática” e “prática de aula” sejam sinônimos, e descrevem a metodologia de aula em que os alunos fazem uso de equipamentos e materiais para a construção do conhecimento (SANTOS; INFORSATO, 2011).

Por meio dos estudos teóricos realizados ao longo da formação acadêmica, das referências na literatura e da observação de experiências pessoais, constatamos que o uso dos recursos da tecnologia digital de informação e comunicação (TDIC) podem ser benéficos para a melhoria do aprendizado de Geometria Analítica no Ensino Superior e, conseqüentemente, podem ser utilizados para recuperar os índices de aproveitamento das disciplinas de geometria.

Em específico, alinhamos as potencialidades do software educacional GeoGebra com tópicos da geometria computacional para produzir práticas didáticas. Fundamentado neste contexto, enunciamos nosso problema de pesquisa:

“Como desenvolver uma prática didática que utilize recursos da tecnologia da informação e comunicação, com auxílio do software GeoGebra e de tópicos da geometria computacional, visando identificar elementos que possam contribuir para a melhoria dos índices de desempenho, e entendimento das dificuldades de aprendizagem, dos discentes matriculados na disciplina Geometria Analítica do Ensino Superior?”

2.2 Objetivo Geral

Para tratar do problema anteriormente enunciado, apresentamos o principal objetivo deste trabalho:

“Desenvolver, aplicar e analisar uma prática didática utilizando recursos da tecnologia da informação e comunicação, com auxílio do software GeoGebra e de tópicos da geometria computacional, para identificar elementos que possam contribuir para a melhoria dos índices de desempenho, e entendimento das dificuldades de aprendizagem, dos discentes matriculados na disciplina Geometria Analítica do Ensino Superior.”

2.3 Objetivos Específicos

Visando atingir o objetivo geral, estabelecemos os seguintes objetivos específicos que foram realizados ao longo da pesquisa:

- Fundamentar os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento das revisões bibliográficas que compõem este trabalho;

- Identificar as principais dificuldades de aprendizagem dos conteúdos da disciplina Geometria Analítica no Ensino Superior que possam ser tratadas com o uso de recursos das tecnologias da informação e comunicação;
- Assentar como deve ocorrer o uso de recursos tecnológicos em práticas de ensino visando qualificar a prática didáticas que será desenvolvida;
- Respalda a utilização de conceitos da geometria computacional como recurso pedagógico que possa contribuir para o ensino da disciplina Geometria Analítica dos cursos superiores;
- Ampara como o software educacional GeoGebra pode contribuir para o desenvolvimento de práticas pedagógicas voltadas para o ensino da Geometria Analítica integrado ao uso da geometria computacional;
- Estruturar uma sequência didática que utilize o GeoGebra voltada para o tratamento de algumas das dificuldades observadas na revisão bibliográfica sobre dificuldade de aprendizado e que esteja fundamentada nas experiências levantadas na revisão bibliográfica sobre o GeoGebra;
- Estabelecer procedimentos de análise para aplicação da referida sequência didática, com intuito de verificar sua efetividade no processo de ensino e aprendizagem, bem como possíveis modificações.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção apresentamos as leituras realizadas sobre as temáticas que são fundamentais para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho. Os assuntos discutidos contribuem para o entendimento do problema de pesquisa e sua contextualização com o ambiente acadêmico, além de colaborarem com orientações para a prática didática produzida nesta dissertação.

Esta seção está organizada como segue. Primeiramente, apresentamos nossa revisão bibliográfica sobre dificuldades de aprendizado na disciplina Geometria Analítica, realizada com intuito de compreender quais problemas precisam ser tratados. Em seguida, elencamos algumas considerações sobre como utilizar tecnologias no ambiente escolar e quais os benefícios dessas metodologias. Depois, discutimos como os recursos da geometria computacional podem ser empregados como ferramentas pedagógicas voltadas para o ensino da Geometria Analítica. Por fim, discutimos nossa revisão bibliográfica sobre experiências pedagógicas que utilizaram o GeoGebra em práticas escolares voltadas para o ensino da Geometria Analítica, visando conhecer o que já foi feito e pôde ser abstraído pela atividade que produzimos.

3.1. Dificuldades de aprendizado em Geometria Analítica

Nesta subseção apresentamos os resultados obtidos com a revisão bibliográfica, os detalhamentos referentes a escolha das metodologias e procedimentos serão discutidos na próxima seção.

Sustentamos nossa argumentação por meio da revisão bibliográfica fundamentada nos pressupostos teóricos de Bogdan e Biklen (1994), em que observamos o caráter qualitativo das fontes utilizadas para determinar as problemáticas para o ensino da Geometria Analítica que são tratadas ao longo do trabalho.

Seguimos os procedimentos metodológicos indicados em Santos (2005) e Gil (2010), selecionando tanto fontes com dados estatísticos quanto com conceitos

teóricos que garantam uma visão geral sobre o tema, com intuito de articular ambas as perspectivas para contribuir com um melhor entendimento do assunto.

Realizamos a investigação por meio de um estudo sistematizado com base em materiais publicados em livros e acervos digitais composto por artigos científicos indexados nas bases de dados SciELO e Google Acadêmico. Rastreamos publicações que abordam aspectos qualitativos das dificuldades de aprendizado da Geometria Analítica, além de estudos quantitativos sobre as principais adversidades que podem ser observadas nessa componente curricular dos programas de Ensino Superior.

Pires (2016) realizou uma pesquisa de campo quantitativa com 113 discentes do terceiro ano do Ensino Médio e 30 docentes de matemática de escolas públicas do estado do Pará entre os anos de 2014 e 2015. A investigação teve como objetivo identificar potenciais problemáticas no aprendizado da Geometria Analítica, em que a primeira parte abordava as metodologias de ensino empregadas por professores e a segunda indagava quais habilidades eram consideradas fáceis ou difíceis de serem abstraídas por estudantes.

Para a primeira parte do estudo a coleta das informações buscava descobrir como as aulas de Geometria Analítica eram ministradas, visando identificar como o docente ensina habitualmente. O questionário solicitava que os participantes escolhessem a prática pedagógica mais utilizada entre modelagem, situação-problema, definição, jogo e experimento didático.

Segundo os resultados, 75% dos alunos e 45% dos professores tiveram contato com a metodologia de ensino da definição, caracterizada por aulas que iniciam com definições sobre conceitos trabalhados, seguido da realização de exemplos e exercícios para fixação do conteúdo. Observamos que essa abordagem não explora a contextualização da realidade discente com aplicações práticas do conteúdo e não busca motivar o estudante. Segundo Santos (2016):

A falta de contextualização no ensino da matemática pode acarretar o desestímulo pela disciplina, ressuscitando os métodos tradicionais que conceituam a matemática como uma ciência que trouxesse todas as coisas prontas, como se fosse um conhecimento pronto e acabado (SANTOS, 2016, p. 5).

Souza (2016, p. 2) relata que *“a desmotivação de estudantes calouros observada na disciplina de Geometria Analítica, ofertada pelo Departamento de Matemática (DMAT) da Universidade Federal de Roraima (UFRR)”* é uma das causas para dificuldades de aprendizado do conteúdo. Tal fato não é um evento isolado, já que essas problemáticas também podem ser constatadas por pesquisadores em diferentes níveis de ensino e regiões (MOTA; LAUDARES, 2010).

Para Guimarães e Boruchovitch (2004), a falta de motivação representa um desafio para garantir que qualquer metodologia didática seja eficaz. A ausência de interesse pode ser observada nas disciplinas de Geometria Analítica do Ensino Superior, resultando em alunos cuja atenção não está voltada ao aprendizado dos conteúdos.

Andrade (2007) analisou algumas das metodologias utilizadas no ensino da Geometria Analítica em instituições de educação básica e superior do estado do Pará. O autor apontou que as aulas da disciplina estão excessivamente fundamentadas no estudo das representações algébricas e no tratamento de suas equações, deixando em segundo plano sua natureza geométrica. Consequentemente, recursos motivacionais decorrentes da visualização não são aproveitados, provocando a resistência dos alunos.

Os resultados da pesquisa demonstram a necessidade de práticas de aula que possam motivar o aluno. Sendo assim, observamos que essa é uma das adversidades que precisam ser superadas para garantir a qualificação do processo de ensino e, para isso, propomos a contextualização dos conteúdos com suas aplicações práticas na realidade discente. Nesse sentido, Mendes (2009) destaca que o ensino da matemática deve ocorrer de forma contextualizada com a realidade sociocultural do estudante.

[...] verificar a Matemática presente nas diversas situações em que construímos nossa realidade sociocultural, ampliando o conhecimento obtido historicamente. [...] é uma forma importante de conduzir o aluno à reelaboração do conhecimento existente nos livros didáticos de Matemática, assim como desenvolver atividades científicas voltadas para a investigação [...] (MENDES, 2009, p. 125).

Os instrumentos utilizados para segunda parte da coleta de dados foram dois questionários com perguntas fechadas, um para aluno e outro para professores, em

que deveriam avaliar o grau de dificuldade de 44 habilidades que são desenvolvidas durante a disciplina Geometria Analítica, classificando as mesmas em *muito fácil*, *fácil*, *regular*, *difícil* e *muito difícil*.

Os questionamentos sobre habilidades desenvolvidas na disciplina Geometria Analítica foram divididos em quatro blocos, cada um com uma temática específica sobre os conteúdos.

No primeiro bloco foram apreciadas questões sobre o sistema cartesiano, tratando de problemas sobre a identificação e a demarcação de pontos em eixos e quadrantes específicos.

Os resultados do primeiro bloco apontam que 72% dos alunos estudaram esses tópicos em sala de aula e que a maioria avalia sua dificuldade como *regular*, enquanto que a maioria dos professores considera que a apropriação desses conceitos seja *fácil*. Apesar da diferença de opiniões, menos de 10% dos participantes de cada categoria classificou o assunto como *difícil*, indicando que o mesmo pode não ser uma adversidade preocupante.

No bloco 2 são investigadas as aptidões sobre relações entre pontos e retas na Geometria Analítica, tratando de questões sobre a distância entre pontos, relações de pertinência e inclusão entre pontos e retas, posições relativas entre pontos e retas, determinação do ponto médio de um segmento e de intersecção entre duas retas e o cálculo da área do triângulo formado por três pontos.

O resultado do segundo bloco da pesquisa demonstra que professores e alunos avaliam a abstração de tais habilidades como *regulares*, no entanto, houve um aumento no número de tópicos considerados *difíceis*, com destaque para a dificuldade de calcular o determinante que fornece a área do triângulo formado por três pontos não colineares.

O bloco 3 trata do desenvolvimento de habilidades específicas sobre retas vistas na matéria de Geometria Analítica, dando ênfase para problemas de escrever os diferentes tipos de equações para uma reta, identificar seus elementos específicos (como a declividade), representar graficamente uma reta por meio de informações presentes em sua equação, determinar a equação da reta a partir de outros elementos geométricos e as posições relativas entre retas.

Nesse quesito os resultados do terceiro bloco mostram que 61% dos discentes e 54% dos docentes consideram o conteúdo *regular*. Os itens considerados mais *difíceis* incluem determinar a declividade de uma reta e realizar a representação geométrica da reta por meio de análise das informações de suas equações.

No bloco 4 é avaliado o entendimento de conceitos da Geometria Analítica sobre circunferências. Os tópicos que foram apreciados versam sobre reconhecer as diferentes formas da equação da circunferência, determinar o centro e o raio da circunferência por meio de suas equações, relações de pertinência e posições relativas com pontos e retas, determinar a equação da circunferência utilizando outra circunferência que seja tangente à primeira, representação gráfica da circunferência por meio de sua equação e cálculo da área a partir da equação.

Os resultados desse quarto bloco mostram que os alunos consideram esses tópicos *regulares*, enquanto que os docentes classificam os mesmos como *difíceis*. Destacam-se as dificuldades em determinar a equação da circunferência usando a tangência com outra circunferência e a representação gráfica por meio da análise de equações.

Na mesma pesquisa, além da classificação sobre a dificuldade de habilidades trabalhadas na disciplina Geometria Analítica, foram realizadas avaliações diagnósticas para verificar se a visão de discentes e docentes acerca de suas dificuldades estava correta.

As provas eram compostas por 10 questões retiradas de livros didáticos e outros exames avaliativos voltados para o Ensino Médio. Os resultados observados foram totalmente contraditórios com as avaliações fornecidas tanto por discentes quanto por docentes.

Como resultado nenhuma das 10 questões propostas obteve taxa de acerto superior a 20%, sendo que tópicos foram classificados por mais de 70% dos participantes como sendo *muito fáceis* ou *fáceis*. Além disso, três questões não apresentaram nenhum acerto, sendo que uma delas foi considerada *muito fácil* por 60% dos alunos e professores. Ao final, nenhum estudante obteve mais do que cinco acertos e 64% não acertaram nenhuma questão.

A pesquisa demonstra que professores e alunos não possuem uma ferramenta para realização de diagnóstico preciso que identifique dificuldades de aprendizagem. Em especial, conceitos que podem ser considerados “simples” se tornam obstáculo quando confrontados em questões avaliativas, sendo assim, é possível considerar que o estudante compreende o significado dos conteúdos trabalhados, mas enfrenta problemas para realizar cálculos e abstrações em aplicações teóricas.

Entre os tópicos apontados como *difíceis* pelos participantes, destacamos a representação gráfica de figuras geométricas por meio de informações retiradas de suas respectivas equações. Esse tipo de proposta exemplifica o problema anteriormente referido.

Por um lado, o estudante consegue identificar a equação e os elementos fundamentais de uma figura, como o centro e o raio da circunferência, por outro lado, ele possui dificuldade de associar esses conhecimentos com a habilidade de demarcar pontos de destaque (como o centro da circunferência) no plano cartesiano e de desenhar demais pontos que não são explicitamente identificáveis apenas observando a equação. Ou seja, existe a dificuldade de associar a representação algébrica com a representação geométrica.

Junior e Lopes (2017) realizam um mapeamento de dissertações e teses brasileiras cuja temática discute o uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação como recurso de contribuição ao processo de ensino da disciplina Geometria Analítica, produzidas no período de 2010 a 2016.

Os autores da referida pesquisa constatarem que, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, as principais adversidades relatadas por alunos e professores são dificuldades de visualização das construções geométricas e manipulação algébrica de equações necessárias para resolução das questões, além disso, também relatam problemas com a falta de motivação para o estudo.

São vários os relatos de estudantes que não conseguem “enxergar” as figuras geométricas, nem traduzi-las para equações, e de professores que se deparam com turmas muito heterogêneas quanto ao conhecimento de matemática básica e desmotivadas para o estudo (JUNIOR; LOPES, 2017, p. 2).

O estudo também apresenta um levantamento sobre conteúdos da Geometria Analítica que são focos dos resultados de pesquisas defendidas nas teses e dissertações nacionais. Na Tabela 4, apresentamos os resultados obtidos por essa investigação por meio da frequência percentual do nível de ensino investigado e conteúdos abordados nas pesquisas sobre o ensino de Geometria Analítica com Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC).

Tabela 4 - Frequência percentual do nível de ensino investigado e conteúdos abordados em pesquisas sobre o ensino de Geometria Analítica com TDIC

Nível de Ensino	Conteúdos de Geometria Analítica Trabalhados	Frequência
Ensino Médio	Vetores no Plano	8,5%
	Pontos e Retas no Plano	25,5%
	Circunferências	23,4%
	Cônicas	29,8%
Ensino Superior	Vetores no Plano	2,1%
	Pontos e Retas no Plano	8,5%
	Circunferências	4,3%
	Cônicas	8,5%
	Vetores no Espaço	17,0%
	Retas e Planos no Espaço	12,8%
	Quádricas	8,5%
	Geometria Plana e Álgebra	2,1%

Fonte: JUNIOR; LOPES, 2017.

Analisando a tabela, observamos que os conteúdos do Ensino Médio que despertam o interesse dos pesquisadores são pontos e retas no plano (25,5%), circunferências (23,4%) e cônicas (29,8%), enquanto que no Ensino Superior os tópicos trabalhados envolvem o estudo de vetores no espaço (17,0%), de retas e planos no espaço (12,8%), e de cônicas (8,5%).

Em ambos os níveis percebemos que o tratamento de elementos fundamentais da Geometria Analítica, como pontos, retas, vetores e planos, é um problema investigado por pesquisadores. De forma geral, problemas que abordam

esses tópicos envolvem manipulação algébrica de equações para identificar valores de variáveis e coeficientes que são úteis para caracterizar suas representações geométricas, sendo assim, as adversidades enfrentadas neste assunto estão associadas com esse tratamento matemático.

Outro assunto tido como problemático para pesquisadores consiste no estudo das cônicas, que envolve o conceito de circunferência. Em especial, esse conteúdo requer alguma competência no tratamento e manipulação de equações, no entanto, o foco das questões está em representar graficamente essas curvas a partir da identificação de seus elementos geométricos por meio de suas representações algébricas, sendo justamente essa a dificuldade observada.

Quando Souza ministrou o curso de Geometria Analítica, ele observou que na resolução de atividades *“foi possível perceber certa ênfase dada ao cálculo algébrico e uma dificuldade de articular as proposições matemáticas ao utilizar a representação visual”* (SOUZA; FONTES; BORBA, 2019, p. 3). Sendo assim, muitos alunos demonstravam preocupações excessivas com cálculos algébricos, mas não conseguiam associar suas expressões com representações visuais.

Uma das principais dificuldades da aprendizagem dos conteúdos da Geometria Analítica está na fragilidade de visualização dos discentes, e que isso ocorre devido à realização de aulas que utilizam apenas a lousa como ferramenta visual, restringindo os recursos pedagógicos que poderiam incrementar o ensino (SOUZA; FONTES; BORBA, 2019).

Carvalho, Dias e Ferreira (2015) realizaram um mapeamento para identificar as dificuldades de aprendizagem da disciplina de Geometria Analítica nos cursos de Engenharia, Licenciatura em Física, Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Química do Campus Bagé da UNIPAMPA, situada no estado do Rio Grande do Sul.

Para desenvolver esse trabalho os pesquisadores realizaram a aplicação de uma avaliação diagnóstica com conteúdos de Geometria Analítica visto no Ensino Médio para turmas do Ensino Superior, buscando reconhecer as principais dificuldades enfrentadas pelos discentes durante o processo de construção dos conhecimentos.

Como resultado, os autores constataram que os discentes possuem “*uma formação no ensino fundamental e médio insuficiente, fato que traz como consequência tanto a reprovação na disciplina quanto a evasão*” (CARVALHO; DIAS; FERREIRA, 2015, p. 1). Sendo assim, foi possível observar que um baixo percentual de alunos entra no Ensino Superior com domínio dos conceitos matemáticos fundamentais da geometria necessários para o desenvolvimento dos conteúdos que serão trabalhados na Geometria Analítica.

Por fim, os autores destacam a necessidade de realização de pesquisas qualitativas sobre problemas de aprendizado na referida disciplina, visando identificar fragilidades pontuais oriundas do ensino básico que interferem na estruturação de saberes no nível superior e buscando a constituição de perspectivas acerca da situação.

Para concluir, listamos as principais dificuldades para o aprendizado da Geometria Analítica que foram relatadas ao longo desta seção, e que consideramos o tratamento no desenvolvimento de nossa prática didática:

- Falta de motivação para o estudo da Geometria Analítica;
- Metodologias tradicionais que usam apenas a lousa como recurso visual;
- Ausência de habilidades fundamentais oriundas do ensino básico;
- Problemas com a visualização geométrica de elementos estudados;
- Problemas com a manipulação algébrica de equações;
- Problemas para estabelecer relações entre representações algébricas e geométricas.

3.2. O Ensino com Recursos Tecnológicos

Nesta subseção discutimos o uso de recursos computacionais como ferramentas pedagógicas que podem contribuir para a qualificação da aprendizagem. Primeiramente, buscamos compreender como o uso de tecnologias impacta o cotidiano do aluno e, conseqüentemente, quais são suas consequências quando abstraída para dentro da formação acadêmica ofertada no Ensino Superior. Em seguida, discutimos como esses instrumentos devem ser manuseados para que

o processo didático desenvolvido seja efetivo, e que os mesmos não se limitem a uma reformulação das estratégias de ensino tradicionais.

O constante avanço científico promove o surgimento de tecnologias que estão cada vez mais presentes nas atividades relevantes em nosso convívio em sociedade, desde sistemas de documentação eletrônicos até o impacto que notícias veiculadas em mídias digitais possuem no processo eleitoral, e que influenciam a forma como vivenciamos nosso cotidiano.

... as novas tecnologias da comunicação e da informação permeiam o cotidiano, independente do espaço físico, e criam necessidades de vida e convivência que precisam ser analisadas no espaço escolar. A televisão, o rádio, a informática, entre outras, fizeram com que os homens se aproximassem por imagens e sons de mundos antes inimagináveis (BRASIL, 2006, pg.24).

Dada importância dessas mudanças na estrutura social, devemos pensar em formas de garantir que todos possuam o conhecimento necessário para o manuseio adequado desses instrumentos e, uma vez que a escola é a principal responsável pela formação do aluno como cidadão, é natural que esses recursos sejam integrados ao processo de ensino realizado nessas instituições, pois permite estabelecer conexões entre as necessidades dos alunos e os conteúdos escolares trabalhados em aula, sendo essas relações valiosas para aprendizagem, tornando o aprendizado significativo (MOURA; SANTOS; SILVA, 2016).

O avanço científico, sua integração na sociedade, e a necessidade de que ele seja abstraído pelo processo educacional ainda na Educação Básica, já foram temas debatidos por diversos autores, como Papert (1994), Treagust e Rennie (1993), e Valente (2002). Para enfatizar a relevância da utilização de recursos digitais nos processos educacionais revisamos o que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) sobre o uso de tecnologias como instrumentos de aprendizagem.

O uso de recursos tecnológicos em sala de aula tem por finalidade ampliar a visão do aluno sobre determinado conteúdo, visto que, a utilização dessas ferramentas deve atender para um objetivo pedagógico com planos e metas definidos almejando resultados esperados (BRASIL, 1998, p. 56).

É indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se

instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras (BRASIL, 1998, p. 96).

Com relação aos documentos oficiais, observamos que a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias traz recomendações sobre o desenvolvimento de competências que permitam ao discente utilizar recursos tecnológicos de seu contexto sociocultural, garantindo sua integração como cidadão. A seguir, listamos algumas das habilidades que são apreciadas nos referidos documentos:

- Utilizar elementos e conhecimentos científicos e tecnológicos para diagnosticar e equacionar questões sociais e ambientais;
- Associar conhecimentos e métodos científicos com a tecnologia do sistema produtivo e dos serviços;
- Reconhecer o sentido histórico da ciência e da tecnologia, percebendo seu papel na vida humana em diferentes épocas e na capacidade humana de transformar o meio;
- Compreender as ciências como construções humanas, entendendo como elas se desenvolveram por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade;
- Entender a relação entre o desenvolvimento de Ciências Naturais e o desenvolvimento tecnológico e associar as diferentes tecnologias aos problemas que se propuser e se propõe solucionar;
- Entender o impacto das tecnologias associadas às Ciências Naturais, na sua vida pessoal, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social.

A importância e o reconhecimento de todos esses estudos podem ser observados na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), que recomenda o uso de recursos tecnológicos de maneira crítica, responsável e transversal no ambiente escolar e atribui à cultura digital um de seus pilares fundamentais. Observamos o destaque dado pela quinta competência da BNCC ao uso das tecnologias:

Competência Geral 5: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9).

Dado o reconhecimento e a valorização das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no contexto educacional, esses instrumentos têm sido incorporados nas práticas didáticas do trabalho docente ao longo dos últimos anos, como forma de atribuir significado ao processo de aprendizagem, contribuir para integração do aluno na sociedade moderna, possibilitar a modernização das metodologias de ensino por meio de recursos inovadores e promover a alfabetização e o letramento digital, habilidades que são necessárias para garantir que os alunos saibam como manipular os computadores e outros aparelhos, e tenham acesso as informações que são difundidas pelas mídias digitais, oportunizando a inclusão digital a todos.

Apesar de todos esses benefícios para o ambiente escolar, Burke (2004) aponta que a evolução da tecnologia transforma a sociedade gradativamente, modificando aos poucos seus diversos segmentos até que em algum momento também seja absorvida pela atividade educativa.

Durante décadas, e até nos dias de hoje, o livro didático tem sido analisado para ser melhor utilizado como ferramenta pedagógica (BELLINI, 2006), sendo assim, é natural que um trabalho semelhante também seja necessário para a inclusão de recursos tecnológicos no ambiente escolar, com intuito de aperfeiçoar as metodologias de ensino.

Sendo assim, devemos ter consciência de que apenas transcrever as palavras de um livro para o computador não produz uma ferramenta digital que contribui para a aprendizagem, é necessário problematizar seu uso contextualizado com a prática docente, e de maneira que desperte o interesse dos discentes, ao mesmo tempo em que atende suas necessidades sociais e educacionais.

Para utilizar as tecnologias como recursos educacionais não basta que as mesmas atuem como um meio para provocar a curiosidade do aluno sobre a

temática de estudo, mas é necessário que esses instrumentos sejam manuseados pelos discentes para que os mesmos construam saberes com o uso deles.

O Centro de Inovação para a Educação Brasileira (Cieb) produziu em 2018 o Currículo de Referência em Tecnologia e Computação para a Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio) e Educação Profissional Técnica (tecnologia e computação, ciência de dados), visando auxiliar e orientar escolas e professores sobre como implementar o uso ativo das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação no processo de aprendizagem desenvolvido nas instituições, além de contribuir e motivar a estruturação de currículos escolares que contemplem a temática, possibilitando melhorias na qualidade de ensino (CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA, 2018).

O documento está dividido em etapas educacionais, cada uma possuindo três eixos temáticos (Cultura Digital, Tecnologia Digital e Pensamento Computacional) para estabelecer os conceitos trabalhados para o desenvolvimento das competências (alinhadas com as orientações dadas pela BNCC) que permitam aos discentes explorar as ferramentas tecnológicas para a construção da aprendizagem na escola, além de propor a reflexão sobre o uso desses recursos no convívio social. A seguir, apresentamos essas propostas curriculares por meio das Figuras 2 e 3.



Figura 2 - Currículo Referência para o Ensino Infantil e Fundamental.
Fonte: CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA, 2018.



Figura 3 - Currículo Referência para o Ensino Médio.

Fonte: CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA, 2018.

As propostas apresentadas nesse currículo referência também podem contribuir para a elaboração de práticas didáticas que façam o uso de TDIC em sala de aula. As orientações apresentadas recomendam o uso de recursos tecnológicos para promover uma aprendizagem em que o aluno adote postura proativa e autônoma, considerada necessária para lidar com ferramentas que fazem parte de seu cotidiano. Além disso, o documento propõe reflexões sobre aplicabilidades das atividades e seus valores na realidade dos discentes, além de fundamentá-las dentro do campo de conhecimentos necessários para a formação acadêmica do educando no mundo atual.

Devemos compreender que em uma atualidade cada vez mais permeada por tecnologias é necessário que o aluno consiga adequar constantemente sua maneira de pensar e agir, e para que isso ocorra é preciso desenvolver uma postura proativa, crítica e autônoma no processo de aprendizagem, para que o estudante possa estar permanentemente aprendendo sobre o surgimento de recursos tecnológicos e, assim, consiga acompanhar o ritmo das mudanças na sociedade moderna (VALENTE; ALMEIDA; GERALDINI, 2017).

Nesse sentido, as metodologias de ensino que promovem o uso das TDIC podem modernizar as práticas educativas tradicionais, estabelecendo conexões entre conteúdos escolares e suas aplicabilidades com uso de recursos tecnológicos

no cotidiano discente, conferindo uma perspectiva possível voltada para o ensino. Dessa forma, o aluno estará se familiarizando com o manuseio da ferramenta digital, ao mesmo tempo em que constrói seus saberes, além de estar desempenhando uma postura ativa nesse processo de aprendizagem. Essa mudança na estrutura comportamental é benéfica para a formação do educando, uma vez que o qualifica para continuar seu desenvolvimento acadêmico mesmo fora do ambiente escolar (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015).

O docente não pode pensar que apenas utilizar o computador é suficiente para que uma metodologia de ensino motive o engajamento do aluno, fazendo com que assuma uma postura ativa frente a elaboração de seus saberes. É necessário compreender que ferramentas digitais devem estar articuladas com propostas pedagógicas que permitam a construção do conhecimento por meio do manuseio do recurso pelo educando. Essa estruturação depende principalmente da ação que será realizada para contextualizar os artifícios tecnológicos com a realidade da turma, destacando a importância do trabalho docente na elaboração de práticas didáticas que permitam essa aprendizagem (FERNANDES, 2004).

Segundo Valente (2005), para que as práticas de sala de aula munidas de ferramentas tecnológicas permitam um aprendizado efetivo para o aluno é necessário um domínio técnico adequado das TDIC por parte dos professores, visando garantir a produção de significados aos conhecimentos abordados com esses recursos junto ao trabalho pedagógico, bem como a valorização dos contextos do cotidiano discente. O autor afirma que “o domínio das técnicas acontece por necessidade e exigência do pedagógico e as novas possibilidades técnicas criam novas aberturas para o pedagógico, constituindo uma verdadeira espiral de aprendizagem” (VALENTE, 2005, p.1).

Os softwares e recursos trabalhados em sala de aula devem ser adequadamente pensados e selecionados para que atendam as especificidades da proposta pedagógica elaborada para atender as necessidades sociais e acadêmicas dos educandos. Sendo assim, as práticas didáticas devem estabelecer os objetivos que deverão ser contemplados durante a realização dos estudos ao longo da sequência didática, propiciando ao aluno um ambiente de aprendizagem em que ele possa abstrair os conhecimentos abordados enquanto acompanha seu

desenvolvimento. O professor, por sua vez, conhecendo as possibilidades ofertadas pela ferramenta digital pode então articulá-la com suas intenções para o ensino dos conteúdos, criando novas oportunidades exploratórias para que os discentes consigam atingir as finalidades desejadas (VALENTE, 2005).

Durante a introdução verificamos o baixo rendimento dos acadêmicos brasileiros na disciplina de matemática por meio da pesquisa Pisa. O desempenho nacional na pesquisa do Pisa 2018 também pode ser considerado negativo em outros aspectos, como o de disponibilizar, em média, apenas um computador para cada quatro alunos nas instituições de ensino brasileiras, enquanto que a média entre os países participantes é de um computador para cada estudante. Dessa forma, cabe ressaltar que apesar de termos consciência dos benefícios que o uso das TDIC traz para o ambiente escolar, ainda existem dificuldades para garantir que todos tenham acesso aos recursos necessários para a implementação dessas atividades.

3.3. Geometria Computacional como Recurso Pedagógico

A computação gráfica produz diversas mídias de entretenimento, basta perceber que esses conceitos são utilizados no desenvolvimento de diversos produtos populares, constituindo uma relevante aplicação matemática com valor artístico, econômico e social (LISEIKIN, 2017).

A relevância e o impacto das mídias digitais no cotidiano fazem com que possam ser utilizadas como recurso motivacional dentro do ambiente escolar, despertando o interesse de discentes em compreender como os conteúdos vistos em sala de aula são utilizados no contexto prático da produção de jogos e filmes, como é o caso da Geometria Analítica, além de também preparar os mesmos para lidar com seus diversos usos cotidianos e, inclusive, profissionais (HELLMEISTER; HELLMEISTER; HELLMEISTER, 2010).

Dessa forma, o aluno se sente atraído pelo referido tema e passa a se interessar por sua abordagem acadêmica. Assim, suas aplicações podem ser consideradas extremamente valiosas para a construção de um processo de ensino e

aprendizagem que seja mais significativo para o estudante (HELLMEISTER; HELLMEISTER; HELLMEISTER, 2010).

A proposta de utilizar conceitos da geometria computacional e da computação gráfica no ambiente de sala de aula pode ser considerada inovadora, por mais que essas tecnologias já estejam presentes em diversos outros ramos de interesse social, pouco foi explorado de seu potencial como ferramenta pedagógica para promover o aprendizado na educação básica e superior (PEREIRA; FRANCO, 2018).

Tradicionalmente, o uso da geometria computacional está associado com as indústrias de entretenimento, de arquitetura e de engenharias, devido ao elevado custo de computadores que possuem requisitos mínimos necessários e dificuldades na capacitação de pessoal qualificado para manipulação dos programas utilizados na modelagem (TOTI; MARTINS; SILVA, 2016).

Nos últimos anos a modernidade simplificou o acesso a diversos equipamentos que anteriormente eram considerados privilégio de poucas pessoas. Hoje, parte dos celulares possuem capacidade de processamento gráfico para a execução de atividades. Além disso, existem tutoriais e interfaces simplificadas que permitem que os usuários mais leigos aprendam rapidamente a manusear diversos programas. Como consequência, esses recursos possibilitaram que a geometria computacional pudesse ser explorada em diversos ramos da sociedade, inclusive nos ambientes educacionais (TOTI; MARTINS; SILVA, 2016).

O aumento da capacidade de processamento computacional permitiu o desenvolvimento de recursos que contribuem tanto para visualização de elementos gráficos quanto para interatividade e manipulação desses elementos, fazendo com que possam ser utilizados no contexto educacional para produzir materiais que permitam que o discente realize experimentações e possa atuar de maneira ativa em seu processo de ensino e aprendizagem por meio da investigação, além de facilitar o acesso e o entendimento dos conteúdos (TOTI; MARTINS; SILVA, 2016).

As atividades que podem ser desenvolvidas com recursos modernos vão desde construções gráficas simples até projetos educacionais elaborados com tecnologias inovadoras de realidade aumentada, produção de vídeos e o compartilhamento por meio de redes sociais.

O ensino de diversas abstrações propostas no estudo dos conteúdos da geometria, bem como em outras disciplinas, necessita de constantes representações visuais para que os tópicos desenvolvidos de forma teórica possam ser compreendidos na prática e trabalhados no ambiente de sala de aula com os discentes. No entanto, nem sempre o uso de apenas uma imagem permite o entendimento adequado de certos conceitos, visto que ela pode não fornecer todas as informações necessárias para a construção desse conhecimento, devido as suas limitações.

Nesse sentido, a computação gráfica se torna imprescindível, uma vez que permite a construção de ambientes virtuais de aprendizagem com representações gráficas dinâmicas, onde o aluno pode interagir e manipular o objeto estudado, realizando observações e experimentos que auxiliem na estruturação desse conhecimento (BATTAIOLA; ELIAS; DOMINGUES, 2002).

O uso de tecnologias com recursos gráficos possibilita que o aluno visualize conceitos abstratos e dinâmicos que não poderiam ser representados apenas com o uso de uma lousa e giz, reduzindo algumas de suas possíveis dificuldades de aprendizado. Sendo assim, destaca-se a importância da realização de práticas pedagógicas que utilizem softwares interativos que permitam a manipulação dos elementos investigados.

Recursos computacionais que trabalham com elementos visuais, artísticos e gráficos, colocam em prática um novo modo de refletir e enxergar conhecimentos geométricos que podem auxiliar na percepção da forma e do espaço, fornecendo possibilidades de se entender e problematizar a Geometria Analítica (WAGNER, 2012).

Diante desse contexto de possíveis ferramentas pedagógicas, seria interessante garantir que os docentes tenham algum domínio que contribua para o manuseio desses equipamentos, no entanto, ainda são poucos os ambientes que oferecem essa formação profissional (BATTAIOLA; ELIAS; DOMINGUES, 2002).

Alguns dos principais softwares educacionais atuais já exploram as potencialidades das visualizações gráficas como ferramenta pedagógica para propiciar uma prática de ensino que aborde as dificuldades de abstração visual do aluno sobre conceitos geométricos, tornando o conteúdo palpável e compreensível.

Nesse sentido, estão sendo cada vez mais frequentes os empregos da computação gráfica como recurso didático para tratar das problemáticas específicas dos discentes, levando em conta as peculiaridades de cada área, principalmente nos tópicos da matemática referentes ao ensino da Geometria.

Neste trabalho buscamos contribuir para o ensino da Geometria Analítica, para isso propomos a utilização de conceitos da geometria computacional como recurso visual e motivacional em práticas pedagógicas, explorando um software educacional que pode contribuir para a visualização de figuras e elementos gráficos abstratos construídos por meio de equações, além de tornar perceptível a relação entre suas representações gráfica e algébrica.

A escolha da Geometria Computacional Gráfica como recurso didático foi baseada na experiência da mestranda com a disciplina de Geometria Computacional do curso de Bacharelado em Matemática Aplicada da UFRGS. Durante o curso, a autora observou que os conceitos de Geometria Analítica vistos no Ensino Médio possuíam aplicações práticas que podiam ser realizadas com recursos computacionais simples, e que serviam como motivação para o desenvolvimento do conteúdo.

Fundamentamos os conteúdos da geometria computacional que são utilizados em nossas práticas pedagógicas por meio do livro *Grid Generation Methods* (LISEIKIN, 2017). Segundo o autor, um dos problemas mais interessantes para esse estudo está na modelagem computacional gráfica de objetos físicos. Quando desejamos criar um modelo computacional de determinado objeto devemos construir uma grade tridimensional para mapear a posição de determinados pontos de interesse do objeto no espaço e traduzir essas informações para uma série de equações matemáticas, oriundas da Geometria Analítica, que podem ser interpretadas pelo computador.

Para construir essa grade tridimensional utilizamos diversos planos paralelos e perpendiculares, bem como suas respectivas equações. Cada região em que temos interesse em mapear um ponto deve ser atravessada por pelo menos um plano. Na Figura 4 é ilustrado os pontos de interesse mapeados, representados em vermelho, enquanto que alguns dos planos que atravessam esses pontos são representados pelas linhas em azul.

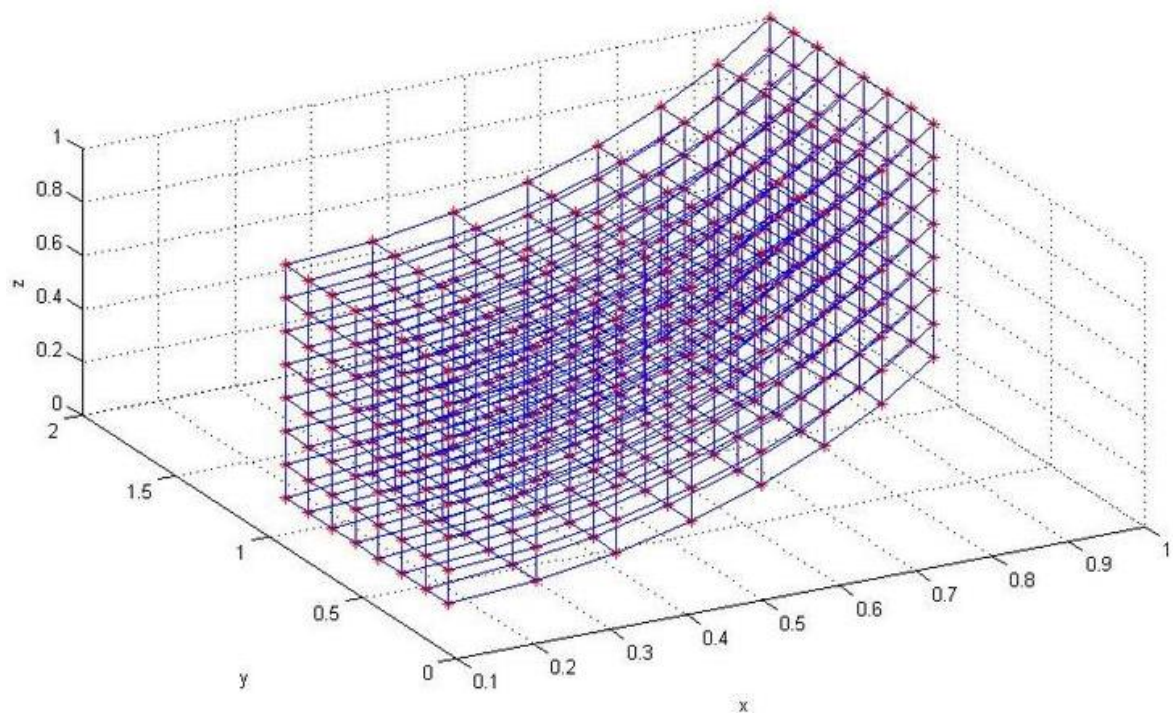


Figura 4 - Mapeamento de Pontos
Fonte: Dos Autores.

Dessa forma, podemos mapear a posição do ponto de interesse por meio da equação do plano em que ele está contido. Nas Figuras 5 e 6 apresentamos exemplos de modelos computacionais gráficos já construídos.

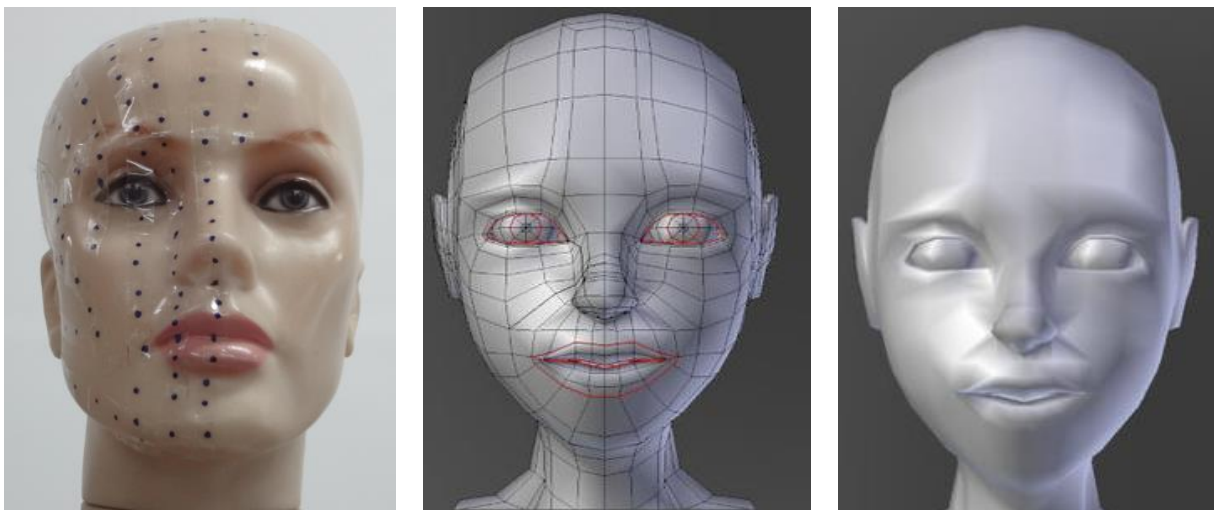


Figura 5 - Modelo Computacional de um Manequim de Frente.
Fonte: Dos Autores.

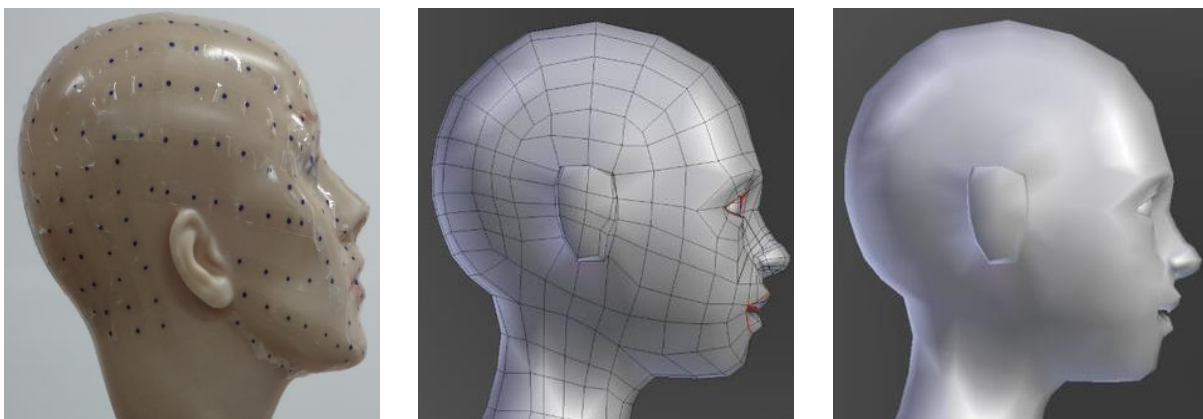


Figura 6 - Modelo Computacional de um Manequim de Perfil.
Fonte: Dos Autores.

Os procedimentos utilizados na construção da grade tridimensional e no mapeamento de pontos possibilitam o estudo de diversos conteúdos da Geometria Analítica, tais como as equações dos planos paralelos e perpendiculares que constituem as grades e as relações de pertinência entre pontos e planos. Tais conceitos podem ser explorados em sala de aula por meio de um software de geometria computacional com potencial pedagógico, permitindo a visualização dos elementos gráficos junto com a associação entre as representações algébrica e geométrica.

Diversos softwares podem ser utilizados para introduzir a geometria computacional como ferramenta para o ensino da Geometria Analítica no ambiente escolar. Ao longo deste trabalho utilizamos o GeoGebra para a proposição e desenvolvimento das atividades que são objeto de estudo desta pesquisa.

3.4. Experiências no Ensino da Geometria Analítica com o GeoGebra

Nesta subseção, apresentamos estudos sobre o uso do software GeoGebra no tratamento de dificuldades de aprendizagem específicas em conteúdos da disciplina Geometria Analítica, constituindo uma breve revisão bibliográfica da temática, cujos detalhamentos referentes ao delineamento metodológico são discutidos na próxima seção.

Os assuntos discutidos contribuem para o entendimento do problema de pesquisa e sua contextualização com o ambiente acadêmico, além de colaborarem com orientações para a prática didática elaborada.

A escolha dos trabalhos explorados segue as orientações para o desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa, dadas por Bogdan e Biklen (1994), que defendem que a elaboração de resultados decorre do trabalho de reflexão crítica do pesquisador sobre o tema investigado visando produzir significados a partir dos dados coletados.

A argumentação é sustentada por obras que privilegiam a análise qualitativa das atividades aplicadas, sem desconsiderar informações quantitativas que podem ser relevantes para o processo de investigação e a complementação do estudo.

Para o desenvolvimento da revisão bibliográfica, seguimos os procedimentos metodológicos indicados em Santos (2005) e Gil (2002, 2010), selecionando tanto fontes com dados quantitativos e qualitativos visando ampliar o entendimento sobre o assunto, com um enfoque na descrição e análise de sequências didáticas que buscam contribuir para que o aluno consiga compreender tópicos de Geometria Analítica por meio de atividades exploratórias que podem ser realizadas com o uso do GeoGebra. A captação de fontes ocorreu por meio de um estudo sistematizado em materiais publicados em acervos digitais.

O software educacional GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter (2014) com a intenção de ser usado em sequências didáticas voltadas para a aprendizagem da matemática e de outras ciências.

O GeoGebra é adequado para o ensino de diferentes tópicos da matemática, no entanto, o mesmo é voltado para geometria dinâmica, com interface que combina conceitos de Geometria e Álgebra, possibilitando o aprendizado da Geometria Analítica, pois pode representar, simultaneamente e em um único ambiente visual, atributos geométricos e algébricos de um objeto de estudo, contribuindo para que a visualização geométrica esteja associada ao cálculo algébrico (SOUZA; FONTES; BORBA, 2019).

A Geometria Analítica estabelece conexões entre tópicos da Geometria e da Álgebra, tratando de problemas que abordam, por exemplo, soluções de um sistema

linear de duas incógnitas por meio de retas e planos, exibição de figuras que podem ser descritas por equação, entre outros.

O software GeoGebra é propício para o desenvolvimento de estudos no campo da Geometria Analítica por proporcionar dupla correspondência entre objetos, ou seja, cada expressão presente na janela algébrica corresponde a um gráfico na janela de visualização. Dessa forma, o aluno pode investigar elementos algébricos identificando-os com suas representações geométricas, possibilitando verificações e análises conforme as expressões algébricas são alteradas e facilitando a compreensão do conteúdo (HOHENWARTER, 2014).

Nos próximos parágrafos apresentamos algumas experiências de ensino que foram realizadas com o uso do GeoGebra.

Souza (2016) propôs um estudo sediado na Universidade Federal de Roraima (UFRR) que utilizou o GeoGebra como recurso para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica. A pesquisa foi realizada ao longo de um ano com estudantes de seis turmas de Geometria Analítica de cursos de graduação.

Para o desenvolvimento das atividades no trabalho de Souza (2016) foi usada a versão do GeoGebra 3D nas explanações do conteúdo por parte dos professores ao longo das aulas, sendo ministrado um minicurso sobre o ensino da Geometria Analítica auxiliado pelo programa. Como parte da prática de aula, os alunos foram motivados a produzirem apresentações sobre conteúdos organizados em ciclos de palestras, abordando tópicos como o estudo das cônicas e quadráticas por meio de construções que utilizassem esse recurso.

Os objetivos com a execução da pesquisa buscavam relacionar os cálculos algébricos com a visualização dos objetos de estudo associados e o desenvolvimento da capacidade de raciocínio crítico necessário para a resolução dos problemas práticos e teóricos propostos em aula. O professor dirigiu o foco da investigação para tentar perceber habilidades de argumentação e de visualização geométrica associada às equações algébricas por parte dos estudantes.

Depois de iniciar os procedimentos relativos ao uso do GeoGebra na execução das atividades didáticas, os discentes demonstraram interesse no

aprendizado dos conteúdos, sendo possível identificar habilidades de se comunicar por meio da linguagem empregada na disciplina e na capacidade de leitura e interpretação da mesma, além de desenvolver a capacidade de pensamento lógico aplicado aos problemas que exigiam visualização gráfica, o que potencializou a familiaridade e o entendimento da manipulação das equações tratadas no cálculo algébrico.

As questões propostas pelo professor tinham como objetivo despertar o interesse do aluno para o desenvolvimento de uma capacidade de raciocínio que associasse formas geométricas com suas representações algébricas, estimulando formas de pensar sobre problemas teóricos e práticos abordados, motivando o estudo da disciplina.

Considerando os resultados quantitativos obtidos com o levantamento da pesquisa, houve uma melhora de 6,8% nos índices de aprovação nas turmas participantes, se considerados os alunos que foram aprovados e reprovados por nota. Além de ser possível identificar uma redução de 25,9% nos percentuais de evasão. Assim, podemos constatar que houve uma melhoria do processo de ensino e aprendizagem desenvolvido, bem como o aumento do interesse dos estudantes em relação aos conteúdos, fazendo os mesmos permanecerem no curso (SOUZA, 2016).

Em outra pesquisa realizada na UFRR desenvolvida por Souza, Fontes e Borba (2019), em que o software GeoGebra também foi utilizado como recurso pedagógico para o desenvolvimento de conhecimentos relativos ao aprendizado da Geometria Analítica, foi solicitado aos discentes que realizassem a verificação de demonstrações estudadas ao longo da disciplina, e que produzissem um vídeo para exporem seus entendimentos sobre conceitos matemáticos que tinham sido abstraídos utilizando o GeoGebra.

Segundo os pesquisadores, os resultados demonstraram um aumento na capacidade de comunicação dos estudantes por meio da linguagem utilizada na sistematização do conteúdo, contribuindo para o entendimento dos conceitos trabalhados na disciplina. Dessa forma, observou-se que esses recursos da tecnologia digital auxiliaram tanto na produção do conhecimento matemático, quanto

na verificação da aprendizagem de proposições e teorema desenvolvidos nas aulas. (SOUZA; FONTES; BORBA, 2019).

Junior et al. (2015) propôs a realização de uma investigação em que o GeoGebra foi utilizado como uma ferramenta pedagógica para acompanhar o estudo e a aprendizagem do conteúdo de cônicas. As atividades didáticas foram realizadas em um curso de formação para estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática, que participavam do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBD), e para professores que ministravam a disciplina na rede pública de ensino.

Ao longo do curso, os conteúdos foram ministrados do ponto de vista geométrico, visando despertar o interesse dos alunos pela matéria e motivar seu estudo, relacionando propriedades e representações algébricas de objetos com associações geométricas, nas quais suas construções foram feitas em etapas e procurou-se fornecer elementos para que os alunos pudessem introduzir formalmente as equações das parábolas, elipses e hipérboles.

Durante a oficina, houve cuidado em selecionar o momento da investigação minuciosa de algum tópico, ou apresentar um conceito matemático, destacando que se deve dar prioridade ao conteúdo lecionado, para depois considerar o programa utilizado no suporte ao processo de ensino.

Um estudo realizado por Guimarães, Oliveira e Sena (2016), em duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio Integrado, uma do curso técnico em Eletrotécnica e outra do curso técnico de Eletrônica, com alunos do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET/MG), se dedicou a elaborar uma sequência didática sobre conteúdos de Geometria Analítica, em particular sobre o estudo da reta, com o auxílio do GeoGebra.

Na referida proposta foi solicitado aos alunos que tivessem disponibilidade, trouxessem seus computadores pessoais para a aula. Assim foram formados grupos de três estudantes por computador, o que os auxiliou a desenvolverem habilidades de trabalho cooperativo. Os alunos já possuíam um conhecimento prévio sobre alguns tópicos de Geometria Analítica.

O objetivo principal da aula era que os estudantes assimilassem os conceitos de posição relativa entre duas retas paralelas, perpendiculares ou concorrentes. Antes de iniciar a atividade o professor explicou rapidamente os recursos que seriam utilizados do software, e não houve dúvidas de como manuseá-los.

Foram elaboradas perguntas discursivas, para que os alunos pudessem explicar os conceitos apreendidos. As três primeiras questões mostravam a diferença entre a reta de uma função crescente e de uma decrescente; o quarto questionamento tinha como objetivo que os alunos verificassem que se duas retas são paralelas, então elas possuem o mesmo coeficiente angular; já as últimas questões versavam sobre o estudo das retas perpendiculares.

Como avaliação os alunos apresentaram para a turma suas respostas e, a partir disso, a professora regente fez o fechamento explorando conceitos matemáticos. Ao final da atividade foi solicitado aos estudantes que dessem suas opiniões acerca de possíveis contribuições dessa atividade para seus aprendizados. Os alunos concordaram que a atividade tinha sido diferenciada, gostaram de realizar as investigações, entenderam os novos resultados, além de estarem ansiosos por outras experiências similares.

Assim, percebeu-se pelas respostas e experimentos feitos por alunos com uso do GeoGebra que houve contribuição no quesito aprendizagem acerca do assunto posições relativas de retas no plano cartesiano, já que eles puderam elaborar questionamentos, realizar testes de suas hipóteses e concluir alguns conceitos sobre Geometria Analítica.

Em uma investigação realizada por Müller e Lieban (2012), em um primeiro momento, foi realizada a construção de um site, com objetos de aprendizagem desenvolvidos para aulas de matemática com o uso do GeoGebra. Um curso de extensão foi ofertado para estudantes e professores, a partir do material disponibilizado no site, discutirem o ensino da matemática auxiliado pelo software e também produzirem seus próprios materiais com uso desse recurso pedagógico.

Os conteúdos disponibilizados no site tinham o intuito de ajudar os professores do Ensino Básico e Superior a desenvolverem tópicos matemáticos como por exemplo, Derivadas e Integrais, Geometria, Trigonometria, Números Complexos. Assim, os autores disponibilizaram os conteúdos e desenvolveram um

curso de extensão para incentivar os professores a realizar práticas pedagógicas envolvendo o uso de tecnologias digitais.

A duração do curso de extensão foi de três encontros, realizados aos sábados. Neles foi solicitado aos alunos que resolvessem problemas, construíssem objetos geométricos, realizassem demonstrações matemáticas. Em todas as tarefas os ministrantes do curso auxiliaram os cursistas na elaboração de materiais com uso do GeoGebra. Todos os exemplos disponibilizados no site podiam ser baixados e alterados por alunos, incentivando-os a fazer criações originais de objetos de aprendizagem, com base no material.

No primeiro encontro foi solicitado aos alunos que trouxessem na última aula um objeto de aprendizagem que fosse de sua autoria para ser apresentado aos colegas e haveria uma premiação dos melhores trabalhos. Durante a apresentação dos trabalhos, foi possível perceber dedicação para aprender a manipular o software por parte de alguns estudantes, a turma conseguiu discutir o trabalho dos colegas criticando-os construtivamente e dando sugestões de melhoria.

O trabalho que obteve destaque com o primeiro lugar, foi feito por um aluno que se inspirou nas aulas de Geometria Analítica e nas dificuldades relatadas pelos seus colegas sobre a disciplina para construir seus objetos de aprendizagem.

Uma pesquisa realizada por Guedes (2015) em turmas do terceiro ano do Ensino Médio, ao ensinar Geometria Analítica com o software GeoGebra, mostrou que os alunos assimilaram os conteúdos ensinados de forma significativa.

O pesquisador observou que muitos dos estudantes daquele ano não recordavam as principais propriedades da geometria plana, encontrando dificuldade em fazer uma correspondência entre elas e o plano cartesiano. Para sanar essas dificuldades o autor elaborou uma sequência didática em que os alunos poderiam explorar esses conceitos, que foram adquiridos em séries anteriores, manipulando o software GeoGebra, visando uma revisão abrangente dos conteúdos.

As propriedades da geometria revisadas foram escolhidas pelo professor, para que os estudantes respondessem questionamentos, concluíssem conceitos e explicassem as propriedades estudadas. As atividades foram realizadas em duplas

para que os alunos pudessem trocar conhecimentos com seus colegas e houvessem debates sobre as questões.

O professor notou que, depois da aplicação das atividades, em comparação com as turmas anteriores em que as propriedades eram vistas de forma superficial, foi notado que as turmas participantes das aulas com o GeoGebra, realizadas em um laboratório de informática, demonstraram interesse em explorar propriedades da Geometria Analítica. Após a realização da atividade houve preocupação com a definição das propriedades, observando-se uma escrita formal e detalhista.

Foi notado também uma facilidade em assimilar conceitos estudados, em que alunos consideraram que isso ocorreu por conseguirem visualizar propriedades exigidas, ao concluírem um conceito de forma independente. O professor conclui que houve uma melhora do aprendizado e os alunos afirmaram que tiveram facilidade em aprender, o que também pode ser atribuído a interface dinâmica do software, que enriqueceu os resultados obtidos pelos estudantes.

Borba, Silva e Gadanidis (2015) apontam que elementos gráficos do software GeoGebra permitem a reprodução de problemas contextualizados com a realidade do aluno, além disso, a interatividade da ferramenta possibilita que ele explore esse recurso e fundamente a construção de seu aprendizado. Por meio do programa, os estudantes desenvolvem uma visão diferenciada da Geometria Analítica, adquirindo as habilidades e competências necessárias, estimulando a construção do processo dedutivo, melhorando o uso da linguagem matemática, enriquecendo a comunicação de ideias matemáticas, aumentando o interesse pelo conteúdo, desenvolvendo a perícia para a visualização gráfica de elementos algébricos e, conseqüentemente, aprimorando seu conhecimento e entendimento sobre a disciplina.

Por se tratar de um software de Geometria Dinâmica, o GeoGebra permite uma troca da ordem tradicional de uma aula, começando pela parte de investigação e depois indo para a parte teórica (BORBA; PENTEADO, 2007). Os autores ainda afirmam que esse tipo de aula é benéfico para professores e alunos pois:

Nem sempre é possível conhecer de antemão as possíveis respostas que aparecem na tela. É preciso entender as relações que estão sendo estabelecidas pelo software. Numa sala de aula, isso constitui um ambiente de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor. (BORBA; PENTEADO, 2007, p. 58).

Ainda segundo Borba (2001), as experiências usando softwares semelhantes ao GeoGebra em aula como uma metodologia didática podem ser enriquecedoras, já que:

As atividades, além de naturalmente trazerem a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação. As novas mídias, como os computadores com softwares gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia ou de física (BORBA, 2007, p. 34).

Na continuidade desta dissertação, abordamos os métodos utilizados para o desenvolvimento da pesquisa, considerando que os mesmos estão assentados na base argumentativa dos conceitos teóricos explorados no presente capítulo.

4. METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesta seção apresentamos os métodos que foram utilizados para o desenvolvimento deste estudo. Dessa forma, não nos limitamos apenas a descrição das práticas executadas nas atividades de preparação, coleta e análise dos dados, mas fundamentamos os motivos que orientaram a escolha de cada metodologia e como elas estão relacionadas com os objetivos definidos para o trabalho.

Por mais que a metodologia de pesquisa deva esclarecer quais são os processos e técnicas utilizadas na elaboração da investigação, isso não significa que ela deve ser composta por um conjunto de diretrizes fixas e imutáveis. Entendemos que um pesquisador deve ser capaz de estruturar procedimentos de modo que eles se adequem aos objetivos de seu trabalho, fazendo com que a seleção das etapas possa ser contextualizada dentro do desenvolvimento do estudo e contribua para as justificativas de suas escolhas.

A seção está organizada como segue. Iniciamos relatando todos os procedimentos metodológicos que foram empregados ao longo da investigação. Em seguida, apresentamos a revisão bibliográfica desenvolvida no levantamento de dificuldades discentes em Geometria Analítica e sobre atividades propostas com o GeoGebra. Depois, fundamentamos os tópicos sobre a pesquisa quantitativa e qualitativa que utilizamos no processo da análise dos dados obtidos com a aplicação da atividade proposta no trabalho investigativo.

4.1 Procedimentos Metodológicos

Para estruturar uma prática didática que permita contribuir para o tratamento de dificuldades de aprendizado observadas nos conteúdos de Geometria Analítica, realizamos uma revisão bibliográfica sobre investigações que identificam as principais adversidades enfrentadas por discentes no entendimento dos tópicos trabalhados na disciplina.

Uma vez definidas algumas das principais problemáticas para a compreensão de conteúdos da Geometria Analítica, utilizamos esse conhecimento como orientação para escolher os aspectos aprofundados em nossa atividade de

aula, visando construir um processo de aprendizagem que esclareça essas dificuldades para os discentes.

Temos consciência de que o GeoGebra já foi utilizado na construção de ferramentas pedagógicas que podem contribuir para o ensino de diversos conteúdos e tratam de dificuldades de aprendizagem. Buscando usufruir do histórico de produções desenvolvidas com o recurso, realizamos uma revisão bibliográfica para conhecer alguns dos trabalhos que abordam o estudo da Geometria Analítica.

Nessa segunda revisão bibliográfica conhecemos outros trabalhos que tratam das dificuldades de aprendizado em Geometria Analítica, e que serviram como fundamentação para os procedimentos desenvolvidos em nossa prática didática. Assim, buscamos identificar elementos que produziram bons resultados para o ensino do conteúdo, bem como aqueles que não tiveram êxito. Dessa forma, aproveitamos o que já foi positivamente avaliado. Além disso, esperamos que nossa proposta apresente alguma nova contribuição, visto que não repetimos os mesmos procedimentos já realizados.

Com base nas informações coletadas nessas revisões bibliográficas, passamos para a elaboração da prática pedagógica que é nossa principal contribuição e produção nesta pesquisa.

Para tratar das dificuldades de aprendizado da disciplina Geometria Analítica observadas, optamos por trabalhar com recursos da geometria computacional por meio do software educacional GeoGebra. Nesse sentido, realizamos atividades que propõem a identificação de elementos gráficos e algébricos da Geometria Analítica (como equações que representam retas, planos e circunferências) por meio da construção de modelos computacionais de sólidos de revolução. Escolhemos essa classe de objetos, devido a simetria radial dessas construções tornar simples o procedimento necessário para sua modelagem, além de possuir diversos aspectos teóricos que possuem potencial pedagógico para serem explorados.

A atividade foi aplicada na turma da disciplina Geometria Analítica do curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, situado no Rio Grande do Sul. Para compreendermos melhor o campo de pesquisa utilizado na coleta de dados, vamos descrever a realidade que observamos no curso e de seus discentes.

O referido curso foi fundado há 10 anos e tem suas aulas ofertadas no turno da noite. Dessa forma, promove a formação de professores para atender a demanda das instituições de ensino locais, além de habilitar seus egressos para os cursos de mestrado acadêmico e profissional.

A turma de Geometria Analítica é composta por 14 alunos de graduação que estavam cursando o terceiro semestre do curso, com idades entre 22 e 46 anos. Como o curso é ofertado no turno da noite, todos os participantes trabalham no turno oposto, dispondo de pouco tempo para revisão de conteúdos vistos ao longo de sua formação acadêmica. Sendo assim, grande parte apresenta dificuldades para recordar tópicos básicos vistos nos semestres iniciais.

Recebemos autorização para utilizar os dados dos alunos durante a realização da disciplina Geometria Analítica, para o desenvolvimento da presente pesquisa, pelo Coordenador do referido curso de Licenciatura em Matemática, que também foi o docente responsável pela turma.

Aplicamos a prática didática com a turma visando desenvolver algumas das habilidades propostas pela disciplina, ao mesmo tempo que demonstramos como os conceitos teóricos vistos em aula possuem aplicações práticas. Realizamos os procedimentos para a coleta de dados por meio de uma folha de atividades que continha questões objetivas e dissertativas, e por meio dos arquivos dos participantes com suas construções de modelos computacionais. A análise dos dados foi fundamentada com base nesses instrumentos avaliativos.

Para a análise quantitativa dos dados, consideramos as respostas das questões objetivas, dessa forma temos noção de quantos alunos conseguiram solucionar corretamente os problemas propostos por meio da prática didática. Para a análise qualitativa utilizamos as questões dissertativas e os arquivos do GeoGebra com as construções realizadas pelos estudantes. Por meio desses instrumentos buscamos explorar o entendimento do discente sobre o conteúdo e como ele traduzia essa compreensão na construção de seu modelo computacional gráfico.

4.2 Revisão Bibliográfica

Fundamentamos a argumentação teórica das subseções 3.1 e 3.4 por meio de uma pesquisa de revisão bibliográfica sobre as temáticas discutidas. O critério

para seleção das referências que integram este estudo foi estruturado com base nos pressupostos teóricos de Bogdan e Biklen (1994), em que observamos o caráter qualitativo das fontes utilizadas ao longo do trabalho.

Orientamos a estruturação desse instrumento de pesquisa por meio dos procedimentos metodológicos indicados por Gil (2002, 2010) e Santos (2005), garantindo que a seleção dos documentos que constituem o levantamento bibliográfico seja realizada por meio de uma análise crítica sobre o tema, visando atualizar e desenvolver conhecimentos que possam contribuir para a pesquisa.

Selecionamos tanto dados estatísticos quanto conceitos teóricos que garantam uma visão geral sobre o tema, dando enfoque nos pontos principais, com intuito de articular ambas as perspectivas para um melhor entendimento do assunto. Assim, esperamos que o estudo não remonte o que já é conhecido, mas que forneça uma base de saberes que possa contribuir para a continuidade de futuras pesquisas.

... elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa. Na pesquisa bibliográfica, é importante que o pesquisador verifique a veracidade dos dados obtidos, observando as possíveis incoerências ou contradições que as obras possam apresentar (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 54).

Realizamos nossa investigação por meio de um estudo sistematizado com base em materiais publicado em livros, acervos digitais composto por artigos científicos indexados nas bases de dados SciELO e Google Acadêmico.

Primeiramente, rastreamos publicações que abordam aspectos qualitativos das dificuldades de aprendizado da Geometria Analítica, além de estudos quantitativos sobre as principais adversidades observadas nessa componente curricular dos programas de Ensino Superior. Por meio desse procedimento identificamos e selecionamos alguns artigos que apresentam dados de ambas as naturezas para compor este estudo, visto que assim temos um conhecimento diversificado sobre a temática.

Garantimos que cada um dos trabalhos escolhidos tenha enfoque em pelo menos uma problemática de aprendizado específica entre a falta de motivação para o estudo da Geometria Analítica (P1); metodologias tradicionais que usam apenas a

lousa como recurso visual (P2); ausência das habilidades fundamentais oriundas do ensino básico (P3); problemas com a visualização geométrica de elementos estudados (P4); problemas com a manipulação algébrica de equações (P5) e problemas para estabelecer relações entre representações algébricas e geométricas (P6). As referências que integram esta pesquisa estão organizadas na Tabela 5.

Tabela 5 - Revisão bibliográfica sobre dificuldades de aprendizagem em Geometria Analítica.

Artigo - Autor	Periódico	Natureza dos Dados	Problema de Aprendizagem
O ensino da Geometria Analítica: opiniões de docentes e discentes paraenses - PIRES, 2016.	Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática.	Quantitativo e Qualitativo	P1, P2, P3, P5, P6
Geometria Analítica Plana: praxeologias matemáticas no ensino médio – ANDRADE, 2007.	Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Matemática), Universidade Federal do Pará	Qualitativo	P2, P3, P4
Um Mapeamento de Pesquisas Brasileiras sobre o Trabalho Educativo com as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação no Processo de Ensinar e Aprender Geometria Analítica – JUNIOR; LOPES, 2017.	Revista Eletrônica VIDYA	Quantitativo e Qualitativo	P3, P4, P5, P6
A Coparticipação da Tecnologia Digital na Produção de Conhecimento Matemático - SOUZA; FONTES; BORBA, 2019.	Sisyphus - Journal of Education	Qualitativo	P4, P5, P6
Monitoria como Ferramenta do Processo de Ensino: Mapeamento das Dificuldades de Aprendizagem de Geometria Analítica – CARVALHO; DIAS; FERREIRA, 2015.	Anais do VIII Salão Internacional De Ensino, Pesquisa E Extensão	Quantitativo e Qualitativo	P3, P4

Fonte: Dos Autores

Para compor a revisão bibliográfica sobre as experiências didáticas realizadas com o uso do GeoGebra identificamos publicações que descrevem os procedimentos aplicados, juntamente com a fundamentação que levou a escolha da proposta. Tais informações são relevantes, uma vez que compõem as orientações para a produção da prática de ensino resultante desta pesquisa.

Outro critério para seleção dos trabalhos que compõem esta pesquisa considera a apresentação dos resultados obtidos com a aplicação da proposta didática e seus métodos para avaliação do ensino desenvolvido. Essa abordagem nos permitiu conhecer quais procedimentos já são conhecidos por seus resultados positivos, e quais ainda precisam ser estudados e reformulados para que sejam efetivos no tratamento de dificuldades de aprendizagem de tópicos específicos da Geometria Analítica.

Na Tabela 6 listamos as referências que foram estudadas ao longo da pesquisa, destacando os conteúdos abordados na didática desenvolvida e quais práticas foram trabalhadas.

Tabela 6 - Artigos estudados na revisão bibliográfica sobre as experiências didáticas desenvolvidas com o GeoGebra para o tratamento das dificuldades em Geometria Analítica

Artigo – Autor	Periódico	Atividade Desenvolvida
Ensino de Geometria Analítica auxiliado por software – SOUZA, 2016	Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática.	Minicurso sobre o ensino da Geometria Analítica com o GeoGebra 3D. Explorou a relação entre a representação algébrica e geométrica.
A Coparticipação da Tecnologia Digital na Produção de Conhecimento Matemático – SOUZA; FONTES; BORBA, 2019.	Sisyphus – Journal of Education	Explorou a verificação de Teoremas clássico por meio do GeoGebra. Trabalhou com a produção de vídeos.
O GeoGebra como ferramenta para o estudo das cônicas – Junior et al. 2015.	Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática.	Explorou o estudo das cônicas com o GeoGebra por um curso de formação de professores da rede pública.

Estudo das Posições Relativas entre Retas com o Uso de um Objeto de Aprendizagem: Relato de Experiência – GUIMARÃES; OLIVEIRA; SENA, 2016.	Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática.	Explorou o estudo das posições relativas entre duas retas por meio de construções com o GeoGebra e perguntas discursivas.
Construção de utilitários com o software GeoGebra: uma proposta de divulgação da geometria dinâmica entre professores e alunos – MÜLLER; LIEBAN, 2012.	Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo	Realizou a construção de um site para a execução de um curso de extensão voltados a produção de materiais com o GeoGebra para a produção de conteúdos de diversas áreas, tais como Derivadas e Integrais, Geometria, Trigonometria, Números Complexos.

Fonte: Dos Autores

Com base nos resultados obtidos nesses estudos bibliográficos, identificamos algumas das principais dificuldades de aprendizado que os discentes de disciplinas de Geometria Analítica enfrentam no processo de construção dos conhecimentos, definindo, portanto, alguns dos tópicos trabalhados em nossa proposta didática. Além disso, aprendemos com as experiências anteriores quais aspectos podem ser benéficos e quais ainda precisam ser esquematizados, garantindo uma orientação sobre os procedimentos contemplados em nossa produção.

Ressaltamos que não existe uma fórmula exata para que uma prática de aula possa ser mais ou menos efetiva no processo de ensino de um determinado conteúdo, visto que existem diversos fatores que influenciam seus resultados, mas conhecer aquilo que já foi desenvolvido pode contribuir para a continuidade desse modelo de pesquisa.

4.3. Pesquisa Quantitativa

Consideramos os métodos da pesquisa quantitativa fundamentados nos conceitos epistemológicos propostos por Popper (1993, 2006), que propõem o uso de técnicas da estatística clássica como meio para realizar coleta e análise de dados utilizados na produção de informações.

Esse tipo de abordagem metodológica permite que sejam coletados e analisados dados quantitativos e qualitativos, sendo que sua identificação vai depender do referencial teórico, do processo de coleta, entre outros procedimentos da pesquisa. Os métodos aplicados para realização da análise e da interpretação dos dados são decorrentes dos princípios da análise exploratória e da estatística descritiva, que trabalham com o tratamento de dados de ambas as naturezas para garantir a obtenção da maior quantidade de informações possíveis (TASHAKKORI; JOHNSON; TEDDLIE, 2009).

Observamos que a pesquisa quantitativa ainda é uma metodologia pouco utilizada dentro do campo da Educação Matemática, possivelmente, devido à dificuldade de aplicação de técnicas estatísticas necessárias para a construção de significados obtidos pelas investigações dessa natureza. Nesse sentido, Gatti (2004) aponta algumas questões que dificultam a utilização desse instrumento em estudos sobre Educação no Brasil.

O uso de dados quantitativos na pesquisa educacional no Brasil nunca teve, pois, uma tradição sólida, ou uma utilização mais ampla. Isto dificultou, e dificulta, o uso desses instrumentais analíticos de modo mais consistente, bem como dificulta a construção de uma perspectiva mais fundamentada e crítica sobre o que eles podem ou não podem nos oferecer; dificulta ainda a construção de uma perspectiva consistente face aos limites desses métodos, limites que também existem nas metodologias ditas qualitativas os quais, em geral, não têm sido também considerados. De outro lado, dificulta a leitura crítica e contextualizada quando dados quantitativos são trazidos à discussão, seja nos âmbitos acadêmicos, seja em âmbito público. (GATTI, 2004, p.12).

Por outro lado, a realização de pesquisas quantitativas em Educação Matemática oportuniza a transferência de experiências por meio da argumentação estatística, uma vez que só com o conteúdo da epistemologia matemática é que essa linguagem passa a ter um significado relevante. Tais considerações podem ser observadas no trabalho de Spagnolo (2005), em que o autor também considera que

um estudo paralelo entre os possíveis caminhos argumentativos de pesquisa pode produzir resultados que sejam mais confiáveis.

Segundo Spagnolo (2005), o instrumento da pesquisa em Didática da Matemática é o estudo de uma situação didática, que é constituída por um problema para o aluno resolver, como um problema tradicional ou uma estratégia para estruturação de conhecimentos necessários para uma situação problema. Na Figura 7, apresentamos uma representação gráfica de pesquisa em Educação Matemática proposto por Spagnolo (2005, p.5) e adaptado por Araújo e Iglioni (2010), como um exemplo para agregar um método quantitativo a uma metodologia de investigação qualitativa, que resultará em um método misto.

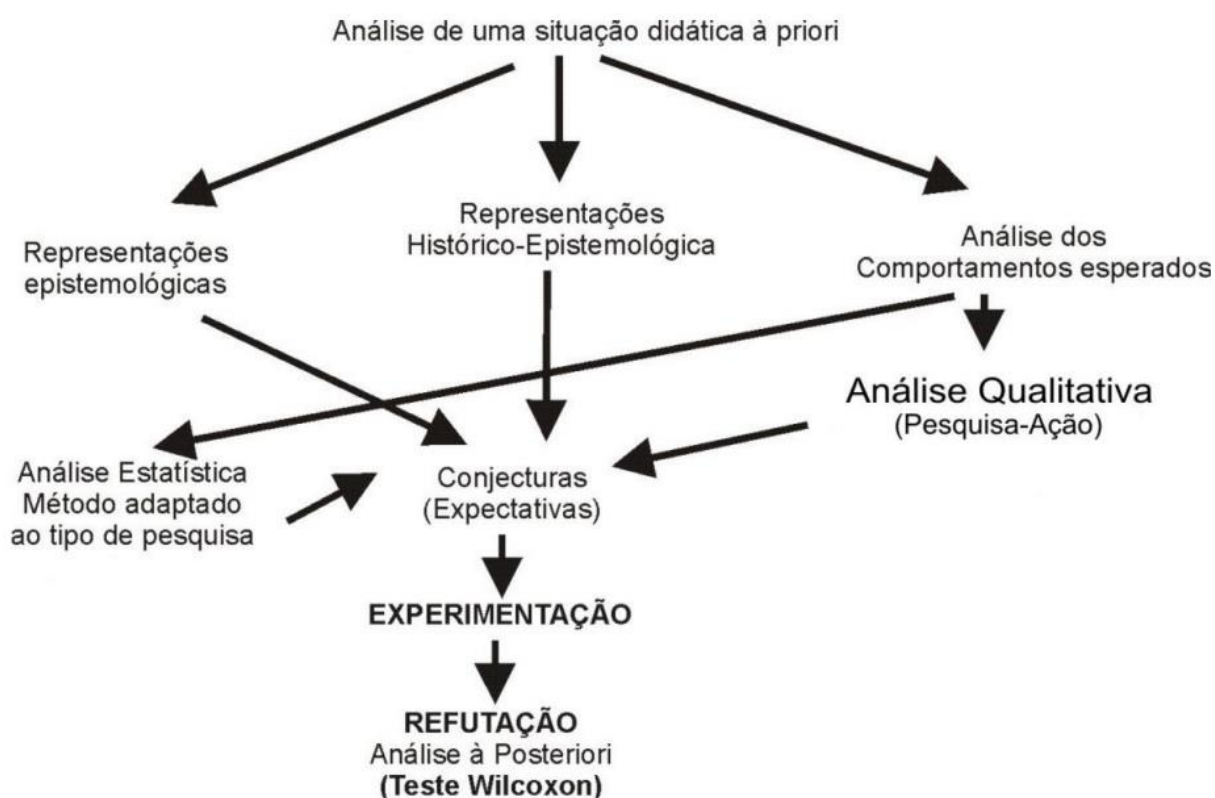


Figura 7 - Pesquisa em Educação Matemática que agrega métodos quantitativos e qualitativos.
Fonte: (SPAGNOLO, 2005, p.5).

A investigação em Educação Matemática pode se beneficiar com a utilização de procedimentos dos métodos quantitativos de pesquisa de forma agregada aos métodos considerados qualitativos na pesquisa em educação. Uma concepção semelhante pode ser identificada no trabalho de Andrew Gelman e Cosma Shalizi

(2010), em que os autores propõem que a soma de alguns elementos dos pressupostos epistemológicos de Popper (1993, 2006), Kuhn (1962) e Lakatos (1999) pode resultar na abordagem da estatística bayesiana para tratamento de dados.

Na prática didática produzida nesta pesquisa, trabalhamos com questões objetivas de múltipla escolha para avaliar o processo de compreensão dos discentes sobre alguns dos tópicos da Geometria Analítica abordados ao longo das aulas. As informações coletadas com os resultados foram analisadas de forma contextualizada com os dados de natureza qualitativa, visando propiciar uma interpretação de todo procedimento que envolve a prática didática.

4.4 Pesquisa Qualitativa

Os procedimentos referentes à aplicação da metodologia de pesquisa qualitativa são fundamentados nos pressupostos teóricos de Bogdan e Biklen (1994), uma vez que os dados desta pesquisa podem ser identificados com a concepção descrita pelos autores.

Os dados recolhidos são designados por *qualitativos*, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico. As questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outrossim, formuladas com o objetivo de investigar os fenômenos em toda a sua complexidade e em contexto natural (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.16).

Consideramos que a metodologia de pesquisa qualitativa se preocupa em analisar e “interpretar aspectos mais profundos, descrevendo a complexidade do comportamento humano. Fornece uma análise mais detalhada sobre as investigações, hábitos, atitudes, tendências de comportamento etc” (MARCONI; LAKATOS, 2007, p. 269).

... quando um autor decide conduzir sua pesquisa por um campo mais qualitativo é porque este deseja entender melhor sobre opiniões, atitudes, preferências e também comportamentos de um grupo significativo de pessoas sobre uma determinada coisa ou questionamento a respeito de algo que se pretende melhorar ou adequar de forma que responda àquilo que a população requer (LAURINDO; SILVA, 2017, p. 2).

Visando formalizar nosso entendimento sobre o significado da pesquisa qualitativa, apresentamos o entendimento dado por Denzin e Lincoln (1994).

A pesquisa qualitativa é multimetodológica quanto ao seu foco, envolvendo abordagens interpretativas e naturalísticas de assuntos. Isto significa que o pesquisador qualitativo estuda coisas em seu ambiente natural, tentando dar sentido ou interpretar os fenômenos, segundo o significado que as pessoas lhe atribuem (DENZIN; LINCOLN, 1994, p. 02).

Nesse sentido, reconhecemos que na metodologia de pesquisa qualitativa é de fundamental importância que o pesquisador realize a análise dos dados obtidos sob uma perspectiva crítica e problematizada, visando interpretar e atribuir um significado contextualizado aos resultados dos experimentos dentro do ambiente de desenvolvimento, caso contrário, o processo de coleta corre o risco de ser apenas um complicado processo de armazenamento e catalogação de informações.

Na pesquisa qualitativa podemos identificar o pesquisador como estando em contato direto com os procedimentos para coleta de dados, sendo assim, deve ter cuidado com os procedimentos adotados nessa etapa para garantir uma troca real e efetiva de informações e experiências. Sendo assim, podemos observar que a pesquisa qualitativa tem como principal pressuposto sua forma descritiva, visto que os dados se tornam o centro da investigação, além de ser possível interpretar as informações para buscar compreender os resultados.

De forma geral, nossa investigação ocorreu ao longo de dois momentos metodológicos distintos: o da pesquisa, ou coleta de dados; e a etapa da análise e interpretação desses dados coletados, formando assim o *corpus* da pesquisa.

Em um primeiro momento, realizamos uma investigação de caráter exploratório entrando em contato com os discentes participantes, visto que eles tiveram a experiência de realizar a prática didática pesquisada. Utilizamos a produção dos modelos computacionais gráficos dos alunos, suas participações ao longo das aulas e as respostas dos exercícios dissertativos escritos como instrumentos para coleta de dados (GIL, 2002, p.41).

Após a aplicação da prática didática e o recolhimento de dados, passamos para o segundo momento da pesquisa, constituído pela etapa explicativa das

informações levantadas com a investigação. Usamos do método experimental para aprofundar nossos conhecimentos da realidade estudada e identificar as razões para os resultados e dificuldades observadas na execução. Por fim, apresentamos respostas para algumas das perguntas colocadas como questões de interesse que motivaram a realização do estudo.

Na etapa explicativa da investigação utilizamos dois instrumentos que contribuem para o entendimento do problema e do campo de pesquisa, bem como para a construção dos saberes utilizados na elaboração dos resultados e conclusões finais observadas.

O primeiro deles é o levantamento de referências sobre experiências com o uso do GeoGebra para o tratamento de dificuldades com a disciplina Geometria Analítica, que foi útil para verificar se os aspectos positivos e negativos observados em outros trabalhos transcorreram da mesma forma em nossa experiência.

O segundo instrumento utilizado foi a análise dos dados coletados na investigação, desenvolvido com base nos pressupostos metodológicos da pesquisa qualitativa, contextualizamos os momentos importantes observados no experimento com os aportes teóricos pertinentes, garantindo que os resultados obtidos estão identificados em um meio acadêmico que atribui significado para esses conhecimentos, ou seja, que não ocorrem isolados da realidade (MANZINI, 1991).

Por meio desses dois recursos, aliados aos outros procedimentos e considerações relatadas ao longo desta seção, temos as ferramentas e os conteúdos necessários para a estruturação dos resultados desta pesquisa, contribuindo para apreciação do objetivo principal proposto.

No próximo capítulo, apresentamos o desenvolvimento da atividade que será ministrada na realização a pesquisa, os dados obtidos com essa aplicação serão analisados para produção de resultados.

5. DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

Nesta seção, apresentamos uma sequência didática voltada para o tratamento de dificuldades de aprendizagem em tópicos da disciplina Geometria Analítica que explora elementos da geometria computacional gráfica como recurso pedagógico e motivacional com uso do software educacional GeoGebra.

A referida sequência didática está fundamentada em uma pesquisa de revisão bibliográfica que resgata experiências que abordam problemáticas similares com uso desse mesmo recurso pedagógico. A produção dessa prática de aula e os resultados advindos das análises de sua aplicação constituem a principal contribuição desta pesquisa.

O restante da seção está organizado como segue. No primeiro momento recordamos as principais dificuldades para o aprendizado da Geometria Analítica levantadas ao longo da seção 3 e discutimos como trabalhamos cada uma dessas adversidades utilizando os recursos que municiam nossa proposta. Em seguida, apresentamos as atividades de aula que compõem a sequência didática. Para organizar essa exibição, dividimos a seção em aulas que apresentam os conteúdos da Geometria Analítica trabalhados na sequência didática, para isso, formalizamos os conteúdos e delineamos como a explicação foi apresentada aos discentes. Por fim, tecemos nossas considerações finais sobre a proposta, destacando possíveis pontos de interesse e preocupação frente a sua viabilidade e execução.

5.1 O Tratamento das Dificuldades de Aprendizado

As dificuldades de aprendizagem em Geometria Analítica abordadas na sequência didática foram levantadas pela revisão bibliográfica apresentada na seção 3.1, são elas: Falta de motivação para o estudo da Geometria Analítica; Metodologias tradicionais que usam apenas a lousa como recurso visual; Ausência de habilidades fundamentais oriundas do ensino básico; Problemas com a visualização geométrica de elementos estudados; Problemas com a manipulação

algébrica de equações; Problemas para estabelecer relações entre representações algébricas e geométricas.

Em seguida, descrevemos a abordagem e os recursos utilizados para o tratamento de cada problemática durante a sequência didática. Alguns elementos que compõem a prática foram selecionados visando tratar de adversidades específicas, sendo assim, esse delineamento inicial foi fundamental para a estruturação do trabalho.

Falta de motivação para o estudo da Geometria Analítica: Optamos por desenvolver o estudo dos conteúdos por meio de suas aplicações práticas, tentando garantir que o aluno identifique uma situação em que a matéria vista em sala de aula seja utilizada em um campo de interesse social ou profissional.

Trabalhamos com recursos da geometria computacional gráfica, visto que a mesma está presente em diferentes mídias de entretenimento popular, expressões artísticas e ramos do mercado de trabalho, sendo esses prováveis interesses do cotidiano discente. Além disso, tal abordagem permite que os estudantes tenham acesso ao computador e aprendam a como manusear softwares em determinadas situações, sendo essa uma demanda crescente da sociedade moderna.

Metodologias tradicionais que usam apenas a lousa como recurso visual: Alguns tópicos da Geometria Analítica podem ser trabalhados com recursos que permitem a visualização dinâmica de gráficos construídos com explicações dadas em sala de aula, permitindo que o estudante compreenda algumas interações entre elementos geométricos e algébricos.

Utilizamos o GeoGebra como ferramenta pedagógica, uma vez que ele fornece ao aluno o controle de uma janela de visualização que pode ser livremente manipulada para identificar todos os procedimentos desenvolvidos na sequência didática. Assim, muitas explicações são qualificadas por meio das interações com o software.

Ausência das habilidades fundamentais oriundas do ensino básico: Realizando exercícios objetivos e dissertativos promovemos uma revisão de conteúdos básicos da Geometria Analítica que são pré-requisitos necessários para a continuidade dos estudos em nível superior. Além disso, contextualizamos esses

tópicos elementares com suas representações geométricas com o uso do GeoGebra e demonstramos sua relevância prática por meio da geometria computacional gráfica.

Problemas com a visualização geométrica dos elementos estudados:

Muitos elementos gráficos que compõem o espaço tridimensional, em que a Geometria Analítica é desenvolvida, possuem representações visuais pouco intuitivas.

Utilizamos os recursos gráficos da janela de visualização do GeoGebra para demonstrar a construção de elementos fundamentais do estudo da geometria, como conjuntos de retas e planos, por meio do significado de suas respectivas equações. Além disso, exploramos relações de pertinência e posições relativas entre objetos distintos, permitindo compreender as diferentes interações entre as figuras estudadas.

Problemas com a manipulação algébrica de equações: Parte dos exercícios de Geometria Analítica envolve o tratamento de equações para serem compreendidos e solucionados, sendo assim, realizamos uma revisão dos procedimentos que exploram a manipulação algébrica por meio da correção das atividades propostas em aula.

A janela de visualização das equações algébricas do GeoGebra pode contribuir para a reescrita e simplificação de determinadas expressões, além de permitir que a manipulação de equações seja acompanhada por mudanças gráficas que podem ser visualizadas. Dessa forma, estudantes podem experimentar alterações e verificar se seus procedimentos apresentam resultados coerentes com a teoria desenvolvida.

Problemas para estabelecer relações entre representações algébricas e geométricas: A Geometria Analítica estabelece conexões entre tópicos da Geometria e da Álgebra, tratando de problemas que abordam soluções de um sistema linear de duas incógnitas por meio de retas e planos, a exibição de figuras que podem ser descritas por meio de uma equação, entre outros.

O software GeoGebra é propício para o desenvolvimento desse estudo por proporcionar a dupla correspondência entre objetos, ou seja, cada expressão

disposta na janela algébrica corresponde a um objeto na janela gráfica. Dessa forma, o aluno investiga elementos algébricos identificando-os com suas representações geométricas, possibilitando verificações e análises, conforme as expressões algébricas são alteradas, facilitando a compreensão do conteúdo.

As práticas apontadas ao longo desta subseção podem contribuir para o entendimento de alguns tópicos problemáticos do ensino da Geometria Analítica por estarem direcionadas para dificuldades de aprendizagem específicas dos conteúdos, ou seja, é dada uma atenção especial para cada tópico que possa ser considerado de difícil compreensão.

A escolha dos procedimentos está fundamentada nos trabalhos de autores que estudam a temática. Como exemplo, destacamos a obra *GeoGebra: soluções na geometria* (HOLANDA FILHO; CRUZ, 2019) em que são apresentadas atividades didáticas realizadas com uso do GeoGebra, visando à superação de adversidades que podem ser apresentadas pelos estudantes.

Também apreciamos o trabalho de Maria da Conceição Vieira Gomes, intitulado *“Álgebra, Geometria e Aritmética de Mãos Dadas no Ensino Fundamental”* (GOMES, 2003), em que a autora propõe que a alfabetização algébrica e aritmética ocorra de forma integrada com outros campos de conhecimento da matemática, inclusive com a geometria, para garantir que o estudante esteja familiarizado com o tratamento e manipulação de equações específicas de cada área.

Por fim, somos conscientes de que muitos outros trabalhos com que tivemos contato ao longo de nossa formação acadêmica influenciaram subjetivamente a escolha das metodologias apreciadas para o tratamento das dificuldades de aprendizagem em Geometria Analítica.

5.2 Proposta de Sequência Didática

Nesta subseção apresentamos nossa sequência didática como uma sucessão de planos de aula pensados para serem realizados ao longo de pelo menos quatro encontros de dois períodos (considerando que cada período tenha em torno de 45 minutos de duração).

Os conteúdos desenvolvidos na proposta, e abordados ao longo das aulas, contemplam tópicos que vão desde os elementos fundamentais para o desenvolvimento da Geometria Analítica, como conceitos de pontos, vetores, retas e planos, até o estudo de suas equações, posições relativas e intersecção, conceitos necessários para a construção de modelos computacionais gráficos de sólidos de revolução que constitui o principal objetivo do conjunto de atividades propostas.

Para fundamentar os conteúdos explorados pela sequência didática, selecionamos referências bibliográficas presentes em ementas curriculares dos principais cursos de Geometria Analítica das instituições de Ensino Superior nacionais. O Tabela 7 apresenta os livros utilizados.

Tabela 7 - Livros que fundamentaram os conteúdos de Geometria Analítica.

Livros de Geometria Analítica
CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial . Pearson Academic, 2004.
LIMA, Elon Lages; CARVALHO; Paulo Cezar Pinto. Coordenadas no Plano . Rio de Janeiro: SBM, 2002.
WINTERLE, Paulo; STEINBRUCH, Alfredo. Vetores e Geometria Analítica 2 ed. São Paulo: Makron Books, 2000.
BALDIN, Yuriko Yamamoto; FURUYA, Yolanda K. Saito. Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra . EduFSCar: São Carlos, 2011.

Fonte: Dos Autores.

O público alvo para a aplicação da sequência didática é composto por alunos de Ensino Superior que estejam cursando as disciplinas Geometria Analítica ou Cálculo Diferencial e Integral, que exploram elementos do espaço tridimensional nos conceitos trabalhados, como o estudo de funções reais de várias variáveis reais.

A sequência didática é direcionada para a segunda parte de um primeiro curso de Geometria Analítica no Ensino Superior, ou para um curso posterior. Nesse sentido, consideramos como pré-requisitos o conhecimento de ferramentas básicas do tratamento da álgebra de vetores, como o produto interno e o produto vetorial, mesmo assim, revisamos alguns tópicos fundamentais.

Iniciamos sintetizando os tópicos abordados na sequência didática, visando propiciar um acompanhamento do conteúdo por parte dos alunos, bem como dos leitores.

Aula 1:

- Revisão: Vetores e dependência linear;
- O estudo da equação da reta.

Aula 2:

- Motivação: Aplicações da Equação do plano relacionadas com Geometria Computacional;
- Definição de um Plano;
- Equações do Plano: Vetorial e Paramétrica.

Aula 3:

- Intersecção entre retas e planos;
- Planos paralelos e perpendiculares;
- Construção da Grade Tridimensional;
- Mapeamento de Pontos.

Aula 4:

- Construção de um modelo computacional gráfico de um sólido de Revolução.

5.2.1 Aula 1: Vetores e o Estudo da Reta

Primeiramente, revisamos o conhecimento prévio dos alunos sobre vetores e dependência linear, visto que pretendemos generalizar alguns conceitos desenvolvidos no estudo de vetores para trabalhar com a equação da reta e introduzir o estudo do plano.

Motivamos o estudo falando sobre a aplicação das equações da reta e do plano na construção de grades para o mapeamento de pontos na geometria computacional. Utilizando a motivação, introduzimos conceitos intuitivos associados

com a definição de retas e planos no espaço tridimensional. Em seguida, formalizamos esses conceitos por meio das equações que representam uma reta. Por fim, apresentamos exemplos de aplicação do conteúdo desenvolvido.

Iniciamos apresentando a definição de vetor, visto que é o elemento fundamental para todo desenvolvimento da Geometria Analítica. Nosso objetivo nesse primeiro momento foi revisar conteúdos básicos necessário na construção da grade tridimensional, de planos paralelos e perpendiculares, que é utilizada no procedimento de captura de pontos de interesse para a construção do modelo computacional gráfico.

Definição (Vetor): Definimos um vetor por meio de dois pontos, digamos A e B, assim temos que o segmento de reta orientado de A para B é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. Vetores podem ser representados por segmentos de reta orientados, como mostra a Figura 8.

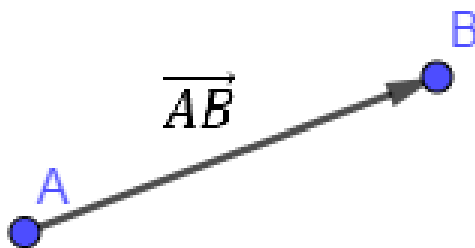


Figura 8 - Representação gráfica de um vetor.
Fonte: Dos Autores.

Como estamos interessados em tratar da construção de retas e planos paralelos para construir uma grade tridimensional, apresentamos o conceito de paralelismo entre vetores e a norma de um vetor.

Vetores Paralelos: Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ não-nulos são paralelos (indica-se $\vec{x} \parallel \vec{y}$) se um representante de $\vec{x}$ é paralelo a um representante de $\vec{y}$.

Norma de um Vetor: Chamamos norma (ou módulo, ou comprimento) de um vetor ao comprimento de qualquer um de seus representantes; indica-se a norma de $\vec{x}$ por $||\vec{x}||$.

Por fim, para desenvolver o estudo sobre as equações que representam retas e planos, apresentamos o conceito de dependência linear entre pares e triplas de

vetores, visto que esses tópicos são pré-requisitos para construção de importantes definições.

Dependência Linear: Um par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é **linearmente dependente** se $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são paralelos. Caso contrário, $(\vec{u}, \vec{v})$ é dito **linearmente independente**. A Figura 9 ilustra a definição.

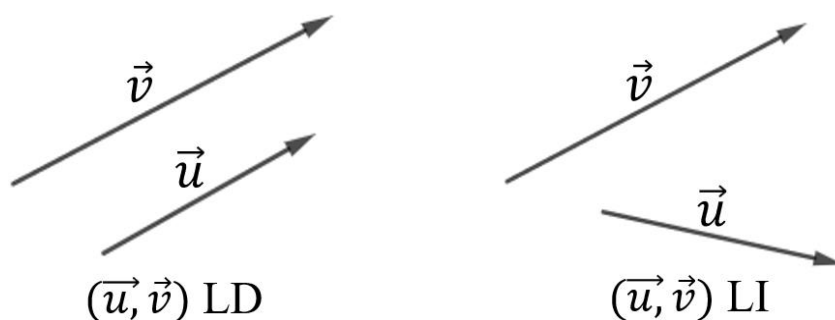


Figura 9 - Dependência e Independência Linear entre um par de vetores.

Fonte: CAMARGO, BOULOS, 2004.

Uma tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é **linearmente dependente** se $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano. Caso contrário, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é **linearmente independente**. A Figura 10 ilustra a definição.

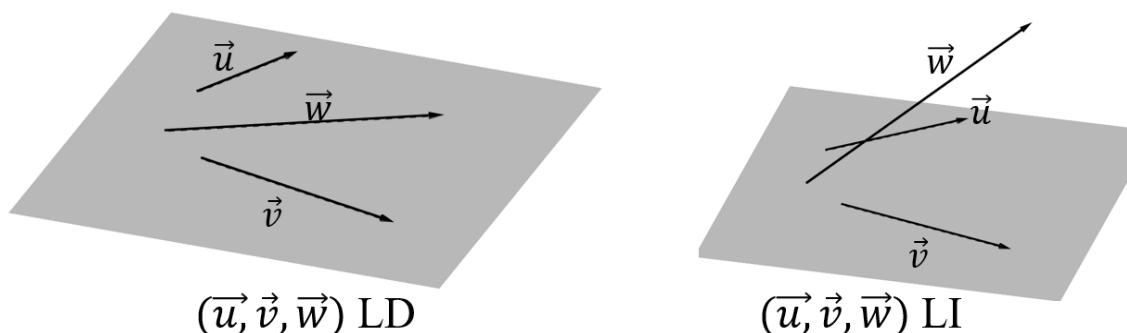


Figura 10 - Dependência e Independência Linear entre uma tripla de vetores.

Fonte: CAMARGO, BOULOS, 2004.

A explicação da revisão dos conceitos de vetor e dependência linear foi feita com auxílio dos recursos visuais do software GeoGebra. Em cada passo demonstramos a representação gráfica desses conceitos e questionamos os alunos sobre como os mesmos podem ser construídos, bem como problematizamos sobre outros possíveis significados para os tópicos apresentados. A Figura 11 ilustra parte dos procedimentos realizados com o GeoGebra.

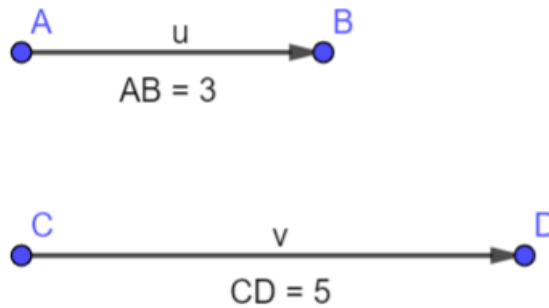


Figura 11 - Vetor, Paralelismo e Norma
Fonte: Dos Autores.

Após as preliminares técnicas, motivamos o estudo apresentando uma aplicação de equações da reta em um problema de geometria computacional associado à modelagem computacional gráfica de objetos, que nesse momento é vista apenas como uma simplificação da grade tridimensional.

Para criar um modelo computacional gráfico de determinado objeto podemos construir uma grade tridimensional para mapear os pontos do objeto no espaço e traduzir esse mapeamento de informações para uma série de equações matemáticas que podem ser interpretadas pelo computador.

Para construir uma grade tridimensional utilizamos diversas retas e suas respectivas equações, de forma que cada região em que temos interesse em mapear um ponto seja cortada por pelo menos uma reta. Dessa forma, podemos mapear a posição do ponto de interesse por meio da equação da reta em que ele está contido. Na Figura 12 é ilustrado um exemplo de como realizar esse mapeamento.

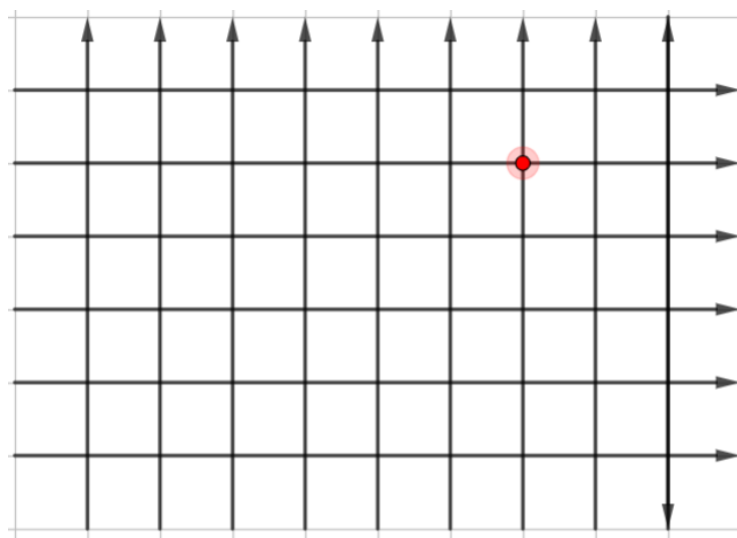


Figura 12 - Grade de retas para mapeamento de pontos
Fonte: Dos Autores.

Depois, formalizamos os conceitos relacionados ao estudo da reta. Buscamos que o discente compreenda que o processo de construção da reta depende de um ponto e de um vetor diretor. Sendo assim, a explicação do conceito de reta é acompanhada por uma construção feita no GeoGebra em que o estudante pode observar o processo de conceituação antes de apresentarmos a definição.

Primeiramente, apresentamos um texto introdutório para motivar o desenvolvimento do tópico.

O método adotado na Geometria Analítica, atribuído a René Descartes (1596-1650), consiste em associar a cada conjunto de pontos de $\mathbb{E}^3$ uma equação ou sistema de equações que o tenha por conjunto-solução. A finalidade é trabalhar com tais equações e tirar conclusões a respeito do conjunto. Assim, por exemplo, equações de uma reta r devem ter soluções exatamente os pontos de r ; trabalhando com elas, devemos ser capazes de obter pontos da reta, verificar se ela é paralela a uma reta conhecida, se está contida em um plano π , descobrir quais pontos de r têm uma dada propriedade, enfim, de resolver problemas geométricos que envolvam a reta r . Pontos, porém, não se prestam muito bem à manipulação algébrica, pois a única operação envolvendo pontos que conhecemos é a que já foi estudada, e seu repertório de propriedades algébricas é reduzido. Por esse motivo, vamos preferir trabalhar com suas coordenadas, que, sendo números reais, têm uma afinidade muito maior com a Álgebra. Esse estudo é uma introdução à aplicação desse método ao estudo de retas e planos de $\mathbb{E}^3$ (CAMARGO; BOULOS, 2004, p. 144).

Construímos as equações da reta juntamente com os alunos. Para isso, questionamos o que é necessário para definir uma reta?

Inicialmente intuímos que precisamos de pelo menos um ponto, no entanto, utilizando o software GeoGebra como ferramenta visual, mostramos aos alunos que com apenas um ponto não é possível definir uma única reta, visto que é possível construir várias retas distintas que passam por apenas um ponto, como pode ser visto na Figura 13.

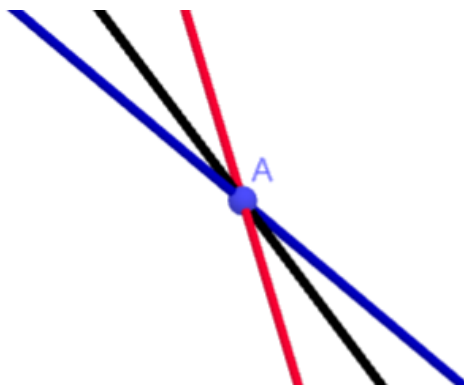


Figura 13 - Retas que passam por um ponto
Fonte: Dos Autores.

Sendo assim, induzimos a verificação de que precisamos de pelo menos dois pontos para definir uma reta e, por meio de experimentos realizados com o software GeoGebra, concluímos que necessitamos de pelo menos dois pontos distintos para definir uma única reta, como mostra a Figura 14.

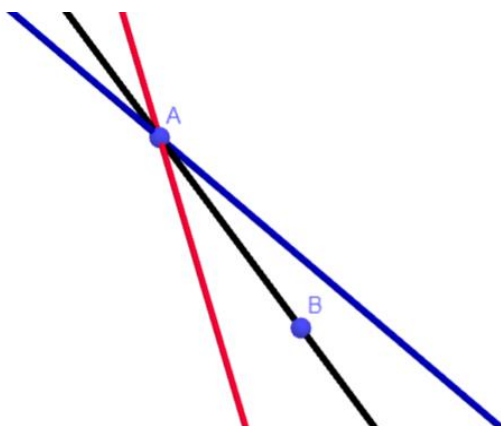


Figura 14 - Reta definida por dois pontos
Fonte: Dos Autores.

Visando equacionar a definição da reta, realizamos um paralelo com o estudo que revisamos sobre vetores e paralelismo. Relembramos que quando temos dois pontos podemos sempre criar um vetor, e observamos que esse vetor será paralelo à reta que pode ser definida por esses pontos, ou seja, esse vetor pode atuar como vetor diretor da reta. Essa observação pode ser vista na Figura 15.

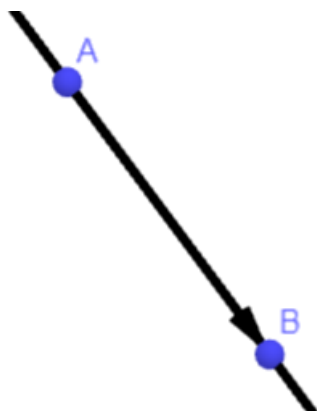


Figura 15 - Vetor diretor da reta definida por dois pontos.
Fonte: Dos Autores.

Uma vez estabelecida essa construção, formalizamos os conteúdos.

Equação Vetorial da Reta: Sejam $\vec{u} \neq \vec{0}$ um vetor diretor de uma reta r e A um ponto de r , como mostrado na Figura 16. Um ponto X pertence a r se, e somente se, $(\overrightarrow{AX}, \vec{u})$ é LD, ou seja, se, e somente se, existe um número real λ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u}$. Isso equivale a

$$X = A + \lambda \vec{u}$$

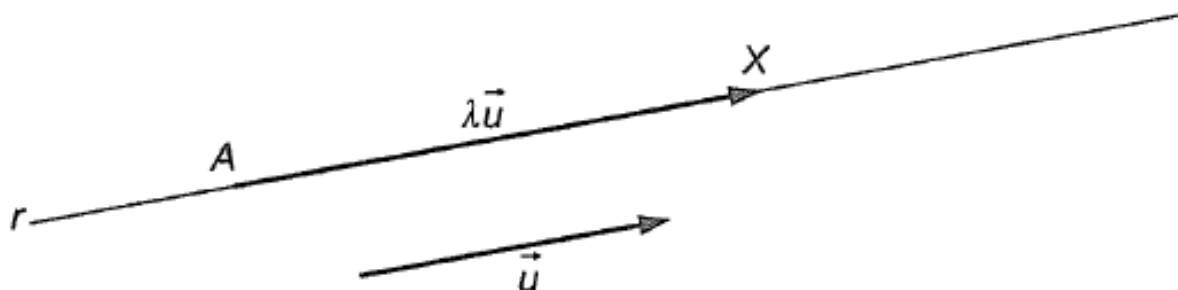


Figura 16 - Representação da Equação Vetorial da Reta.
Fonte: CAMARGO; BOULOS, 2004.

Assim, a cada número real λ fica associado um ponto X de r e, reciprocamente, se X é um ponto de r , existe λ satisfazendo a equação. Na linguagem clássica da Geometria, r é o lugar geométrico dos pontos X para os quais existe λ que torna verdadeira a equação da reta.

Em seguida, recordamos que elementos da Geometria Analítica podem ser representados com o uso do sistema cartesiano, sendo assim, podemos traduzir essa construção identificando as coordenadas dos pontos e vetores utilizados.

Equação Paramétrica da Reta: Assumindo um sistema de coordenadas com $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (a, b, c)$. Podemos escrever $X = A + \lambda \vec{u}$ em coordenadas, assim obtemos:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ X & A & \vec{u} \end{matrix}$$

Observe que a, b, c não são todos nulos, pois $\vec{u} \neq \vec{0}$, isto é, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Para fixar os conteúdos vistos, recomendamos que os alunos reproduzissem as construções realizadas em aula com o GeoGebra. Dessa forma, poderiam repetir os procedimentos exemplificados para compreender de sua própria perspectiva o processo de estruturação das equações da reta. Tal procedimento também buscou garantir que o aluno realizasse experimentos com o software para esclarecer quaisquer dúvidas que não tenham sido perceptíveis na primeira explanação, além de incentivar a prática do manuseio do recurso.

Fornecemos uma lista com exercícios (Anexo A) para serem realizados por experimentações com uso do GeoGebra, as atividades verificavam o entendimento sobre os conteúdos trabalhados, como o mapeamento de pontos. Todas as listas de exercícios das aulas estão disponíveis nos anexos deste trabalho.

Ao final da aula, as construções realizadas com uso do GeoGebra e a resolução da lista de exercícios foram entregues ao professor, sendo utilizadas como instrumento de avaliação e de coleta de dados para a investigação. O mesmo ocorre ao final de cada aula, sendo assim, vamos omitir o trecho.

5.2.2 Aula 2: Estudo da Equação do Plano

Uma vez apresentado o estudo sobre as equações da reta, desenvolvemos os conceitos para o estudo do plano. Novamente, considerando a dificuldade de entendimento sobre como essas expressões são estabelecidas, elaboramos a construção desses conteúdos juntamente com o auxílio de recursos visuais do GeoGebra, ilustrando os procedimentos necessários para estabelecer essas equações como decorrentes de interações entre um ponto e dois vetores.

Primeiramente recordamos o estudo sobre retas, visto que generalizamos alguns conceitos desenvolvidos na reta para o estudo do plano.

Para motivar o estudo apresentamos a aplicação das equações do plano no problema da geometria computacional que lida com modelagem computacional gráfica, dessa vez apresentando a versão que trata da grade tridimensional construída com planos.

Desejamos criar um modelo computacional gráfico de determinado objeto, para isso devemos construir uma grade tridimensional para mapear os pontos do objeto no espaço e traduzir esse mapeamento de informações em uma série de equações matemáticas que podem ser interpretadas pelo computador.

Para construir uma grade tridimensional utilizamos diversos planos e suas equações, de forma que cada região que temos interesse em mapear um ponto seja cortada por pelo menos um plano. Dessa forma, mapeamos a posição do ponto de interesse por meio da equação do plano em que ele está contido.

Para mostrar como lidamos com esse mapeamento de pontos apresentamos o seguinte problema.

Problema: Suponha que estamos utilizando os planos π_1, π_2 e π_3 , dados por suas equações vetoriais, para construir uma grade que será utilizada no mapeamento de pontos.

$$\pi_1: (x, y, z) = (0,0,0) + \lambda_1(1,0,0) + \mu_1(0,1,0)$$

$$\pi_2: (x, y, z) = (0,4,0) + \lambda_2(1,0,0) + \mu_2(0,0,1)$$

$$\pi_3: (x, y, z) = (2,0,0) + \lambda_3(0,1,0) + \mu_3(0,0,1)$$

Considere que temos interesse em mapear os pontos $A = (4,3,0)$, $B = (1,4,7)$ e $C = (2,5,3)$. Verifique que $A \in \pi_1$, $B \in \pi_2$ e $C \in \pi_3$.

Informamos que o problema será resolvido ao fim da aula, visto que precisamos dos conteúdos da mesma para construir a solução, e passamos para o desenvolvimento. Iniciamos recordando que para definir uma reta são necessários um ponto e um vetor diretor. Visando estender o conceito de definição da reta para o plano, questionamos aos alunos: o que é necessário para definir um plano?

Inicialmente intuímos que vamos precisar de pelo menos dois pontos distintos, no entanto, utilizando o software GeoGebra como ferramenta visual, mostramos aos alunos que com apenas dois pontos não é possível definir um único plano, visto que é possível construir vários planos distintos que passam por dois pontos, como ilustra a Figura 17.

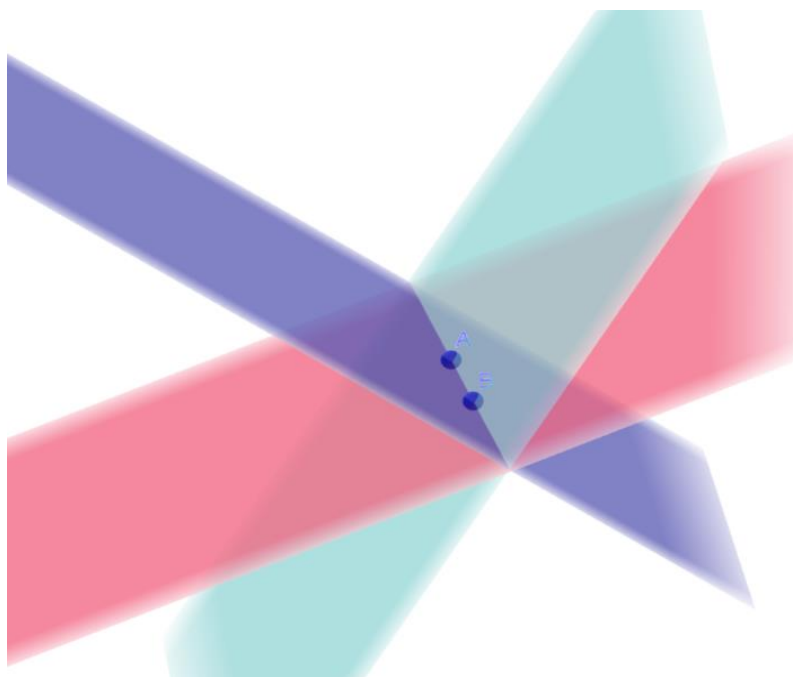


Figura 17 - Múltiplos planos passam por dois pontos
Fonte: Dos Autores.

Sendo assim, induzimos a verificação de que vamos precisar de pelo menos três pontos para definir um plano e, por meio de experimentos realizados com o software GeoGebra, concluímos que necessitamos de pelo menos três pontos não colineares para definir um plano, como podemos observar na Figura 18.

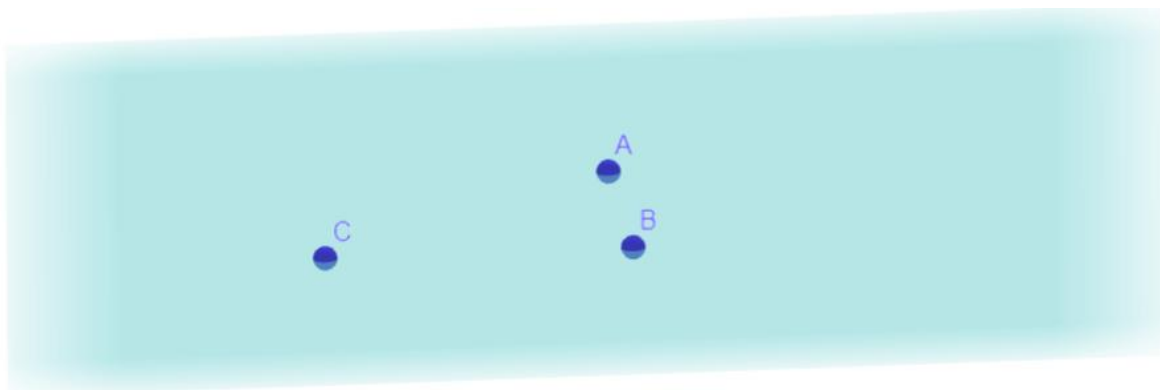


Figura 18 - Três pontos não colineares definem um plano
Fonte: Dos Autores.

Determinação de um plano:

- Precisamos de pelo menos 3 pontos não-colineares para determinar um plano, digamos pontos A , B e C ;
- Utilizando esses 3 pontos não-colineares podemos criar dois vetores que formam um par L.I., digamos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Tal fato pode ser observado na Figura 19.

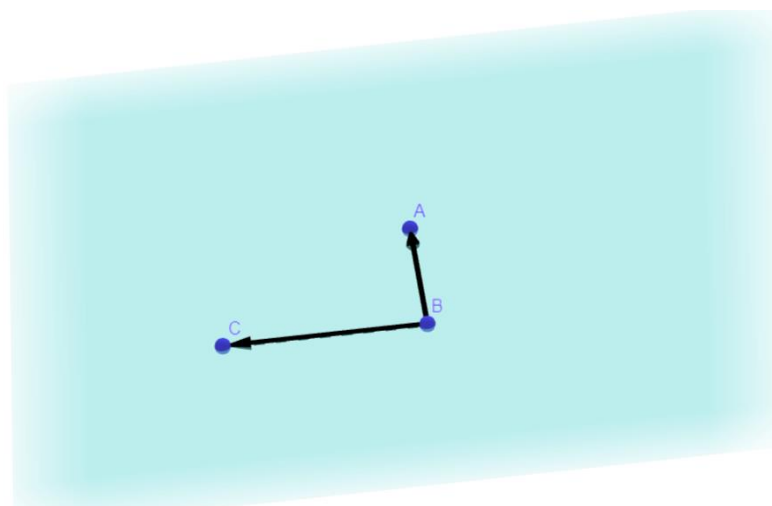


Figura 19 - Vetores diretores do Plano
Fonte: Dos Autores.

Logo precisamos de um ponto e um par de vetores L.I. para determinar um plano.

Visando equacionar a definição do plano, realizamos um paralelo com o estudo que revisamos sobre a equação da reta. Relembramos que quando tínhamos dois pontos em uma reta podíamos criar um vetor paralelo à reta, ou seja, um vetor

que podia atuar como vetor diretor da reta. Pensando de forma análoga, note que como os 3 pontos que definem o plano não são colineares podemos criar pelo menos dois vetores, digamos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, paralelos ao plano que não são múltiplos, ou seja, formam um conjunto L.I.

Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é L.I., todos os planos paralelos a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos entre si. Logo, assim como um vetor não-nulo determina a direção de uma reta, um par de vetores LI determina a direção de um plano. Com isso, formalizamos a próxima definição.

Definição: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI e paralelos a um plano π , o par $(\vec{u}, \vec{v})$ é chamado **par de vetores diretores de π** . Vetores diretores de um plano surgem sempre aos pares e são LI.

Equação Vetorial do Plano: Seja A um ponto do plano π e $(\vec{u}, \vec{v})$ um par de vetores diretores de π . Um ponto X pertence a π se, e somente se, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AX})$ é LD, ou seja, se, e somente se, existem números reais λ e μ tais que $\vec{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Essa definição pode ser ilustrada pela Figura 20.

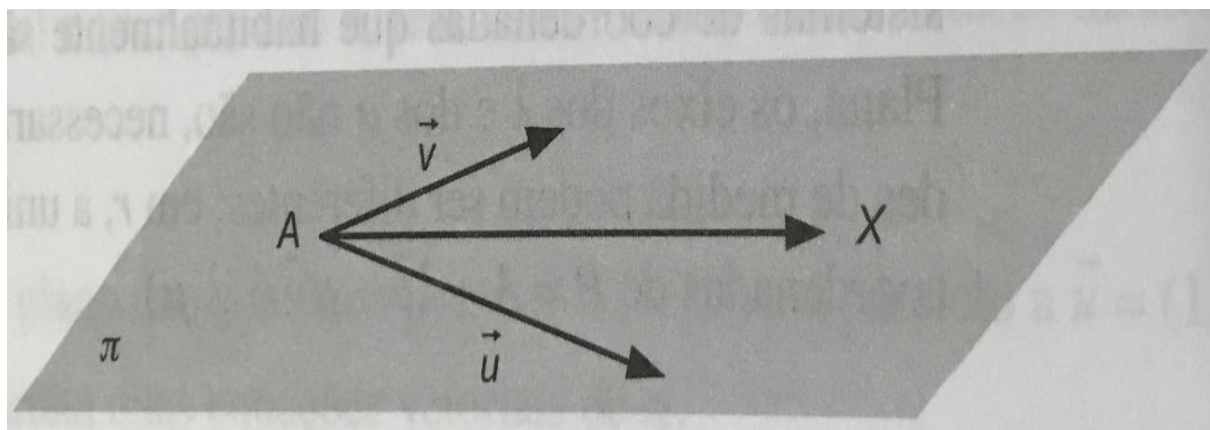


Figura 20 - Representação da Equação Vetorial do Plano.
Fonte: CAMARGO, BOULOS, 2004.

Isso equivale a dizer que

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Por meio dessa igualdade fica associado, a cada par (λ, μ) de números reais, um ponto X do plano π . Reciprocamente, se X pertence a π , existem λ e μ que tornam verdadeira a igualdade acima.

Existem semelhanças entre as equações vetoriais da reta e do plano, a diferença reside na quantidade de vetores diretores (e, conseqüentemente, na de parâmetros) utilizados, que passou de um para dois.

Equação Paramétrica do Plano: Usando um sistema de coordenadas, tomamos $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. A equação $X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ fica:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p) \\ &= (x_0 + \lambda a + \mu m, y_0 + \lambda b + \mu n, z_0 + \lambda c + \mu p)\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & \vec{u} & \vec{v} \end{matrix}$$

Concluindo o estudo, resolvemos o problema apresentado na motivação. Para isso, vamos primeiramente construir as equações paramétricas dos planos, assim temos:

$$\pi_1: \begin{cases} x = 0 + \lambda_1 \\ y = 0 + \mu_1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 0 + \lambda_2 \\ y = 4 \\ z = \mu_2 \end{cases} \quad \pi_3: \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda_3 \\ z = \mu_3 \end{cases}$$

Sendo assim, considere

- $A \in \pi_1$: basta considerar $\lambda_1 = 4$ e $\mu_1 = 3$.
- $B \in \pi_2$: basta considerar $\lambda_2 = 1$ e $\mu_2 = 7$.
- $C \in \pi_3$: basta considerar $\lambda_3 = 5$ e $\mu_3 = 3$.

Para concluir o problema apresentamos para os alunos, utilizando o software GeoGebra como recurso visual, os planos considerados no problema e os pontos de interesse que foram mapeados, como na Figura 21.

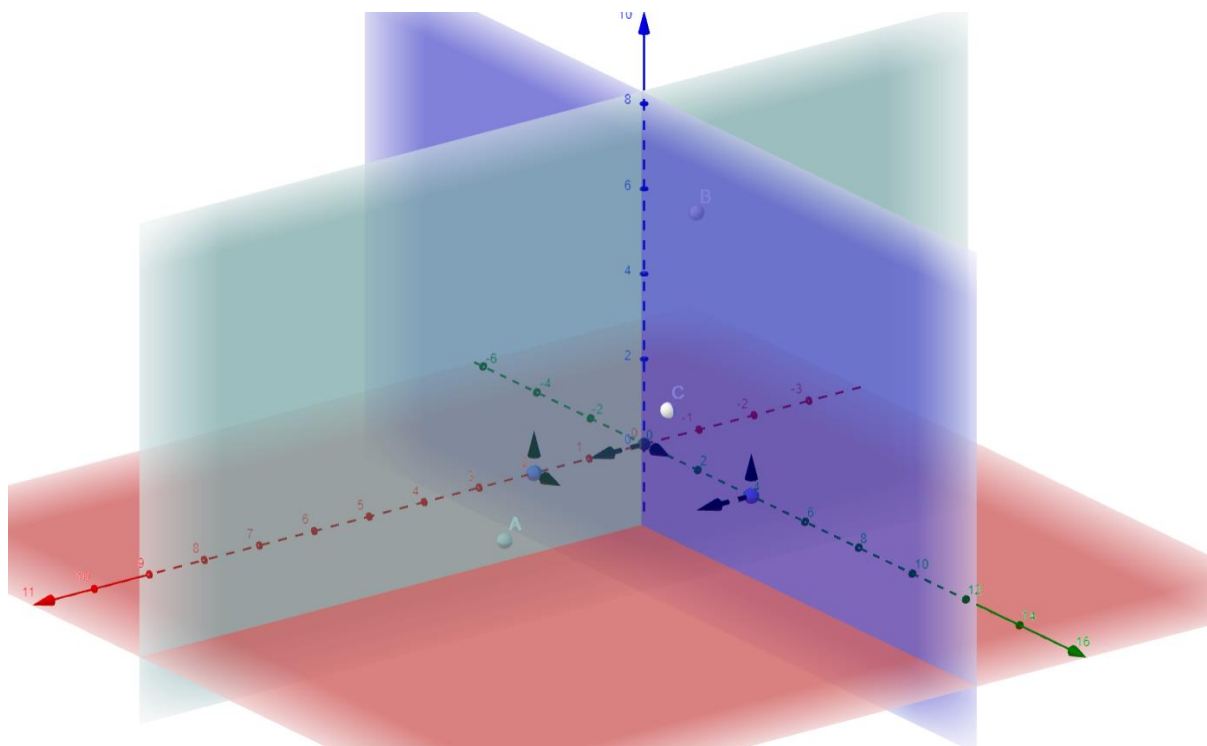


Figura 21 - Mapeamento de pontos no Exercício.
Fonte: Dos Autores.

Verificar que cada ponto pertence ao seu respectivo plano pode ser considerado simples, visto que para realizar o mapeamento dos pontos geralmente escolhemos vetores diretores que facilitam os cálculos envolvidos no processo. No entanto, observamos que nem sempre é fácil encontrar os coeficientes (λ, μ) que definem um ponto em um plano e que exemplos disso podem ser encontrados em exercícios.

Para fixar os conteúdos vistos, recomendamos que os alunos reproduzam as construções realizadas em aula com o GeoGebra, assim podem repetir os procedimentos exemplificados para um melhor entendimento. Além disso, possuem a oportunidade de realizar experimentos enquanto revisam o conteúdo, podendo fazer descobertas e conjecturas sobre esses conhecimentos. Essa atividade também possibilitou a manipulação do software, garantindo a proficiência para o desenvolvimento de outras práticas.

Também fornecemos outra lista com exercícios (Anexo B) objetivos e dissertativos que deviam ser feitos por meio de experimentações realizadas com o auxílio do GeoGebra. Tais atividades tinham como objetivo verificar o entendimento

do aluno sobre os conteúdos trabalhados e se a abordagem proposta estava fornecendo resultados para a aprendizagem.

5.2.3 Aula 3: Construção da Grade Tridimensional

Iniciamos a aula recordando o estudo sobre as equações da reta e do plano, uma vez que vamos estudar as interações entre esses elementos, como intersecção e posições relativas.

Visando conceituar as possíveis intersecções entre duas retas, questionamos aos alunos: de quantas maneiras duas retas podem se tocar? Por meio de experimentações construídas com o GeoGebra, ilustramos que ou duas retas não se tocam, ou se tocam em um único ponto, como mostrado na Figura 22. Ainda existe o caso em que as retas são idênticas, sua ilustração será omitida.



Figura 22 - Intersecção entre retas
Fonte: Dos Autores.

Intersecção entre duas retas: Dadas as duas retas r e s :

$$r: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$$

$$s: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \mu(d, e, f).$$

Dizemos que elas possuem intersecção se existe uma solução única (λ, μ) para o sistema que iguala cada uma de suas coordenadas, nesse caso, a intersecção é o ponto resultante dessa solução. Caso contrário, ou as retas são idênticas (existem infinitas soluções para o sistema), ou as retas não possuem intersecção (não existe solução para o sistema).

Motivamos o estudo explicando que utilizamos essas intersecções nos procedimentos para captura de pontos de interesse, visando identificar quais pontos de uma reta estão presentes nos planos que compõem a grade tridimensional. Em seguida, aproveitamos o momento para reapresentar o problema, o mesmo será omitido visto que já foi feito anteriormente.

Com base na apresentação do problema, reforçamos que é necessário saber identificar a intersecção entre um plano e uma reta, assim questionamos aos alunos: como essa intersecção pode ocorrer?

Com o auxílio do GeoGebra realizamos construções gráficas que demonstram que as possíveis intersecções entre um plano e uma reta são um ponto, ou a reta em si, ou eles não se tocam. Tais conclusões são ilustradas na Figura 23, sendo omitido o caso em que a reta está contida no plano.

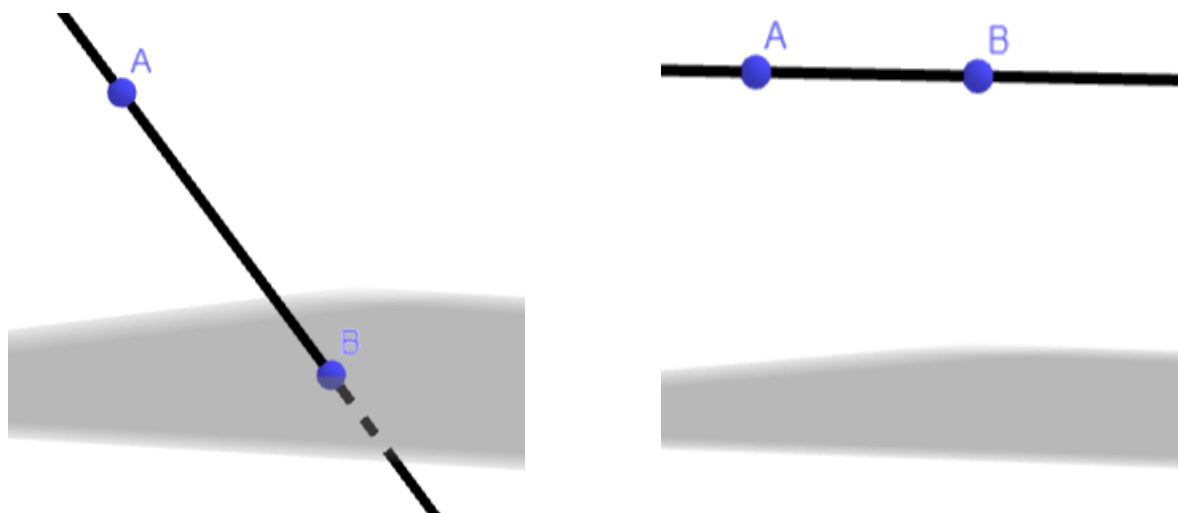


Figura 23 - Intersecção entre reta e plano
Fonte: Dos Autores.

Intersecção entre plano e reta: Dado um plano π as uma reta r :

$$\pi: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p)$$

$$r: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \alpha(d, e, f).$$

Dizemos que eles possuem intersecção se existe uma solução única (λ, μ, α) para o sistema que iguala cada uma de suas coordenadas, nesse caso, a intersecção é o ponto resultante dessa solução. Caso contrário, ou o plano e a retas

não possuem intersecção (o sistema não tem solução), ou a reta pertence ao plano (o sistema tem infinitas soluções).

Por fim, apresentamos uma imagem de uma grade tridimensional semelhante a que é utilizada para o mapeamento de ponto e explicamos que para construir um recurso semelhante precisamos saber construir planos paralelos e perpendiculares.

Primeiramente, questionamos os alunos sobre as possíveis posições relativas entre dois planos. Por meio de experimentações com o GeoGebra mostramos que ou dois planos são paralelos, ou coincidentes, como mostra a Figura 24. Existe ainda o caso em que os planos são transversais, cuja ilustração foi omitida.

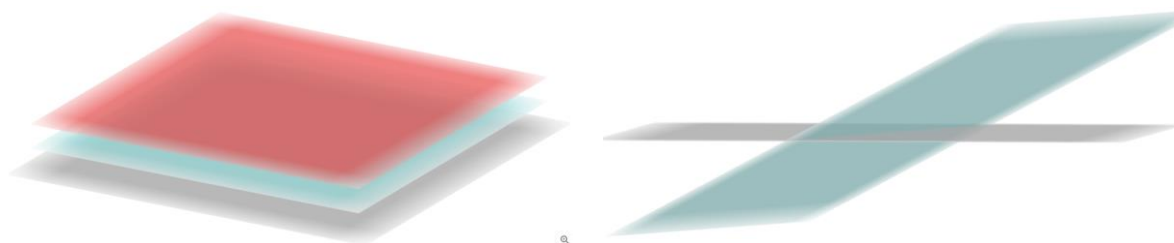


Figura 24 - Planos paralelos e transversais
Fonte: Dos Autores.

Assim questionamos: o que é necessário para que os planos sejam paralelos? Explorando o estudo de vetores diretores dos planos com o uso do GeoGebra, induzimos aos alunos o conceito de que dois planos serão paralelos quando os vetores diretores de um forem paralelos ao outro plano, ou ainda, quando as duas triplas de vetores construídas com os dois vetores diretores de um plano e um do outro forem L.D., e os planos não possuem pontos em comum.

Planos Paralelos: Dados os planos:

$$\pi_1: X + \lambda_1 \vec{v} + \mu_1 \vec{u} \quad \text{e} \quad \pi_2: Y + \lambda_2 \vec{r} + \mu_2 \vec{s}.$$

Temos que π_1 e π_2 são ditos planos paralelos se as triplas $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$ e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{s})$ são ambas L.D. e os planos não possuem nenhum ponto em comum.

Analogamente, questionamos: o que é necessário para que os planos sejam perpendiculares? Explorando o estudo dos vetores diretores dos planos com o GeoGebra, induzimos aos alunos o conceito de que dois planos serão perpendiculares quando o produto vetorial dos vetores diretores de um formarem uma tripla de vetores L.D. com os vetores diretores do outro.

Planos Perpendiculares: Dados os planos:

$$\pi_1: X + \lambda_1 \vec{v} + \mu_1 \vec{u} \quad \text{e} \quad \pi_2: Y + \lambda_2 \vec{r} + \mu_2 \vec{s}.$$

Temos que π_1 e π_2 são ditos planos perpendiculares se a tripla $(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{r}, \vec{s})$ é L.D.

Por fim, utilizamos esses conceitos para construir com os alunos uma grade de planos paralelos e perpendiculares que permite o mapeamento de pontos para construção de um modelo computacional gráfico de um objeto. Essa grade é ilustrada na Figura 25.

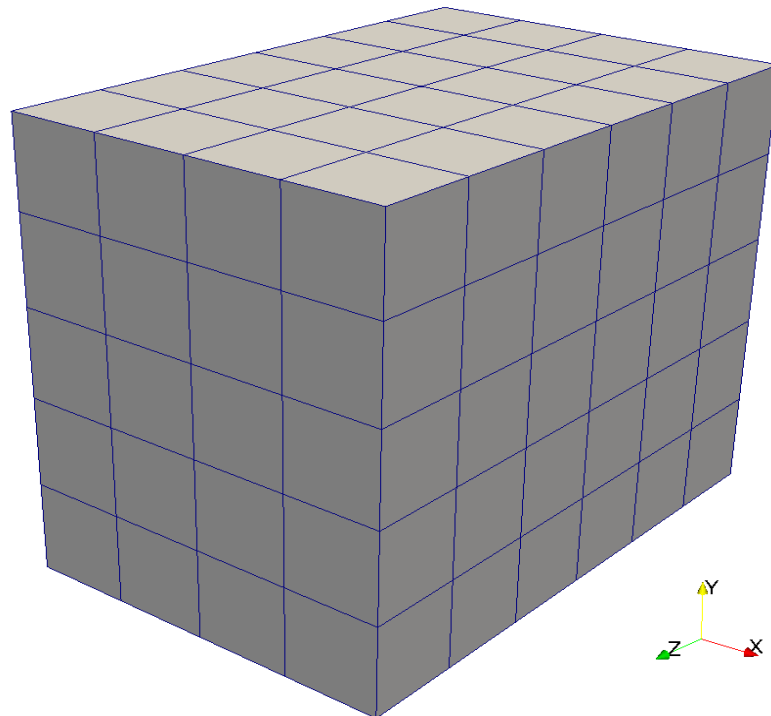


Figura 25 - Grade para Mapeamento de Pontos
Fonte: Dos Autores.

Para exemplificar como o mapeamento de ponto é realizado, apresentamos na Figura 26 uma garrafa com as marcações dos pontos de interesse delimitados e informamos aos alunos que esse é o objeto que vamos modelar na aula seguinte utilizando os conhecimentos construídos.



Figura 26 - Garrafa com marcações dos pontos de interesse
Fonte: Dos Autores.

Para concluir a aula, novamente solicitamos que os alunos reproduzam as construções vistas. Também fornecemos outra lista com exercícios (Anexo C) objetivos e dissertativos que devem ser realizados pelos mesmos procedimentos das anteriores, no entanto, essa é mais curta, visto que desejamos fornecer tempo para que os alunos construam seus modelos da garrafa.

5.2.4 Aula 4: Modelo Computacional Gráfico de um sólido de Revolução

Iniciamos a aula comunicando que vamos desenvolver aplicações, com os conceitos trabalhados em aula, no campo da geometria computacional, ou seja,

estamos interessados em construir os modelos computacionais gráficos de objetos físicos discutidos ao longo dos momentos de motivação das últimas aulas. Sendo assim, não abordamos conceituações ou definições da Geometria Analítica, mas buscamos compreender como os conteúdos vistos são utilizados na prática.

Primeiramente, guiamos os alunos no processo de construção da grade tridimensional de planos paralelos e perpendiculares utilizados para o mapeamento de pontos de interesse. Para construir o primeiro plano π_0 precisamos de um ponto O e de um par $(\vec{u}, \vec{v})$ de vetores L.I. Utilizando o ponto O e o vetor resultante do cálculo do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ construímos uma reta r que é perpendicular ao plano π_0 . Utilizando os pontos situados ao longo da reta r e o par $(\vec{u}, \vec{v})$ de vetores L.I. conseguimos construir diversos planos paralelos.

Na prática, utilizando o GeoGebra, uma forma conveniente de realizar esse procedimento é tomar a origem como sendo o ponto O e o par de vetores L. I. $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$. Nesse caso, a reta r terá vetor diretor $(0,0,1)$ e será representada pelo eixo z do sistema de coordenadas cartesianas. Tomando os pontos da forma $(0,0,n)$, com $n \in \mathbb{N}$, podemos construir os planos paralelos utilizando os vetores da forma $(1,0,n)$ e $(0,1,n)$. Vejamos na Figura 27:

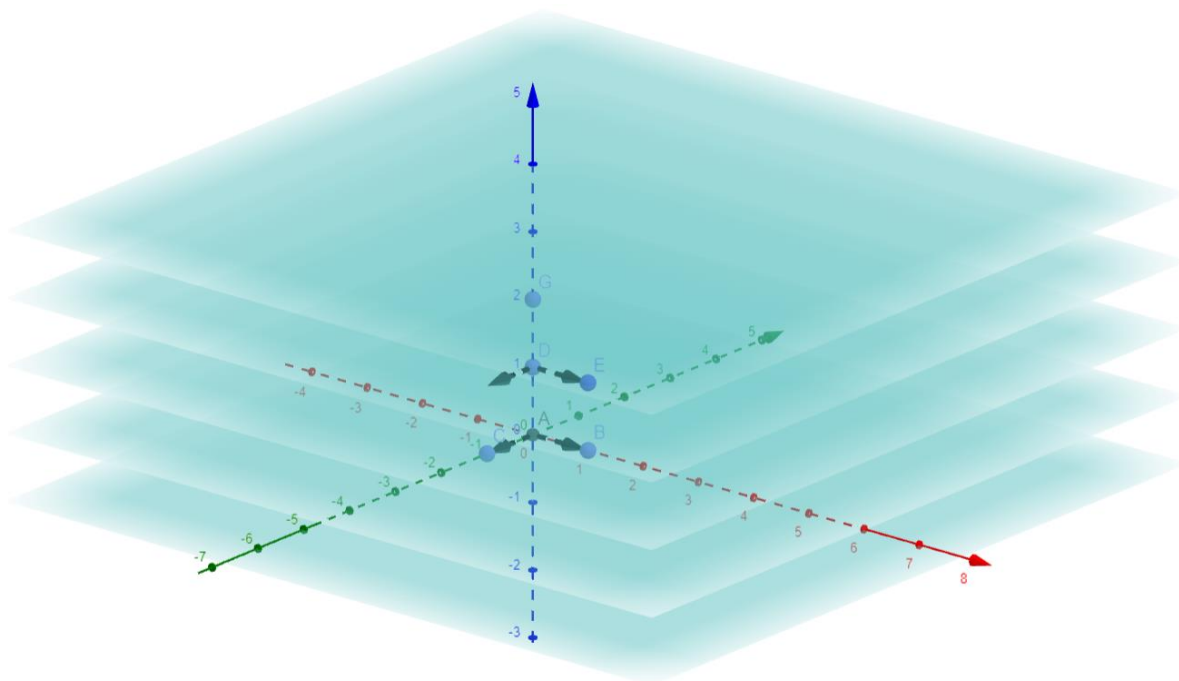


Figura 27 - Planos paralelos traçados com o uso do GeoGebra
Fonte: Dos Autores.

Para construir os demais planos perpendiculares aos primeiros procedemos de forma semelhante, apenas utilizando os vetores resultantes do primeiro produto vetorial como vetores diretores desses planos e calculando produtos vetoriais a partir disso. Não entramos em detalhes sobre esse procedimento, pois sua formalização exige notações nas quais não estamos interessados, em vez disso, focamos no desenvolvimento da prática com o uso do GeoGebra.

Utilizando a origem no ponto O e os vetores $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ como vetores diretores, temos um plano perpendicular a todos os anteriores construídos. Além disso, utilizando pontos da forma $(0,n,0)$, com $n \in \mathbb{N}$, construímos planos paralelos a ele com vetores da forma $(1,n,0)$ e $(0,n,1)$, como na Figura 28.

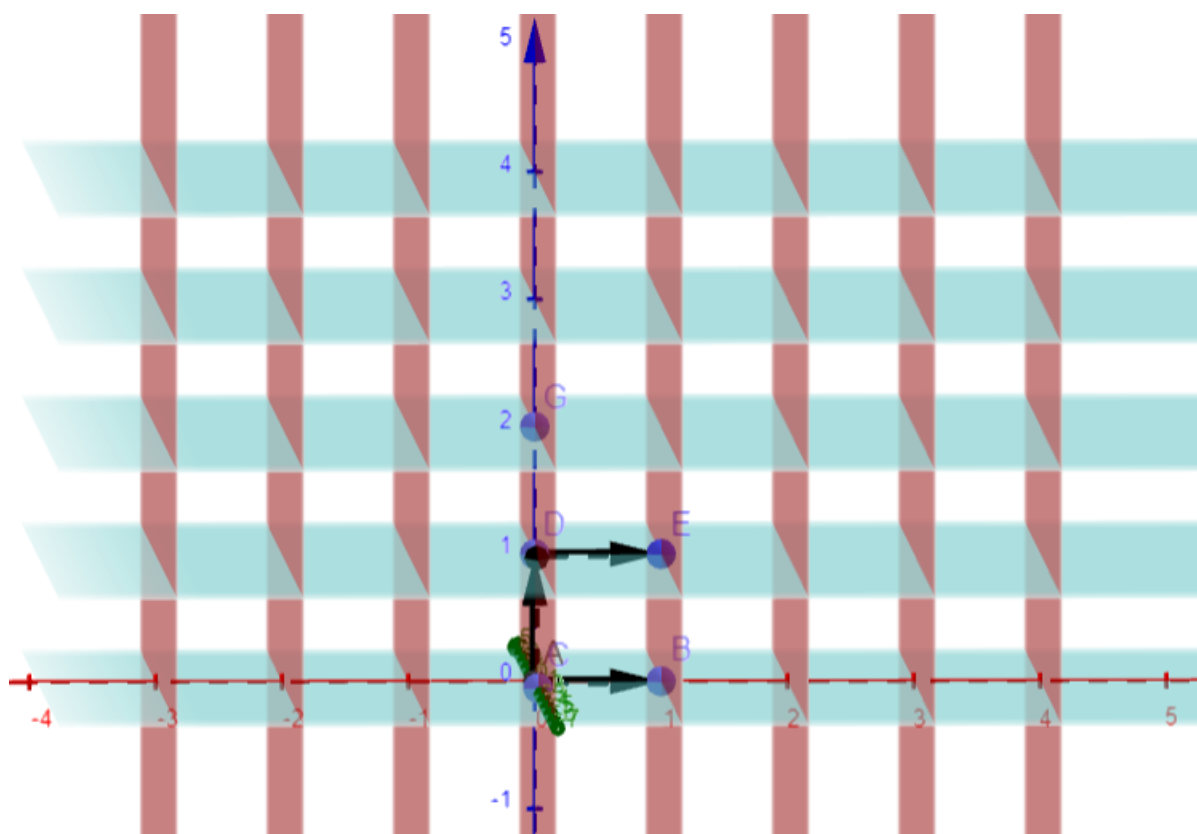


Figura 28 - Planos perpendiculares com o uso do GeoGebra
Fonte: Dos Autores.

O restante dos planos perpendiculares que compõem a grade tridimensional pode ser construído por um processo análogo. Vejamos o resultado final apresentado na Figura 29:

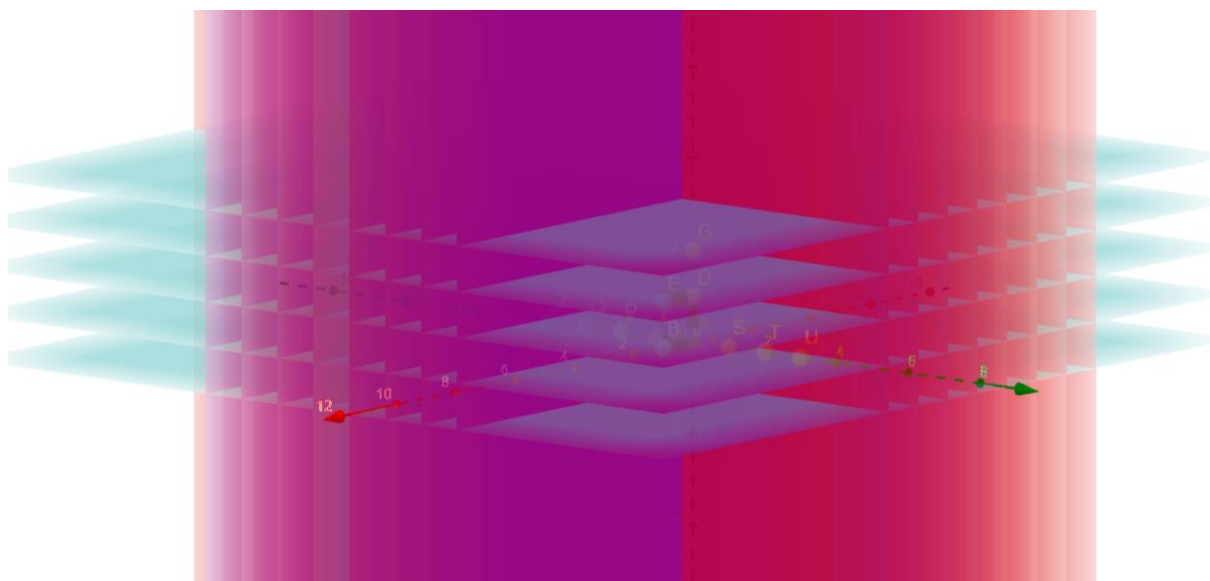


Figura 29 - Grade de planos tridimensional no GeoGebra
Fonte: Dos Autores.

Observamos que a poluição visual da grande quantidade de planos pode dificultar o mapeamento de pontos por meio do GeoGebra, sendo assim, é recomendável utilizar o sistema de coordenadas cartesianas e construir as equações dos planos que forem necessários, por apresentarem pontos de interesse.

Outro método possível para construção de um modelo computacional gráfico estabelece uma grade diretamente sobre o objeto que se deseja modelar. Isso pode ser feito por meio de marcações realizadas diretamente sobre a superfície do sólido, como mostrado com os modelos da cabeça de um manequim nas Figuras 5 e 6. Utilizamos esse procedimento para realizar a modelagem da garrafa ilustrada na Figura 30.

Dessa forma, utilizando uma régua, ou outro instrumento de medição, é possível estabelecer as coordenadas dos pontos do objeto que devem ser marcados no GeoGebra para construir um modelo computacional gráfico.

Em particular, escolhemos a garrafa por se tratar de um sólido de revolução, sendo assim, a determinação de suas coordenadas pode ser simplificada devido a sua simetria radial, ou seja, identificamos a posição dos pontos de interesse para modelagem em seu contorno e obtemos os demais pontos da construção por meio da rotação dessas coordenadas.

Utilizamos a técnica de definição da grade para marcação dos pontos diretamente sobre o objeto modelado, e fotografamos o mesmo. Essa imagem foi importada para o GeoGebra, fazendo com que os pontos de interesse sejam associados com coordenadas do espaço, como ilustrado na Figura 30.

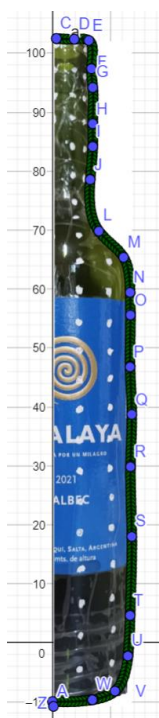


Figura 30 - Mapeamento do contorno da garrafa
Fonte: Dos Autores.

Por fim, utilizando as informações dos pontos demarcados, rotacionamos o contorno da garrafa de forma que são estabelecidas as coordenadas de todos os outros pontos de interesse para construção do modelo computacional. O resultado final desse procedimento é esboçado na Figura 31.

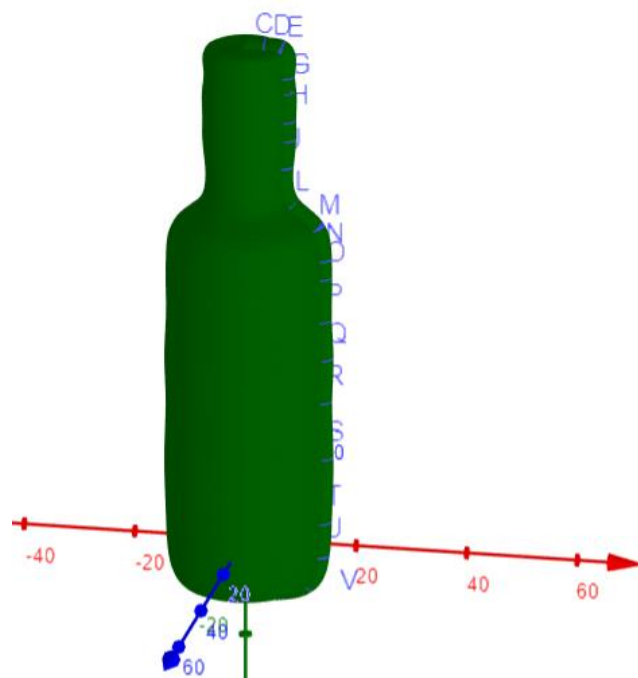


Figura 31 - Modelo computacional gráfico da garrafa
Fonte: Dos Autores.

Para concluir, solicitamos que os alunos construam seus próprios modelos seguindo as orientações fornecidas, bem como enviem seus resultados obtidos para o professor. As construções realizadas foram utilizadas como instrumentos de avaliação e constituem parte dos dados analisados nesta investigação.

No capítulo seguinte, apresentamos os resultados obtidos com a aplicação da atividade descrita.

6. ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Nesta seção apresentamos o levantamento dos dados e resultados coletados por meio das listas de exercícios e das construções geométricas entregues pelos discentes durante a aplicação das aulas que constituem a sequência didática elaborada nesta pesquisa. Além disso, para encerrar nossa investigação, estruturamos a análise das informações obtidas com base no estudo da fundamentação teórica construída e discutimos as possíveis conclusões.

O conjunto de dados coletados é composto por construções elaboradas com o GeoGebra, experiências de sala de aula e resoluções de listas de exercícios realizadas pelos 14 discentes matriculados na disciplina Geometria Analítica do curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, situado no Rio Grande do Sul, ao longo das quatro aulas propostas na sequência didática.

Dividimos o processo de análise com base na natureza quantitativa ou qualitativa dos dados, sem desconsiderar os impactos que as informações advindas de um conjunto podem ter no entendimento do outro.

Utilizamos ferramentas da estatística descritiva, fundamentadas no trabalho de Morettin e Bussab (2017) e nos pressupostos teóricos apresentados na seção 4.3, para fazer a análise quantitativa dos dados referentes às questões objetivas das listas de exercícios. Investigamos tópicos como a média de questões acertadas, a variância e o desvio padrão desse número médio de acertos. Também estudamos quantos acertos ocorreram em cada questão, identificando a mais e menos acertada, e procurando justificar esses resultados com base nas observações realizadas no decorrer das aulas.

Utilizamos os pressupostos teóricos apresentados na seção 4.4 para fundamentar o estudo qualitativo dos dados referentes às questões dissertativas das listas de exercícios. Para isso, dividimos as informações em unidades de análise que abordam tópicos específicos sobre o tratamento das dificuldades de compreensão dos conteúdos de Geometria Analítica, bem como outros fenômenos observados que despertaram nosso interesse.

O restante da seção está organizado como segue. No primeiro momento apresentamos a análise quantitativa por meio de dados estatísticos que contribuem para o entendimento do problema de pesquisa. Em seguida, abordamos o estudo qualitativo organizado em unidades de análise contextualizadas com os devidos referenciais teóricos. Por fim, apresentamos algumas conclusões e possíveis trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos para dar continuidade a esta investigação.

6.1 Análise Quantitativa

Apresentamos o estudo quantitativo dos dados organizado em tabelas e gráficos estruturados com base nos princípios da estatística descritiva de Morettin e Bussab (2017), visando garantir que, mesmo o leitor que possui pouco conhecimento estatístico, entenda de modo satisfatório as informações levantadas.

A primeira lista de exercícios conta com quatro problemas objetivos, a segunda e a terceira contêm três questões cada, totalizando dez exercícios objetivos realizados por cada aluno. Na Tabela 8 apresentamos o número de acertos de cada aluno, em que os mesmos são enumerados para fins de identificação.

Tabela 8 - Número de acertos de cada aluno.

Aluno	1	2	3	4	5	6	7
Nota	4	5	5	6	6	6	6
Aluno	8	9	10	11	12	13	14
Nota	7	7	7	8	8	8	9

Fonte: Dos autores.

Observamos que 4 é o menor número de acertos, obtido por um único aluno, enquanto que 9 foi o maior número de acertos, também obtido por um único aluno. Além disso, dois alunos tiveram 5 acertos, quatro alunos tiveram 6 acertos, três alunos tiveram 7 acertos e três alunos tiveram 8 acertos.

Na Figura 32 mostramos uma representação gráfica da distribuição dos dados da Tabela 8.

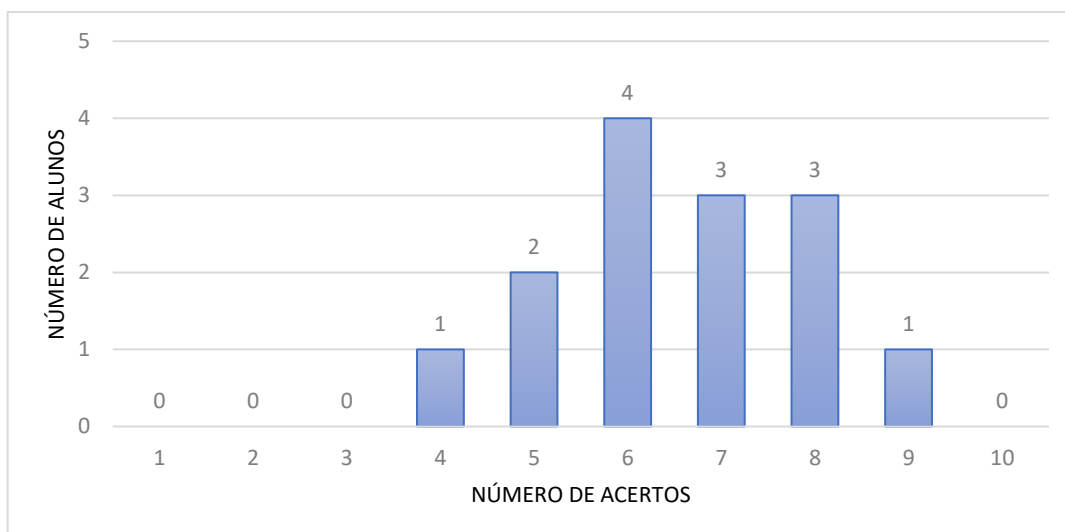


Figura 32 - Distribuição do número de acertos dos alunos.
Fonte: Dos Autores.

O gráfico da Figura 32 representa a distribuição do número de acertos obtido pelos alunos, podemos observar que o conjunto dos dados está levemente concentrado na direita, sendo essa a região que indica um maior número de acertos. Sendo assim, supomos que a maior parte dos discentes teve um bom desempenho. Tal conclusão também é fundamentada pela próxima análise estatística.

Utilizando as informações sobre o número de acertos de cada aluno construímos uma análise estatística descritiva desses dados, na Tabela 9, visando identificar os resultados das medidas de centralidade e dispersão obtidos com a aplicação da sequência didática.

Tabela 9 - Análise estatística descritiva do número de acertos.

Média	6.57	Desvio Médio	1.14
Mediana	6.5	Variância	1.93
Moda	6	Desvio Padrão	1.39

Fonte: Dos autores.

Observamos que a média de acertos da turma foi de 6.57, a mediana foi de 6.5 e a moda foi de 6. Uma vez que os valores da mediana e da moda são inferiores ao valor da média, concluímos que pelo menos metade dos discentes teve uma nota maior que a média.

Os dados apresentados contribuem para demonstrar que a sequência didática produziu resultados razoáveis quanto à resolução dos exercícios objetivos,

mostrando que pelo menos metade dos alunos superou a média da turma, no entanto, ainda é preocupante considerar que a outra metade não obteve o mesmo desempenho, sendo que a maior parte obteve 6 acertos (moda), e os demais estiveram abaixo desse valor.

Também observamos que o desvio médio do número de acertos é de 1.14, o desvio padrão associado é de 1.39 e a variância é de 1.93. Como tanto o desvio médio quanto o desvio padrão são próximos de 1, e menores do que 1.5, concluímos que a maior parte dos discentes tem número de acertos variando próximo da média. De fato, 9 estudantes acertaram entre 5 e 7 questões, enquanto que apenas 5 ficaram fora desse intervalo.

Os valores de dispersão apresentados mostram que, apesar de pelo menos metade dos estudantes ter tido um resultado inferior ao da média de acertos, a maioria ainda esteve a menos de dois pontos de diferença desse valor. De fato, dos 7 alunos que possuem número de acertos inferior à média, temos que 6 possuem entre 5 e 6 acertos.

Assim concluímos que os discentes tiveram um aproveitamento razoável na resolução das questões objetivas da sequência didática, visto que um único aluno teve um desempenho inferior ao da média de acertos e fora do desvio padrão da turma. Buscando compreender melhor essa estatística, observamos que esse discente não participou de umas das aulas e, portanto, não realizou a entrega de umas das listas de exercícios, sendo essa uma possível causa para esse resultado, visto que dessa forma são computados pelo menos 3 erros entre os 10 possíveis.

Na Tabela 10 apresentamos as informações coletadas sobre quantos alunos acertaram cada questão. Utilizando esse conjunto de dados buscamos identificar quais tópicos foram mais problemáticos para serem ensinados e aprendidos por meio do conteúdo discutido no respectivo exercício.

Tabela 10 - Quantidade de alunos que acertou cada questão.

Lista de Exercícios 1							
L1-1	5	L1-2	12	L1-3	13	L1-4	13
Lista de Exercícios 2							
L2-1	12	L2-2	11	L2-3	3		
Lista de Exercícios 3							
L3-1	6	L3-2	7	L3-3	10		

Fonte: Dos autores.

Nomeamos por L1-1 a primeira questão objetiva da lista de exercícios 1, por L1-2 a segunda questão, e assim sucessivamente. O mesmo padrão é utilizado para nomear os demais exercícios de cada lista.

Utilizando a Tabela 10 identificamos quais conteúdos abordados pelas questões são difíceis de serem abstraídos pelos discentes. Como consequência, podemos definir quais práticas de aula precisam ser modificadas para promover o entendimento da matéria e contribuir com a melhoria do desempenho discente.

Na Figura 33 apresentamos um gráfico de barras que representa quantos alunos acertaram e erraram cada questão. A referida figura é construída com base nos dados da Tabela 10. Nessa tabela enumeramos apenas a quantidade de alunos que acertaram cada questão, tais números não identificam os discentes.

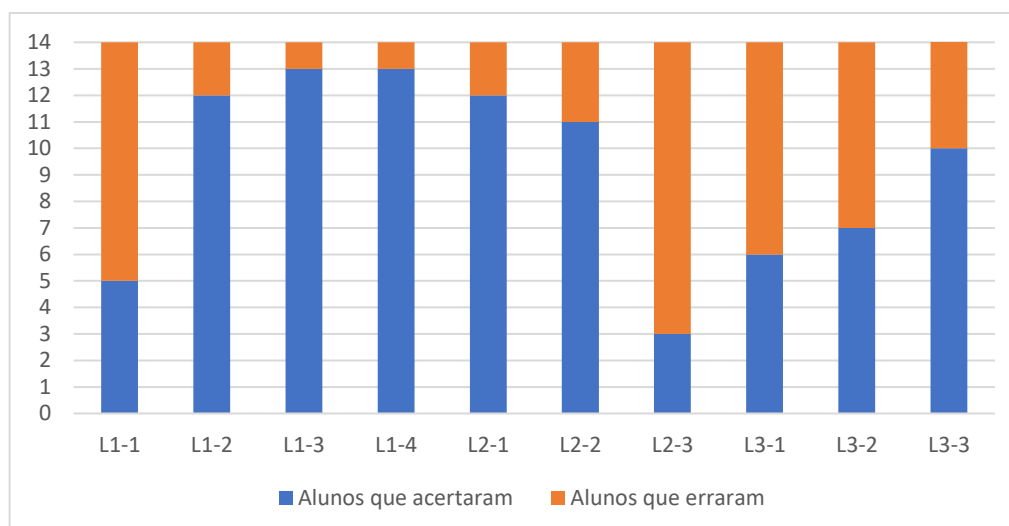


Figura 33 - Distribuição do número de acertos dos alunos.

Fonte: Dos autores.

Observamos que a maior parte das questões apresenta a barra azul mais alta do que a laranja. De fato, nos exercícios L1-2, L1-3, L1-4, L2-1, L2-2 e L3-3 houveram mais acertos do que erros, o contrário ocorre nos exercícios L1-1, L2-3 e L3-1. O exercício L3-2 apresenta o mesmo número de acertos e erros. Assim concluímos que os alunos acertaram mais do que erraram as questões, demonstrando um desempenho razoável no entendimento dos conteúdos.

Utilizando as informações sobre o número de acertos de cada questão construímos uma análise estatística descritiva desses dados, por meio da Tabela 11, visando identificar suas medidas de centralidade e dispersão.

Tabela 11 - Análise estatística descritiva do número de acertos de cada questão.

Média	9.2	Desvio Médio	3.16
Mediana	10.5	Variância	13.28
Moda	12 e 13	Desvio Padrão	3.64

Fonte: Dos autores.

Observamos que a média de alunos que acertou cada questão foi de 9.2, a mediana foi de 10.5, e o conjunto de dados é bimodal, com modas 12 e 13. Uma vez que os valores da mediana e da moda são superiores ao valor da média, concluímos que as questões menos acertadas apresentam quantidades substancialmente menores do que a média, resultando na diminuição da média.

Os dados apresentados contribuem para demonstrar que a sequência didática produziu resultados razoáveis quanto à compreensão da maior parte dos conteúdos trabalhados, mostrando que 6 questões foram acertadas por mais alunos que a média, são elas L1-2, L1-3, L1-4, L2-1, L2-2 e L3-3. No entanto, ainda é preocupante considerar que 4 questões (L1-1, L2-3, L3-1 e L3-2) foram acertadas por metade ou menos dos discentes, demonstrando um desempenho insuficiente no esclarecimento desses tópicos.

O desvio médio do número de pessoas que acertou cada questão é de 3.16, o desvio padrão associado é de 3.64. Como tanto o desvio médio quanto o desvio padrão são próximos de 3, e menores do que 4, concluímos que a maior parte das questões tem número de acertos variando no intervalo entre 6 e 12 (considerando um intervalo centrado na média e de raio próximo ao desvio padrão e ao desvio médio).

De fato, 6 questões possuem número de acertos dentro do referido intervalo, enquanto que apenas 4 estão fora. Destas, temos que duas foram acertadas por mais de 12 alunos, enquanto que as outras duas foram acertadas por menos de 6 discentes.

Os valores de dispersão apresentados mostram que a maior parte das questões foram acertadas por mais da metade dos estudantes. De fato, apenas 3 exercícios foram errados por mais da metade dos estudantes, são eles L1-1, L2-3 e L3-1. Consequentemente, esses problemas serão devidamente analisados para identificar suas dificuldades.

Buscando compreender possíveis dificuldades de aprendizado dos discentes e fragilidades nas práticas de aula da sequência didática, vamos explorar os resultados apresentados pelos alunos, e suas respectivas resoluções, para as questões com número de acertos substancialmente baixo. Portanto, desenvolvemos a análise quantitativa dos exercícios L1-1, L2-3 e L3-1 visto que foram acertados por menos da metade dos estudantes.

Primeiramente, apresentamos o enunciado das questões analisadas.

L1-1) Utilize o GeoGebra para identificar quais as triplas de vetores abaixo são L.D.

- a) $(-6, 3, 8), (4, 5, -9), (-10, 19, -12)$ b) $(5, 2, -7), (11, 2, -8), (4, 4, 4)$
 c) $(-1, -2, 5), (3, 2, -2), (7, 0, 9)$ d) $(2, -4, 5), (4, 8, -2), (10, 12, 1)$

L2-3) Suponha que estamos utilizando os planos abaixo, dados por suas equações vetoriais, para construir uma grade que será utilizada no mapeamento de pontos.

$$\begin{aligned} \pi_1: (0, 0, 7) + \lambda_1(1, 0, 0) + \mu_1(0, 1, 0) & \quad \pi_2: (0, 4, 0) + \lambda_2(1, 0, 0) + \mu_2(0, 0, 1) \\ \pi_3: (5, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 0) + \mu_3(0, 0, 1) \end{aligned}$$

Considere que temos interesse em mapear os pontos $A = (4, 4, 7)$, $B = (5, 2, 3)$ e $C = (2, 5, 3)$.

Assinale a alternativa correta.

- a) $B \in \pi_2 \cap \pi_3$ b) $A \in \pi_1 \cap \pi_2$ c) $C \in \pi_1 \cap \pi_3$ d) $A \in \pi_1 \cap \pi_3$

L3-1) Identifique o ponto de intersecção entre as retas $r: (3, 0, -1) + \lambda(1, 1, 1)$ e $s: (1, 2, 1) + \mu(2, -2, -2)$.

- a) $(2, 1, 1)$ b) $(3, 0, -1)$ c) $(-3, 1, 1)$ d) $(1, 0, 3)$

Na Tabela 12 apresentamos quantas vezes cada alternativa foi indicada como resposta pelos discentes. Dessa forma, buscamos compreender quais foram os erros de entendimento que, possivelmente, ocasionaram no erro do procedimento de resolução do exercício.

Tabela 12 - Alternativas indicadas em cada questão

Exercício L1-1							
A	1	B	6	C	2	D	5
Exercício L2-3							
A	4	B	3	C	5	D	2
Exercício L3-1							
A	3	B	6	C	3	D	2

Fonte: Dos autores.

Destacamos a alternativa correta de cada questão analisada com a cor vermelha, as demais opções estão erradas. Quando um aluno não entrega uma lista de exercícios contabilizamos suas respostas como sendo a primeira alternativa errada da questão, fazemos isso para ajustar os dados utilizados no estudo e, consequentemente, trabalharmos sempre com o mesmo tamanho de amostra.

Na Figura 34 apresentamos gráficos de setores que ilustram as alternativas indicadas pelos alunos na resolução dos exercícios. Construímos essa ferramenta para verificar a distribuição dos resultados.

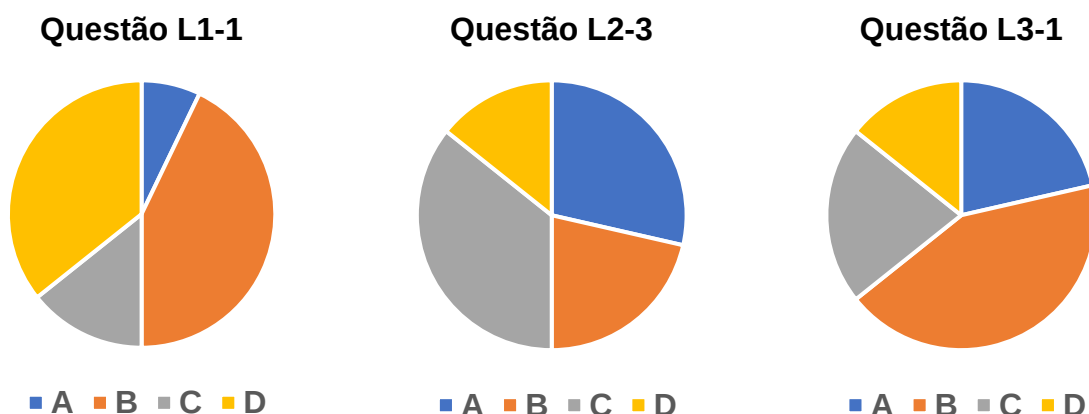


Figura 34 - Alternativas indicadas em cada questão analisada.
Fonte: Dos autores.

O gráfico da questão L1-1 mostra que a distribuição das respostas indicadas pelos discentes está dividida entre duas alternativas, são elas B e D. A questão aborda um tópico introdutório de Geometria Analítica que, originalmente, acreditamos que não seria problemático, visto que o mesmo devia ser estudado na primeira parte da disciplina. A solução da questão exige que o estudante ou resolva um sistema, ou construa uma combinação linear, para determinar quando uma tripla de vetores forma um conjunto L.D.

Analizando as respostas apresentadas pelos alunos observamos que a maioria abordou o problema por meio da resolução do sistema associado, no entanto, apresentaram dificuldade na estruturação das equações que compõem o mesmo, bem como nos procedimentos algébricos envolvidos nos cálculos necessários para determinar a solução.

Assim, concluímos que devemos tratar com maior atenção a revisão dos procedimentos algébricos e matemáticos básicos utilizados na montagem e resolução de sistemas de equações. Por fim, acreditamos que a similaridade entre os cálculos que forneciam as respostas B e D pode ser o que ocasionou a divisão das respostas entre essas duas alternativas.

O gráfico da questão L2-3 mostra que apenas 3 alunos escolheram a resposta correta, enquanto que a maior parte dos estudantes marcou a opção A ou C, sendo assim, buscamos compreender os problemas na resolução do exercício.

A questão trata da relação de pertinência entre um ponto e um plano, bem como a intersecção entre dois planos. A solução exige que o aluno interprete geometricamente as equações dos planos, entenda que a intersecção de ambos será uma reta e, então, verifique se os pontos satisfazem as condições necessárias para pertencerem a essa reta. Dessa forma, temos que a resolução envolve procedimentos teóricos e técnicos e, portanto, as etapas de seu desenvolvimento precisam ser avaliadas.

Observamos que a principal dificuldade discente foi em identificar a estrutura das coordenadas dos planos por meio de suas equações e as condições que o ponto precisava satisfazer para pertencer a intersecção dos planos. Assim, acreditamos que os alunos não compreenderam como utilizar as informações do enunciado do exercício, nem conseguiram identificar os procedimentos necessários

para a resolução. Dessa forma, não foi possível relacionar as coordenadas do ponto com as equações dos planos.

O gráfico que representa a distribuição das alternativas escolhidas na questão L3-1 mostra que a maior parte dos alunos (6) marcou a resposta correta, enquanto que o restante das alternativas dividiu as opiniões dos demais estudantes, sem nenhuma concentração em um item específico.

A questão discute a relação de intersecção entre duas retas por meio do estudo de suas equações. O processo para resolução envolve a construção de um sistema de equações lineares para que o aluno determine valores de λ e μ que determinam o ponto de intersecção.

As principais dificuldades desse exercício são semelhantes as que foram observadas no exercício L1-1. Os alunos demonstraram problemas para compreender como estruturar o sistema de equações necessário para obtenção da solução. Além disso, foram constatados erros nos procedimentos algébricos necessários para determinar a solução do sistema.

O estudo quantitativo dos dados levantados com os exercícios objetivos oportunizou o entendimento de aspectos relevantes sobre a efetividade da sequência didática proposta, bem como das dificuldades de aprendizados vivenciadas pelos discentes participantes.

6.2 Análise Qualitativa

Desenvolvemos a etapa de estudo qualitativo contextualizando os dados levantados com as respostas das questões dissertativas, e construções realizadas no GeoGebra, solicitadas nas listas de exercícios com referenciais teóricos que contribuem para o entendimento dos fenômenos observados sobre as problemáticas de ensino e aprendizagem do conteúdo.

Para organizar a apresentação do estudo dividimos seu conteúdo em unidades de análise que abordam temáticas específicas sobre os problemas mais frequentes encontrados nas resoluções dos exercícios. Dessa forma, apresentamos algumas das resoluções apresentadas, indicamos as dificuldades observadas e investigamos suas possíveis causas para essa problemática.

Ao longo das análises realizadas nesta seção, citamos as respostas dadas pelos discentes. Visando explorar a diversidade dos dados coletados, optamos por fazer uso de uma única contribuição por participante, dessa forma, não tivemos necessidade de identificar os respectivos locutores.

A primeira lista apresenta quatro exercícios dissertativos que abordam questões sobre a construção de conjuntos de vetores L.I., o mapeamento de pontos para construção de modelos computacionais gráficos, a definição de uma reta e as possíveis representações da equação da reta.

A segunda lista também apresenta quatro exercícios dissertativos, no entanto, são discutidas questões sobre a construção de feixes de planos paralelos para montagem da grade tridimensional, o processo de mapeamento de pontos na mesma, elementos necessários para definição de planos e suas diferentes representações por meio de equações.

A terceira lista apresenta três exercícios dissertativos que tratam de questões sobre a resolução de sistemas, por meio de experimentos com o GeoGebra, para determinar a interseção entre duas retas e entre uma reta e um plano, além de explorar os conceitos de paralelismo e perpendicularismo entre planos na construção da grade tridimensional usada para construção de modelos gráficos computacionais.

As listas de exercícios abordam o total de onze problemas dissertativos. Nomeamos por D1-1 a primeira questão dissertativa da lista de exercícios 1, por D1-2 a segunda questão, e assim sucessivamente. Dividimos as unidades de análise por questões que possuem procedimentos de resolução e problemáticas de desenvolvimento semelhantes, dessa forma foi possível identificar quais processos foram feitos incorretamente.

Os tópicos discutidos são o mapeamento de ponto, a definição de retas e planos, o entendimento das diferentes equações da reta e do plano, e a resolução de sistema por meio de experimentos com o GeoGebra.

6.2.1 Mapeamento de Pontos

Os exercícios D1-2 e D2-2 abordam o mapeamento de pontos. A primeira questão solicita que o aluno descreva os procedimentos que ele utilizaria para demarcar ponto de interesse de uma figura plana que se deseja construir um modelo computacional gráfico em uma grade plana formada por retas de paralelas e perpendiculares. O problema seguinte estende essa problematização para objetos tridimensionais que devem ser marcados em uma grade formada por planos paralelos e perpendiculares.

Uma das problemáticas percebidas nas resoluções dos problemas está na dificuldade de associar a grade, plana ou tridimensional, construída e o sistema de coordenadas cartesianas adotado para definir suas equações. Como mostram as seguintes citações:

Para marcar os pontos podemos colocar o objeto em cima da grade e desenhar os pontos do objeto que tocam nas retas, depois ligamos todos os pontos para formar o contorno do objeto. Vamos ter um esboço da forma do objeto, para terminar temos que fazer o contorno (Resposta para questão D1-2).

Para mapear o objeto podemos desenhar o contorno dele com diferentes tamanhos em vários planos. Em cada contorno marcamos os pontos de interesse, e em cada ponto construímos outros planos para construir a grade tridimensional. Juntando todos esses planos e contornos temos um esqueleto do desenho, ligando os pontos e contornos podemos construir o modelo (Resposta para questão D2-2).

Observamos que nenhuma das respostas faz menção ao sistema de coordenadas cartesianas necessário para estabelecer as equações dos pontos, retas e planos que devem ser utilizados na construção. Sendo assim, os alunos demonstram dificuldade para aplicação da notação matemática adequada para discentes que buscam descrever os procedimentos de mapeamento de pontos.

Problemáticas semelhantes podem ser observadas no estudo de Oliveira (2020), em que o autor estuda as dificuldades de representação analítica da circunferência no 3º ano do ensino médio.

... o aluno não escreveu de modo satisfatório a definição da circunferência, não escrevendo a equação reduzida correspondente. Porquanto ele não tenha escrito a definição da circunferência com êxito, ele também não

denominou o ponto fixo do raio. Assim, o aluno nessa atividade não realizou uma conversão, quando se faz a mobilização do registro em linguagem natural para o registro algébrico. No caso em questão, podemos observar que o aluno não consolidou o seu aprendizado sobre a circunferência (OLIVEIRA, 2020, p. 24).

Observamos que no estudo de Oliveira (2020) os estudantes apresentam dificuldade para associar o ponto fixo do centro da circunferência com suas coordenadas cartesianas e, conseqüentemente, não é possível determinar com exatidão a equação da circunferência.

Para entender esse fenômeno, recorremos a Teoria de Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003), que argumenta que o processo de compreensão de tópicos geométricos da matemática ocorre por meio das transformações de representação semióticas de tratamentos e conversões. Duval (2003, p.16), afirma que “os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro”, enquanto que “as conversões são transformações de representação que consistem em mudanças de registro conservando os mesmos objetos denotados”.

Nesse sentido, o entendimento da relação entre a representação visual do objeto e o mapeamento de seus pontos por coordenadas cartesianas exige a coordenação dos referidos registros de representação semiótica, além disso, é necessário que ambos sejam mobilizados simultaneamente para que seja possível estabelecer conexões que permitam a resolução do problema e, conseqüentemente, a aprendizagem do conteúdo.

Do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (DUVAL, 2003, p.22)

O estudo de Duval (2003) argumenta que a compreensão desses conteúdos, de forma que seja possível transitar entre as diferentes representações do objeto modelado, depende da capacidade de alternar entre os diferentes registros de representação semiótica. Ainda, segundo o autor, essa capacidade pode contribuir

com a aprendizagem de diversos tópicos da matemática e, portanto, é benéfico desenvolver práticas de ensino que estimulem essa capacidade.

6.2.2 Definição de Retas e Planos

Os problemas D1-3 e D2-3 questionam o aluno sobre outras possíveis formas de definir retas e planos, utilizando estruturas geométricas distintas daquelas que foram apresentados em aula. O objetivo do exercício é desafiar o estudante a pensar em como tais elementos podem ser relacionados de modo a formular maneiras distintas de compreender a reta e o plano.

Esses exercícios apresentaram respostas corretas distintas. Algumas das resoluções apresentadas utilizavam os recursos do software GeoGebra que permitiam construir retas e planos selecionando diferentes elementos geométricos, dessa forma, os discentes utilizavam a experimentação para verificar possíveis soluções.

O GeoGebra tem uma ferramenta mostrando que com uma reta e um ponto que não está na reta é possível definir uma reta paralela a primeira, é só usar o recurso de reta paralela que consegui construir essa reta. Também usando uma reta e um ponto dá para definir uma reta que é perpendicular à primeira, a ferramenta de construir reta perpendicular pede apenas para selecionar esses dois elementos e então constrói essa reta perpendicular (Resposta para Questão D1-3).

As vantagens de utilizar recursos tecnológicos em sala de aula para o ensino da geometria, e da matemática em geral, já foram suficientemente debatidos ao longo deste trabalho. De acordo com Aguiar (2008, p. 64), “a utilização e a exploração de softwares para o ensino de Matemática pode desafiar o aluno a pensar sobre o que está sendo feito e, ao mesmo tempo, levá-lo a articular os significados e as conjecturas sobre os meios utilizados e os resultados obtidos”. Ainda, segundo a autora:

O uso das novas tecnologias propicia trabalhar em sala de aula com investigação e experimentação na Matemática, considerando que permite ao aprendiz vivenciar experiências, interferir, fomentar e construir o próprio conhecimento. O aluno participa dinamicamente da ação educativa através da interação com os métodos e meios para organizar a própria experiência (AGUIAR, 2008, p. 63).

Outras das soluções apresentadas fizeram uso de conhecimentos prévios dos discentes sobre a Geometria Euclidiana Clássica, pois a mesma é estudada em semestres anteriores. Dessa forma, os alunos realizaram a experimentação no GeoGebra de definições e teoremas já conhecidos e, por meio das observações, elaboraram conclusões para responder ao questionamento do exercício.

Para definir o plano não precisamos exatamente de três pontos não colineares, podemos usar quaisquer outros elementos que estejam no plano e que dê para encontrar três pontos não colineares. Em um plano podemos fazer duas retas paralelas e podemos pegar dois pontos diferentes em uma dessas retas e um ponto na outra, como as retas são diferentes os pontos não são colineares, assim podemos definir o plano (Resposta para Questão D2-3).

Segundo Pivatto (2014), os conhecimentos prévios dos discentes contribuem com a aquisição de novas ideias, durante o processo de aprendizagem, que podem ser empregadas na categorização de novas situações que, posteriormente, servirão como ponto de ancoragem e descoberta para os novos conhecimentos que serão construídos. Assim, acreditamos que os saberes da Geometria Euclidiana serviram de ponto de partida para o desenvolvimento da resolução da questão e das construções feitas com o GeoGebra.

Para Moran (2013), a aprendizagem se torna significativa quando o estudante é motivado por meio daquilo que lhe é familiar, ou seja, de assuntos dos quais ele já possui determinado conhecimento. Assim, o aluno encontra sentido nas atividades propostas e se engaja no processo de resolução, contribuindo para a construção do aprendizado.

De fato, os alunos tiveram pouca dificuldade para apresentar respostas aos problemas D1-3 e D2-3, visto que estavam confortáveis com a temática que já havia sido explorada no estudo da Geometria Euclidiana.

Lopes (1999) coloca que a atual estrutura do ensino de matemática organiza o aprendizado do conteúdo em camadas que, conforme o aluno vai avançando na construção dos saberes, vão sobrepondo conhecimentos anteriores e os desenvolvendo cada vez mais, de maneira a obter uma maior capacidade de compreender conceitos mais complexos.

No experimento, podemos compreender que o entendimento das definições de retas e planos associados a sistemas de coordenadas cartesianas seja uma camada que sobrepõe os conhecimentos desenvolvidos no estudo da Geometria Euclidiana, visto que a mesma é abordada em um semestre anterior.

6.2.3 Entendimento das Diferentes Equações da Reta e do Plano

Os exercícios D1-4 e D2-4 observam que a reta e o plano possuem dois tipos de equações, sendo uma vetorial e outra paramétrica, e questiona os motivos para a existência dessas duas representações, bem como quais as aplicações e situações em que cada uma pode ser empregada.

As questões têm como objetivo fazer com que o aluno problematize o processo de construção das diferentes representações da reta e do plano. Dessa forma, é possível compreender as razões que levam a definições dos distintos tipos de equação, bem como suas aplicações.

As respostas apresentadas demonstram que os discentes tiveram dificuldades para compreender as definições utilizadas em aula para construção das equações vetoriais e paramétricas da reta e do plano. Além disso, existem problemas nas justificativas sobre a razão que motiva o desenvolvimento das duas formas de representação.

A equação vetorial usa só o vetor para ser definida, não precisa mais de dois pontos para definir a reta. Usamos essa equação quando queremos definir a equação de uma reta, mas não conhecemos dois pontos da reta, só um vetor que está na reta. A equação paramétrica depende do parâmetro λ necessário para definir a reta. Essa equação é usada quando temos que resolver um sistema e encontrar esse parâmetro para definir a reta (Resposta para questão D1-4).

Observando a resposta, percebemos que o discente apresenta dificuldade no entendimento da linguagem matemática formal utilizada no enunciado de definições, como as das equações da reta, podendo a mesma estar associada com o desenvolvimento da sequência didática.

A construção do conhecimento matemático exige o domínio das definições e sua utilização. Nesse sentido, é necessário o domínio da linguagem inerente aos conteúdos, uma vez que por ela são transmitidos os conteúdos. Para que ocorra a aprendizagem desse dialeto é essencial o estudo de cada vez mais definições, estruturadas ao longo do processo de ensino e da literatura da disciplina.

As definições possuem um papel relevante para o processo de aprendizagem desenvolvido no contexto da Educação Matemática, uma vez que constituem e elementos fundamentais desse ensino.

Parte da dificuldade na abstração da linguagem matemática decorre da mesma não constituir algo corriqueiro ou habitual, como a língua materna. Segundo Klüsener (1998, p. 182), “a linguagem matemática não se adquire de maneira natural, não é utilizada constantemente e necessita ser apreendida e praticada em diferentes contextos”. Silveira (2006) argumenta que:

A linguagem cria a objetividade, que é constituída por uma rede conceitual e, o sujeito é barrado quando não consegue interagir no discurso das operações e dos atos. A Matemática é um jogo de signos segundo regras, e o uso dos signos dá sentido à proposição. Seguir a regra é um jogo de linguagem determinado, e joga, quem compreende a descrição da regra (SILVEIRA, 2006, p. 50).

Um problema observado nas resoluções dos exercícios, decorrente dessa fragilidade no uso da linguagem matemática, é a confusão entre elementos utilizados na definição e suas aplicações sem problemas.

Quando não temos vetores não dá para escrever a equação vetorial do plano, daí temos que utilizar os parâmetros das retas para escrever a equação paramétrica do plano. A equação paramétrica serve para resolver problemas de intersecção com as retas, usamos os parâmetros para resolver os sistemas e saber em qual ponto esses elementos se cruzam (Resposta para questão D2-4).

Observamos que o discente confunde o uso dos parâmetros de forma generalizada, utilizados na definição da equação paramétrica, com o estabelecimento de um valor específico para o parâmetro, aplicado na resolução de problemas que envolvem relações entre elementos geométricos, como a intersecção entre uma reta e um plano.

Dessa forma, a prática didática necessita de uma maior atenção ao ensino da linguagem matemática que deve ser empregada no estudo da Geometria Analítica, visto que ela possui papel fundamental na compreensão de tópicos específicos e, de forma geral, no dia a dia de sala de aula.

A abordagem da linguagem matemática prática contribui com orientações e regulamentações que podem ser benéficas para todo curso de Licenciatura em Matemática, uma vez que precisamos fazer uso da linguagem verbal e escrita para uma comunicação compreensível e objetiva.

6.2.4 Resolução de Sistema por Meio de Experimentos com o Geogebra

As questões D3-1 e D3-2 questionam se é possível resolver um sistema de equações lineares, por meio de experimentos com o GeoGebra, para determinar se duas retas, ou uma reta e um plano, possuem um ponto de intersecção. Além disso, solicita que os alunos descrevam os procedimentos que devem ser utilizados para proceder com essa verificação.

As respostas demonstram que os alunos apresentam dificuldade para entender como estruturar um sistema de equações lineares por meio do uso das equações paramétricas de retas e planos. Também não compreendem o significado geométricos dos parâmetros utilizados nas equações associadas. Por fim, possuem dificuldade para interpretar geometricamente o resultado obtido com a resolução do sistema.

Usando o GeoGebra podemos desenhar um ponto e um vetor para construir uma reta, usando o mesmo ponto e outro vetor conseguimos desenhar a outra reta, daí temos duas. A intersecção das duas retas é ponto que usamos para desenhar ambas. Agora é só construir a equação das retas utilizando o ponto e o vetor e vamos conseguir achar os parâmetros (Resposta para questão D3-1).

Lamin (2000) estuda o processo de resolução de sistemas lineares com discentes do 1º ano do Ensino Médio. A autora (2000, p. 67) observou que os alunos possuem “dificuldade em entender o enunciado dos problemas, sendo que a maioria

dos alunos conseguiu destacar o objetivo em cada situação”. A mesma ainda tece mais alguns comentários sobre as dificuldades dos estudantes.

Embora tenham entendido o objetivo dos problemas, os alunos tiveram dificuldade em organizar os dados e modelá-los com sistemas lineares. Com isso observou-se que os alunos não são levados a interpretar matematicamente as situações desde as séries iniciais, sendo que no Ensino Médio a abordagem de problemas no contexto das matérias é completamente abandonada (LAMIN, 2000, p. 67).

Com base nos dados observados em nosso problema, observamos que a problemática com a interpretação e estruturação de sistemas lineares pode ser um problema que acompanha o discente desde o Ensino Médio. Portanto, precisamos dar atenção para revisão desse procedimento durante a execução da prática didática, uma vez que esse é um tópico relevante para diversas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática.

Analisando as respostas fornecidas pelos discentes, podemos constatar que também existe dificuldades na interpretação do significado geométrica da resolução do sistema linear.

Posso fazer um plano com o GeoGebra e com as informações do software dá para ver a equação do plano. Escolhendo um ponto no plano e fazendo uma reta que passe por esse ponto temos dois elementos geométricos que possuem intersecção. Os valores dos parâmetros são as coordenadas desse ponto que podemos obter observando o software (Resposta para questão D3-2).

O estudo de Lamin (2000, p. 62) aponta as dificuldades discentes na resolução dos sistemas, argumentando que “com os problemas já modelados em sistemas lineares houve dificuldade em aplicar os métodos estudados mais adequados na sua resolução”.

O trabalho de Jordão e Bianchini (2012) aborda resoluções algébricas e geométricas de sistemas de equações lineares por meio de uma sequência didática, utilizando o software Winplot para representar graficamente as soluções do sistema. As autoras destacam a relevância da utilização do software, e concluem que o software contribui para a visualização e compreensão da resolução de sistemas lineares. No entanto, alguns problemas de interpretação ainda foram identificados.

Verificamos no protocolo que a dupla de alunos realizou o tratamento algébrico, o registro gráfico e a classificação corretamente. Entretanto, pelos

registros de áudio, constatamos que a dupla, apesar de ter classificado corretamente, não entendeu que se tratava de três planos que se interceptam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras (JORDÃO BIANCHINI, 2012, p. 82).

Nossa proposta é semelhante a de Jordão e Bianchini (2012), e obtemos resultados semelhantes, em que o uso do GeoGebra contribui para o entendimento da interpretação geométrica da resolução de sistemas de equações lineares. No entanto, os resultados positivos não alcançaram todos os discentes da disciplina Geometria Analítica.

Sendo assim, devemos trabalhar na melhoria da proposta visando melhores resultados na aprendizagem dos estudantes.

6.3 Conclusões e Trabalhos Futuros

A turma se mostrou motivada com as atividades diferenciadas, saindo da sala de aula tradicional e tendo uma experiência de ensino realizada no laboratório de informática. Isso pode ser visto no número de atividades entregues que, segundo o docente responsável pela disciplina, estava acima da que ocorria comumente.

O professor responsável comentou que um problema recorrente na disciplina era que muitos alunos não realizavam as atividades, mas apenas entregavam cópias dos trabalhos feitos por alguns poucos alunos. Assim, ficamos satisfeitos ao observar que o mesmo não ocorreu com a aplicação de nossa prática didática, e que os discentes fizeram os exercícios em aula com suas próprias contribuições.

Observamos que a oportunidade de estudar com auxílio do computador foi um incentivo para motivar os alunos no desenvolvimento dos conteúdos.

Os alunos foram participativos e curiosos frente ao uso do computador para o desenvolvimento do conteúdo e, principalmente, quanto as potencialidades e variabilidade de recursos disponibilizados pelo GeoGebra. Quase todos os discentes comentaram que já conheciam a ferramenta, mas nunca tiveram oportunidade de aprofundar seus conhecimentos, devido ao pouco uso ao longo das aulas.

A turma se surpreendeu com a possibilidade de aplicar os conhecimentos desenvolvidos na disciplina dentro da geometria computacional, demonstrando interesse para descobrir como isso podia ser feito. Como consequência, foram

participativos em contribuir com os procedimentos e construções realizadas com o GeoGebra na fundamentação dos conteúdos propostos em aula.

A oportunidade de manusear o GeoGebra despertou o interesse em reproduzir as construções apresentadas em aula, no entanto, essa motivação não escondeu dificuldades no entendimento das construções. A maioria conseguiu entregar as atividades, apesar de parte das soluções estarem incorretas.

Houve alguma resistência para execução das atividades por parte de discentes desconfortáveis com o manuseio do computador e do software GeoGebra. Esses estudantes não estavam habituados com o uso de recursos digitais, ficando desmotivados para a realização da proposta por acreditar não ser possível concluir a mesma. Mesmo assim, com ajuda de colegas, todos terminaram os exercícios e construções da sequência didática.

Diagnosticamos algumas atividades e procedimentos da sequência didática que são benéficos para o tratamento de dificuldades de aprendizagem em Geometria Analítica, e quais não são tão efetivos. Dessa forma, pretendemos repensar algumas das atividades que compõem a proposta visando melhorar sua contribuição no entendimento da matéria.

Verificamos que essa experiência impactou a aprendizagem dos alunos devido à contribuição do uso de recursos digitais na atividade, sendo benéfica para a valorização do percurso acadêmico discente e para a constituição de conhecimentos fora do ambiente escolar.

Como trabalho futuro, buscamos aperfeiçoar o desenvolvimento dessa sequência didática por meio dos resultados obtidos com as análises desenvolvidas sobre os procedimentos e as aulas aplicadas. Esse trabalho demanda tempo e a repetição da mesma, dessa forma, constituindo um estudo trabalhoso que possivelmente, seria adequado para uma investigação em nível de doutorado.

7. REFERÊNCIAS

AGUIAR, Eliane Vigneron Barreto. As novas tecnologias e o ensino-aprendizagem. **VÉRTICES**, v. 10, p. 63-71, 2008.

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. **Geometria Analítica Plana: praxeologias matemáticas no ensino médio**. 2007. 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Científicas e Matemáticas) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

ARAÚJO, Péricles César; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Engenharia Didática como uma Estatística Não-Paramétrica. **Caderno de Física da UEFS**, v. 7, p. 133 - 142, 2009.

BALDIN, Yuriko Yamamoto; FURUYA, Yolanda K. Saito. **Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra**. EduFSCar: São Carlos, 2011.

BATTAIOLA, André Luiz; ELIAS, Nassim Chamel; DOMINGUES, Rodrigo de Godoy. Um software para ensino de conceitos de computação gráfica. **Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta e a Distância**, v. 1, 2002.

BELLINI, Luzia Marta. Avaliação do Conceito de Evolução nos Livros Didáticos. **Estudos Em Avaliação Educacional**, v. 17, n. 33, p. 7–28, 2006.

BERMÚDEZ, Ana Carla. Pisa: Brasil fica entre piores, mas à frente da Argentina. **UOL Educação**, 2019. Disponível em: <<https://educacao.uol.com.br/noticias/2019/12/03/pisa-brasil-fica-entre-piores-mas-a-frente-da-argentina-veja-ranking.htm>>. Acesso em: 23 maio 2022.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Características da investigação qualitativa. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais do Ensino Médio: Volume 2 – Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2006. 109p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 01 maio 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília: MEC, 1998. 152p. Disponível em:

<<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 01 maio 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 01 maio 2022.

BURKE, P. **Testemunha ocular: história e imagem**. São Paulo: Edusc, 2004.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial**. Pearson Academic, 2004.

CARVALHO, Suelen; DIAS, Fernando Luis; FERREIRA, Vera Lucia Duarte. Monitoria como Ferramenta do Processo de Ensino: Mapeamento das Dificuldades de Aprendizagem de Geometria Analítica. *In: SALÃO INTERNACIONAL DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO*, 8., 2015, Uruguaiana: UNIPAMPA, 2015.

CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA. **CIEB - Currículo de Referência em Tecnologia e Computação**, 2018. Disponível em: <<https://curriculo.cieb.net.br/>>. Acesso em: 18 maio 2022.

DENZIN, Norman K., LINCOLN, Yvonna S. **Handbook of Qualitative Research**. California: Sage Publication. 1994.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. *In: MACHADO, S. D. A (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, 2003, p 11-33.

FERNANDES, N. L. R. **Professores e computadores: navegar é preciso**. Porto Alegre: Mediação, 2004.

FISCARELLI, Silvio; MARQUES, Fabrício. Quando o computador ajuda a aprender. **Revista Pesquisa FAPESP**, 246 ed., 2016. Disponível em: <<https://revistapesquisa.fapesp.br/quando-o-computador-ajuda-a-aprender/>>. Acesso em: 23 maio 2022.

FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Biblioteca Virtual da FAPESP**, 2013. Objetos de aprendizagem na sala de aula: recursos, metodologias e estratégias para melhoria da qualidade da aprendizagem. Disponível em: <<https://bv.fapesp.br/pt/auxilios/56309/objetos-de-aprendizagem-na-sala-de-aula-recursos-metodologias-e-estrategias-para-melhoria-da-qualida/>>. Acesso em: 23 maio 2022.

GATTI, Bernardete A. Estudos quantitativos em educação. **Educação e Pesquisa**, v. 30, n. 1, p. 11-30, 2004.

GELMAN, Andrew; SHALIZI, Cosma. **La philosophie et l'experience de la statistique bayesienne**. 2010. Paris Diderot Philmath seminar, 2010. Disponível em:

<<http://www.stat.columbia.edu/~gelman/presentations/philosophytalk.pdf>>. Acesso em: 22 maio 2022.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo, SP: Atlas, 2002.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2010.

GOMES, Maria da Conceição Vieira. Álgebra, Geometria e Aritmética de Mãos Dadas no Ensino Fundamental. **Boletim GEPEM**, n. 42, 2003. Disponível em: <<https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/425>>. Acesso em: 29 maio 2022.

GUEDES, Paulo Cezar Camargo. Aplicação do software GeoGebra ao ensino da Geometria Analítica. **Ciência e Natura**, v. 37, n. 3, p. 365-375, 2015.

GUIMARÃES, S. E. R.; BORUCHOVITCH, E. O Estilo Motivacional do Professor e a Motivação Intrínseca dos estudantes: Uma Perspectiva da Teoria da Autodeterminação. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, v.17, n.2, p.143-150, 2004.

GUIMARÃES, Yara Patrícia Barral De Queiroz; OLIVEIRA, Adilson Lopes; SENA, Christiano Otávio de Rezende. Estudo das Posições Relativas entre Retas com o Uso de um Objeto de Aprendizagem: Relato de Experiência. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016. **Anais [...]**. São Paulo: UCS, 2016.

HELLMEISTER, Victor; HELLMEISTER, Carmen Francisca Lourenço Pinto; HELLMEISTER, Luiz Antonio Vasques. Computação gráfica: ferramenta didática de comunicação, design e produção. **Proceedings of World Congress on Communication and Arts: Information Technology in Arts and Information Visualization**, v. 3, p. 356-360, 2010. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/134476>>. Acesso em: 18 maio 2022.

HOHENWARTER, Markus; FUCHS, Karl. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. *In*: Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference. 2004. p. 1-6.

HOHENWARTER, Markus. Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 39, p. 11-18, 2014.

HOLANDA FILHO, Ivan de Oliveira; CRUZ, Marcos Paulo Mesquita. **GeoGebra: soluções na geometria**. Curitiba: Editora Appris, 2019.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa)**, c2022. Apresentação do PISA. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa>>. Acesso em: 23 maio 2022.

JORDÃO, Ana Lucia Infanzozzi; BIANCHINI, Barbara Lutaif. Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 1, n. 1, 2012.

JUNIOR, Arlindo José de Souza; LOPES, Érika Maria Chioca. Um Mapeamento de Pesquisas Brasileiras sobre o Trabalho Educativo com as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação no Processo de Ensinar e Aprender Geometria Analítica. **Revista Eletrônica VIDYA**, v. 37, n. 2, p. 479-497, 2017.

JUNIOR, Enio Marques Muniz; SANTOS, Heinrich da S.; FERREIRA, Magna P. Souza; FREITAS, Ranielle F. Brito; CARVALHO, Tânia M. Machado. O GeoGebra como ferramenta para o estudo das cônicas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2015. **Anais [...]**. SBEM, 2015.

KLÜSENER, R. Ler, escrever e compreender a matemática, ao invés de tropeçar nos símbolos. In: NEVES, I. C. B.; SOUZA, J. V.; SCHÄFFER, N. O.; GUEDES, P. C.; KLÜSENER, R. (Org.). Ler e escrever: Compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: UFRGS, 1998. p. 177-191.

KUHN, T. S. **The Structure of Scientific Revolutions**. University of Chicago Press, Chicago, 1962.

LACERDA, Assiclerio Cavalcante Teotonio. **Aplicações da Geometria Analítica na resolução de problemas**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9466>>. Acesso em: 23 maio 2022.

LAKATOS, I. **The methodology of scientific research programmes**. Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press, 1999.

LAMIN, M. R. N. Resolução de Problemas Modelados com Sistemas de Equações Lineares. 2000. 1 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000. Disponível em: http://www.mtm.ufsc.br/~daniel/7105/Maria_Regina_Nunes_Lamin.PDF. Acesso em: 25 jul. 2022.

LAURINDO, Anderson Pedro; SILVA, Josie Ágatha Parrilha. Introdução à pesquisa: características e diferenças teórico-conceituais entre o estudo qualitativo e quantitativo. **Revista Uniabeu**, v. 10, n. 26, p. 45-55, 2018.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO; Paulo Cezar Pinto. **Coordenadas no Plano**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

LISEIKIN, V. D. **Grid Generation Methods**. New York: Springer, 2017.

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. **Matemática Universitária**, n. 26/27, p. 123-146, 1999.

LYCEUM. **Pisa – Ranking de educação mundial: entenda os dados do Brasil**, 2019. Disponível em: <<https://blog.lyceum.com.br/ranking-de-educacao-mundial-posicao-do-brasil/>>. Acesso em: 23 maio 2022.

MANZINI, Eduardo José. **A entrevista na pesquisa social**. São Paulo: Didática, 1991.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia Científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MONTEIRO, Jair Curcino; CASTILHO, Weimar Silva; SOUZA, Wallysonn Alves. Sequência Didática Como Instrumento de Promoção da Aprendizagem Significativa. **Revista Eletrônica DECT**, Vitória (ES), v. 9, n. 01, p. 292-305, 2019.

MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2013.

MORETTIN, Pedro A.; BUSSAB, Wilton O. **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva Educação, 2017.

MOTA, Janine Freitas; LAUDARES, João Bosco. Desenvolvimento do pensamento geométrico com metodologia para o estudo das superfícies no espaço – plano, cilindros e quádras. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: SBEM. 2010.

MOURA, Daniela Alves da Silveira; SANTOS, Alex da Silva; SILVA, Jhonatan Júnio. Tecnologia a favor da educação matemática: GeoGebra e suas aplicações. **SYNTHESIS| Revistal Digital FAPAM**, v. 7, n. 1, p. 333-346, 2016.

MÜLLER, Thaísa Jacintho; LIEBAN, Diego Eduardo. Construção de utilitários com o software GeoGebra: uma proposta de divulgação da geometria dinâmica entre professores e alunos. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 1, n. 1, p. 37-50, 2012.

MURARI, C. Espelhos, Caleidoscópios, Simetrias, Jogos e Softwares Educacionais no Ensino e Aprendizagem de Geometria. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (org.) Educação Matemática: Pesquisas em Movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 198 – 212.

NOGUEIRA, F. Saeb: diferença entre estados chega a 50 pontos em Matemática. Nova Escola, São Paulo, 30 ago. 2018. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/12501/saeb-diferenca-entre-estados-chega-a-50-pontos-em-matematica>>. Acesso em: 28 set. 2021.

OLIVEIRA, Omar. Dificuldades de Representação Analítica da Circunferência no 3º Ano do Ensino Médio. 2020. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Curso de Matemática Licenciatura, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa,

2020. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/17509/1/OO21052020.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2022.

ORGANIZATION FOR ECONOMIC COOPERATION AND DEVELOPMENT. PISA 2018 Results: Effective Policies, Successful Schools. v. 5. Paris: OECD Publishing, 2020. Disponível em: <https://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2018-results-volume-v_ca768d40-en>. Acesso em : 23 maio 2022.

ORGANIZATION FOR ECONOMIC COOPERATION AND DEVELOPMENT. **OECD Home Page**, 2022. Disponível em: <<https://www.oecd.org/>>. Acesso em: 23 maio 2022.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. Porto Alegre: Artmed, v. 17, 1994.

PEREIRA, Amanda C.; FRANCO, Matheus E. Desenvolvendo o pensamento computacional no ensino fundamental com Arduino e Scratch. *In: ENCONTRO NACIONAL DE COMPUTAÇÃO DOS INSTITUTOS FEDERAIS*, 5., 2018. **Anais [...]** Porto Alegre SBC, p. 1 - 4, 2018. Disponível em: <<https://sol.sbc.org.br/index.php/encompif/article/view/3561>>. Acesso em: 2 jun. 2022.

PIRES, E. C. P. S. O ensino da Geometria Analítica: opiniões de docentes e discentes paraenses. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016. **Anais [...]**. São Paulo: PUC, p. 1-12, 2016. Disponível em: <http://www.sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7268_4136_ID.pdf>. Acesso em: 25 maio 2022.

PIVATTO, W. B. Os conhecimentos prévios dos estudantes como ponto referencial para o planejamento de aulas de Matemática: análise de uma atividade para o estudo de Geometria Esférica. **Revemat**, v. 9, nº 1, p. 43-57, 2014.

POPPER, K. **A Lógica da Pesquisa Científica**. São Paulo: Cultrix, 1993.

POPPER, K. **Conjecturas e Refutações**. Coimbra: Livraria Almedina, 2006.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

ROSA, Chaiane de Medeiros; SANTOS, Fabiano Fortunato Teixeira; MENDES, Heloísio Caetano. Desempenho acadêmico no primeiro ano da graduação: o caso do curso de Estatística da Universidade Federal de Goiás. **Revista de Educação PUC-Campinas**, v. 24, n. 3, p. 411-424, 2019.

SANTOS, I. E. **Manual de métodos e técnicas de pesquisa científica**. Niterói: Impetus. 2005.

SANTOS, Lijecson Souza dos. Contextualização Matemática em Situação de Ensino e Aprendizagem No EJA. *In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO*

SANTOS, Robson Alves; INFORSATO, Edson do Carmo. Aula: o ato pedagógico em si. **Caderno de Formação: formação de professores didática geral**. São Paulo: Cultura Acadêmica, v. 9, p. 80-85, 2011.

INCLUSIVA, 2., 2016. **Anais [...]**. Campina Grande, p. 1-13, 2016. Disponível em: <http://editorarealize.com.br/editora/anais/cintedi/2016/TRABALHO_EV060_MD1_SA18_ID492_23102016194610.pdf>. Acesso em: 25 maio 2022.

SILVEIRA, M. R. A. O conceito em matemática e seus contextos. **Educação Matemática em Revista**, v. 20/21, p. 47-58, 2006.

SOUZA, Marcelo Batista. Ensino de Geometria Analítica auxiliado por software. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016. **Anais [...]**. São Paulo: PUC, 2016. Disponível em: <http://www.sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6354_2623_ID.pdf>. Acesso em: 25 maio 2022.

SOUZA, Marcelo Batista; FONTES, Bárbara Cunha; BORBA, Marcelo de Carvalho. A Coparticipação da Tecnologia Digital na Produção de Conhecimento Matemático. **Sisyphus - Journal of Education**, Lisboa, v. 7, n. 1, p. 62-82, 2019.

SPAGNOLO, F. L'analisi statistica implicativa: uno dei metodi di analisi dei dati nella ricerca in didattica delle matematiche. **Proceedings Troisième Rencontre Internationale ASI (Analyse Statistique Implicative)**, v. 15, p. 25-52. 2005.

TASHAKKORI, Abbas; JOHNSON, R. Burke; TEDDLIE, Charles. **Foundations of mixed methods research: Integrating quantitative and qualitative approaches in the social and behavioral sciences**. California: Sage publications, 2009.

TOTI, Francisco de Assis; MARTINS, Iberê Luís; SILVA, Ariane Diniz. A Integração da Computação Gráfica no Ensino-Aprendizagem do Desenho Técnico. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 44., 2016. **Anais [...]**. Natal: UFRN, 2016. Disponível em: <http://www.fatecsorocaba.edu.br/nucleos/naap/A_Integração_da_Computação_Gráfica_no_Ensino-Aprendizagem_do_Desenho_Técnico-1.pdf>. Acesso em: 25 maio 2022.

TREAGUST, David F.; RENNIE, Léonie J. Implementing Technology in the School Curriculum: A Case Study Involving Six Secondary Schools. **Journal of Technology Education**, v. 5, n. 1, p. 38-53, 1993.

VALENTE, José Armando. A espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. **A tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem**. São Paulo: Casa do Psicólogo, p. 15-37, 2002.

VALENTE, José Armando. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: O papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: ALMEIDA, M. E. B. **Integração das Tecnologias na Educação**. Brasília: SEED, 2005.

VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B.; GERALDINI, A. F. S. Metodologias ativas: das concepções às práticas em distintos níveis de ensino. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 17, n. 52, p. 455-478. 2017.

WAGNER, D. R. Arte, Técnica do Olhar e Educação Matemática: o caso da perspectiva central na pintura clássica. 2012. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2012.

WASELFISZ, Julio Jacobo. O ensino das ciências no Brasil e o PISA. 1. ed. São Paulo: Sangari, 2009.

WINTERLE, Paulo; STEINBRUCH, Alfredo. **Vetores e Geometria Analítica**. 2 ed. São Paulo: Makron Books, 2000.

ANEXOS

Anexo A: Folha de exercícios da aula 1



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA



GEOMETRIA ANALÍTICA – 2022/1
Débora Marília Hauenstein

LISTA DE EXERCÍCIO 1: VETORES E O ESTUDO DA RETA

Questões Discursivas

- 1) Por meio de experimentações realizadas com o GeoGebra verifique qual o maior número de vetores L.I. que podem estar contidos em um mesmo conjunto. Justifique sua resposta descrevendo seus experimentos.
- 2) Descreva como você pensaria em mapear os pontos de interesse de uma figura plana para construir seu modelo computacional gráfico em uma grade de retas no plano. Pense como seriam identificadas as coordenadas de cada ponto.
- 3) Para definir uma reta precisamos de dois pontos distintos, além disso, utilizando esses dois pontos podemos construir um vetor, de modo que outra forma de definir uma reta é utilizando apenas um ponto e um vetor diretor. Utilize o GeoGebra para verificar se existem outros elementos que podem ser usados para definir uma reta.
- 4) Observamos que a reta pode ser representada por duas equações diferentes, a equação vetorial e a equação paramétrica. Discorra sobre quais os motivos para a existência dessas duas representações. Você consegue identificar situações em que o uso de uma representação seja mais vantajoso que o da outras? Quais?

Questões Objetivas

- 1) Utilize o GeoGebra para identificar quais as triplas de vetores abaixo são L.D.
a) $(-6,3,8), (4,5-9), (-10,19,-12)$ b) $(5,2,-7), (11,2,-8), (4,4,4)$
c) $(-1,-2,5), (3,2-2), (7,0,9)$ d) $(2,-4,5), (4,8-2), (10,12,1)$
- 2) Considere os pontos $A = (2,2,3), B = (-2,-2,0), C = (1,1,0), D = (0,0,\frac{3}{2}), E = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}), F = (-1,-1,-1)$. Construa os pontos no GeoGebra e verifique quais 3 pertencem a uma mesma reta.
a) A, B, C b) A, B, D c) C, D, E d) C, D, F
- 3) Considere os pontos $A = (2,5,3)$ e $B = (-1,2,4)$. Identifique a equação vetorial da reta definida por esses pontos.
a) $r: (2,5,3) + \lambda(-3,3,1)$ b) $r: (2,5,3) + \lambda(3,3,1)$
c) $r: (2,5,3) + \lambda(-3,-3,1)$ d) $r: (2,5,3) + \lambda(3,-3,1)$
- 4) Considere a reta dada pela equação $r: (2,7,11) + \lambda(-3,2,-5)$. Identifique o valor de λ que fornece o ponto $(-31,29,-44)$.
a) $\lambda = 7$ b) $\lambda = 9$ c) $\lambda = 11$ d) $\lambda = 13$

Anexo B: Folha de exercícios da aula 2



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA



GEOMETRIA ANALÍTICA – 2022/1
Débora Marília Hauenstein

LISTA DE EXERCÍCIO 2: O ESTUDO DO PLANO

Questões Discursivas

- 1) Descreva como você pensaria em construir feixes de planos paralelos e perpendiculares de forma que fosse possível construir uma grade tridimensional para mapear os pontos de interesse de um objeto.
- 2) Considere que a grade tridimensional já esteja construída. Com base no exercício realizado em aula, descreva como você pensaria em mapear os pontos de interesse de um objeto para construir seu modelo computacional gráfico. Pense como seriam identificadas as coordenadas de cada ponto.
- 3) Para definir um plano precisamos de três pontos não colineares, além disso, utilizando esses pontos podemos construir dois vetores, de modo que podemos definir o plano utilizando um ponto e dois vetores diretores. Utilize o GeoGebra para verificar se existem outros elementos que podem ser usados para definir um plano.
- 4) O plano pode ser representado por duas equações diferentes, a equação vetorial e a equação paramétrica. Discorra sobre quais os motivos para a existência dessas duas representações. Você consegue identificar situações em que o uso de uma representação seja mais vantajoso que o da outras? Quais?

Questões Objetivas

- 1) Considere os pontos $A = (2,2,3)$, $B = (-2,-2,0)$, $C = (1,1,0)$, $D = (0,0,\frac{3}{2})$, $E = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $F = (-1, -1, -1)$. Verifique com quais pontos não é possível definir um plano.
a) A, B, C b) A, B, D c) C, D, E d) C, D, F
- 2) Considere os pontos $A = (2,5,3)$, $B = (-1,2,4)$ e $C = (5,-2,-1)$. Identifique a equação vetorial do plano definida por esses pontos.
a) $\pi: (2,5,3) + \lambda(3,3,-1) + \mu(-3,7,2)$ b) $\pi: (5,-2,-1) + \lambda(-3,7,4) + \mu(-6,4,3)$
c) $\pi: (-1,2,4) + \lambda(3,3,-1) + \mu(6,-4,-5)$ d) $\pi: (2,5,3) + \lambda(-3,-3,-1) + \mu(-3,7,-2)$
- 3) Suponha que estamos utilizando os planos abaixo, dados por suas equações vetoriais, para construir uma grade que será utilizada no mapeamento de pontos.
 $\pi_1: (0,0,7) + \lambda_1(1,0,0) + \mu_1(0,1,0)$ $\pi_2: (0,4,0) + \lambda_2(1,0,0) + \mu_2(0,0,1)$
 $\pi_3: (5,0,0) + \lambda_3(0,1,0) + \mu_3(0,0,1)$
Considere que temos interesse em mapear os pontos $A = (4,4,7)$, $B = (5,2,3)$ e $C = (2,5,3)$. Assinale a alternativa correta.
a) $B \in \pi_2 \cap \pi_3$ b) $A \in \pi_1 \cap \pi_2$ c) $C \in \pi_1 \cap \pi_3$ d) $A \in \pi_1 \cap \pi_2$

Anexo C: Folha de exercícios da aula 3



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA



GEOMETRIA ANALÍTICA – 2022/1
Débora Marília Hauenstein

LISTA DE EXERCÍCIO 3: CONSTRUÇÃO DA GRADE TRIDIMENSIONAL

Questões Discursivas

- 1) Por meio de experimentações realizadas com o GeoGebra, verifique se com o uso do software é possível identificar a solução do sistema (λ, μ) que garante que duas retas possuem um ponto de intersecção. Descreva como você procedeu.
- 2) Considere o problema do exercício 1 para o caso que trata da intersecção entre uma reta e um plano. Note que dessa vez o sistema considerado possui uma solução do tipo (λ, μ, α) .
- 3) Utilizando os conceitos de planos paralelos e perpendiculares vistos na aula de hoje, descreva como construir uma grade tridimensional com os planos paralelos e perpendiculares que possibilite o mapeamento de pontos de interesse em uma modelagem computacional gráfica.

Questões Objetivas

- 1) Identifique o ponto de intersecção entre as retas $r: (3, 0, -1) + \lambda(1, 1, 1)$ e $s: (1, 2, 1) + \mu(2, -2, -2)$.
a) $(2, 1, 1)$ b) $(3, 0, 1)$ c) $(-3, 1, 1)$ d) $(1, 0, 3)$
- 2) Identifique a tripla (λ, μ, α) que garante que a reta $r: (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$ e o plano $\pi: (10, 5, 5) + \mu(1, 0, -1) + \alpha(0, 1, -1)$ possuem um ponto em comum.
a) $(3, 3, 2)$ b) $(-3, 3, -2)$ c) $(3, -3, 2)$ d) $(3, -3, -2)$
- 3) Considere o plano $\pi: (2, 6, 3) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(3, 4, 1)$. Identifique o par de vetores abaixo que podem ser utilizados para definir um segundo plano paralelo ao plano π .
a) $(2, 5, 3), (-3, 3, 1)$ b) $(3, 3, 5), (3, 3, 1)$
c) $(5, 6, 5), (8, 12, 3)$ d) $(7, 7, 10), (3, 9, 10)$

APÊNDICES

Apêndice A: Produto Educacional.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Faculdade de Educação

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Mestrado Profissional



Produto Educacional de Mestrado

ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA AUXILIADO

PELA GEOMETRIA COMPUTACIONAL:

Uma sequência didática desenvolvida com o uso do GeoGebra.

Débora Marília Hauenstein

Pelotas, 2022.

Débora Marília Hauenstein

**ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA AUXILIADO
PELA GEOMETRIA COMPUTACIONAL:**

Uma sequência didática desenvolvida com o uso do GeoGebra.

Produto Educacional de Mestrado apresentado
ao Programa de Pós-graduação em Ensino de
Ciências e Matemática da Faculdade de
Educação da Universidade Federal de Pelotas,
como requisito parcial à obtenção do título de
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: André Luis Andrejew Ferreira

Pelotas, 2022.

DÉBORA MARÍLIA HAUENSTEIN

ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA AUXILIADO

PELA GEOMETRIA COMPUTACIONAL:

Uma sequência didática desenvolvida com o uso do GeoGebra.

Produto Educacional aprovado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa da Mestrado: 23 de agosto de 2022.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Raimundo Carlos Machado Ferreira Filho - PPGECCED/IFSul – CAVG

Prof. Dr. Marcelo Batista de Souza - UFRR

Prof^a. Dr^a. Denise Nascimento Silveira - PPGECCM/UFPeI

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação gráfica de um vetor.	138
Figura 2 - Dependência Linear entre um par de vetores.	139
Figura 3 - Dependência Linear entre uma tripla de vetores.	140
Figura 4 - Vetor, Paralelismo e Norma	140
Figura 5 - Grade de retas para mapeamento de pontos	141
Figura 6 - Retas que passam por um ponto	142
Figura 7 - Reta definida por dois pontos	143
Figura 8 - Vetor diretor da reta definida por dois pontos.	143
Figura 9 - Representação da Equação Vetorial da Reta.	144
Figura 10 - Múltiplos planos passam por dois pontos	147
Figura 11 - Três pontos não colineares definem um plano	147
Figura 12 - Vetores diretores do Plano.....	148
Figura 13 - Representação da Equação Vetorial do Plano.	149
Figura 14 - Mapeamento de pontos no Exercício.....	150
Figura 15 - Intersecção entre retas	152
Figura 16 - Intersecção entre reta e plano	153
Figura 17 - Planos paralelos e transversais	154
Figura 18 - Grade para Mapeamento de Pontos.....	155
Figura 19 - Garrafa com marcações dos pontos de interesse.....	156
Figura 20 - Planos paralelos traçados com o uso do GeoGebra.....	157
Figura 21 - Planos perpendiculares com o uso do GeoGebra.....	158
Figura 22 - Grade de planos tridimensional no GeoGebra.....	159
Figura 23 - Mapeamento do contorno da garrafa	160
Figura 24 - Modelo computacional gráfico da garrafa	161

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Livros que fundamentaram os conteúdos de Geometria Analítica.	136
---	-----

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	135
1.1 O Tratamento das Dificuldades de Aprendizado	135
1.2 Proposta de Sequência Didática	136
1.2.1 Aula 1: Vetores e o Estudo da Reta.....	138
1.2.2 Aula 2: Estudo da Equação do Plano	145
1.2.3 Aula 3: Construção da Grade Tridimensional	151
1.2.4 Aula 4: Modelo Computacional Gráfico de um sólido de Revolução	156
3. BIBLIOGRAFIA	161
ANEXOS	163
Anexo A: Folha de exercícios da aula 1	164
Anexo B: Folha de exercícios da aula 2	165
Anexo C: Folha de exercícios da aula 3.....	166

1. INTRODUÇÃO

Apresentamos uma sequência didática voltada para o tratamento de dificuldades de aprendizagem em tópicos da disciplina Geometria Analítica que explora elementos da geometria computacional gráfica como recurso pedagógico e motivacional com uso do software educacional GeoGebra.

A referida sequência didática está fundamentada em uma pesquisa de revisão bibliográfica que resgata experiências que abordam problemáticas similares com uso desse mesmo recurso pedagógico. A produção dessa prática constitui o produto de ensino deste mestrado profissional.

1.1 O Tratamento das Dificuldades de Aprendizado

As dificuldades de aprendizagem em Geometria Analítica abordadas na sequência didática foram levantadas por uma revisão bibliográfica, são elas:

- Falta de motivação para o estudo da Geometria Analítica;
- Metodologias tradicionais que usam apenas a lousa como recurso visual;
- Ausência de habilidades fundamentais oriundas do ensino básico;
- Problemas com a visualização geométrica de elementos estudados; Problemas com a manipulação algébrica de equações;
- Problemas para estabelecer relações entre representações algébricas e geométricas.

Nesta prática didática damos atenção para cada um dos tópicos listados, visto que podem ser considerados de difícil compreensão. A escolha dos procedimentos está fundamentada nos trabalhos de diversos autores que estudam a temática. Como exemplo, destacamos a obra GeoGebra: soluções na geometria (FILHO; CRUZ, 2019) em que os autores apresentam diversas atividades didáticas realizadas com uso do GeoGebra, visando à superação de adversidades que podem ser apresentadas pelos estudantes.

Também apreciamos o trabalho de Maria da Conceição Vieira Gomes, intitulado *“Álgebra, Geometria e Aritmética de Mãos Dadas no Ensino Fundamental”*

(GOMES, 2003), em que a autora propõe que a alfabetização algébrica e aritmética ocorra de forma integrada com outros campos de conhecimento da matemática, inclusive com a geometria, para garantir que o estudante esteja familiarizado com o tratamento e manipulação de equações específicas de cada área.

1.2 Proposta de Sequência Didática

Apresentamos a sequência didática como uma sucessão de planos de aula pensados para serem realizados ao longo de pelo menos quatro encontros de dois períodos (considerando que cada período tenha em torno de 45 minutos de duração).

Os conteúdos desenvolvidos na proposta, e abordados ao longo das aulas, contemplam tópicos que vão desde os elementos fundamentais para o desenvolvimento da Geometria Analítica, como conceitos de pontos, vetores, retas e planos, até o estudo de suas equações, posições relativas e intersecção, conceitos necessários para a construção de modelos computacionais gráficos de sólidos de revolução que constitui o principal objetivo do conjunto de atividades propostas.

Para fundamentar os conteúdos explorados pela sequência didática, selecionamos referências bibliográficas presentes em ementas curriculares dos principais cursos de Geometria Analítica das instituições de ensino superior nacionais. A Tabela 1 apresenta os livros utilizados.

Tabela 13 - Livros que fundamentaram os conteúdos de Geometria Analítica.

Livros de Geometria Analítica
CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial . Pearson Academic, 2004.
LIMA, Elon Lages; CARVALHO; Paulo Cezar Pinto. Coordenadas no Plano . Rio de Janeiro: SBM, 2002.
WINTERLE, Paulo; STEINBRUCH, Alfredo. Vetores e Geometria Analítica 2 ed. São Paulo: Makron Books, 2000.
BALDIN, Yuriko Yamamoto; FURUYA, Yolanda K. Saito. Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra . EduFSCar: São Carlos, 2011.

Fonte: Dos Autores.

O público alvo para a aplicação da sequência didática é composto por alunos de Ensino Superior que estejam cursando as disciplinas Geometria Analítica ou Cálculo Diferencial e Integral, que exploram elementos do espaço tridimensional nos conceitos trabalhados, como o estudo de funções reais de várias variáveis reais.

A sequência didática é direcionada para a segunda parte de um primeiro curso de Geometria Analítica no Ensino Superior, ou para um curso posterior. Nesse sentido, consideramos como pré-requisitos o conhecimento de ferramentas básicas do tratamento da álgebra de vetores, como o produto interno e o produto vetorial, mesmo assim, revisamos alguns tópicos fundamentais.

Iniciamos sintetizando os tópicos que abordados na sequência didática, visando propiciar um acompanhamento do conteúdo por parte dos alunos, bem como dos leitores.

Aula 1:

- Revisão: Vetores e dependência linear;
- O estudo da equação da reta.

Aula 2:

- Motivação: Aplicações da Equação do plano relacionadas com Geometria Computacional;
- Definição de um Plano;
- Equações do Plano: Vetorial e Paramétrica.

Aula 3:

- Intersecção entre retas e planos;
- Planos paralelos e perpendiculares;
- Construção da Grade Tridimensional;
- Mapeamento de Pontos.

Aula 4:

- Construção de um modelo computacional gráfico de um sólido de Revolução.

1.2.1 Aula 1: Vetores e o Estudo da Reta

Primeiramente, revisamos o conhecimento prévio dos alunos sobre vetores e dependência linear, visto que pretendemos generalizar alguns conceitos desenvolvidos no estudo de vetores para trabalhar com a equação da reta e introduzir o estudo do plano.

Motivamos o estudo falando sobre a aplicação das equações da reta e do plano na construção de grades para o mapeamento de pontos na geometria computacional. Utilizando a motivação, introduzimos conceitos intuitivos associados com a definição de retas e planos no espaço tridimensional. Em seguida, formalizamos esses conceitos por meio das equações que representam uma reta. Por fim, apresentamos exemplos de aplicação do conteúdo desenvolvido.

Iniciamos apresentando a definição de vetor, visto que é o elemento fundamental para todo desenvolvimento da Geometria Analítica. Nosso objetivo nesse primeiro momento foi revisar conteúdos básicos necessário na construção da grade tridimensional, de planos paralelos e perpendiculares, que é utilizada no procedimento de captura de pontos de interesse para a construção do modelo computacional gráfico.

Definição (Vetor): Definimos um vetor por meio de dois pontos, digamos A e B, dessa forma temos que o segmento de reta orientado de A para B é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. Vetores podem ser representados por segmentos de reta orientados, como mostra a Figura 1.

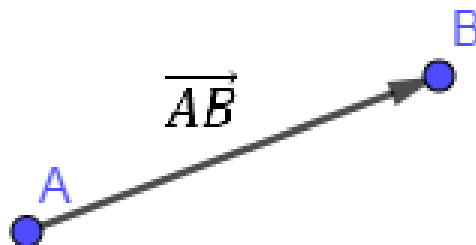


Figura 1 - Representação gráfica de um vetor.
Fonte: Dos Autores.

Como estamos interessados em tratar da construção de retas e planos paralelos para construir uma grade tridimensional, apresentamos o conceito de paralelismo entre vetores e a norma de um vetor.

Vetores Paralelos: Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ não-nulos são paralelos (indica-se $\vec{x} \parallel \vec{y}$) se um representante de $\vec{x}$ é paralelo a um representante de $\vec{y}$.

Norma de um Vetor: Chamamos norma (ou módulo, ou comprimento) de um vetor ao comprimento de qualquer um de seus representantes; indica-se a norma de $\vec{x}$ por $||\vec{x}||$.

Por fim, para desenvolver o estudo sobre as equações que representam retas e planos, apresentamos o conceito de dependência linear entre pares e triplas de vetores, visto que esses tópicos são pré-requisitos para construção de importantes definições.

Dependência Linear: Um par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é **linearmente dependente** se $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são paralelos. Caso contrário, $(\vec{u}, \vec{v})$ é dito **linearmente independente**. A Figura 2 ilustra a definição.

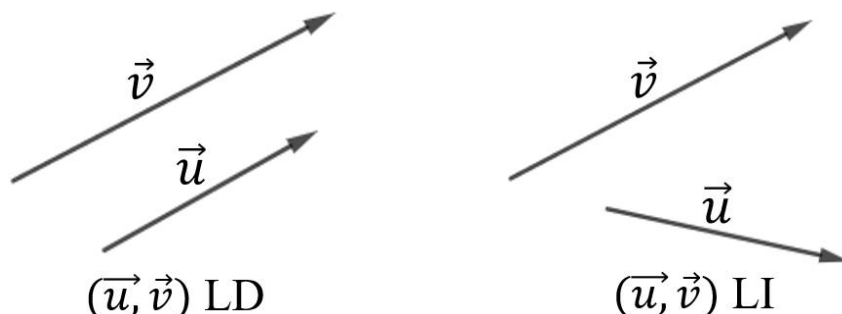


Figura 2 - Dependência Linear entre um par de vetores.
Fonte: CAMARGO, BOULOS, 2004.

Uma tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é **linearmente dependente** se $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano. Caso contrário, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é **linearmente independente**. A Figura 3 ilustra a definição.

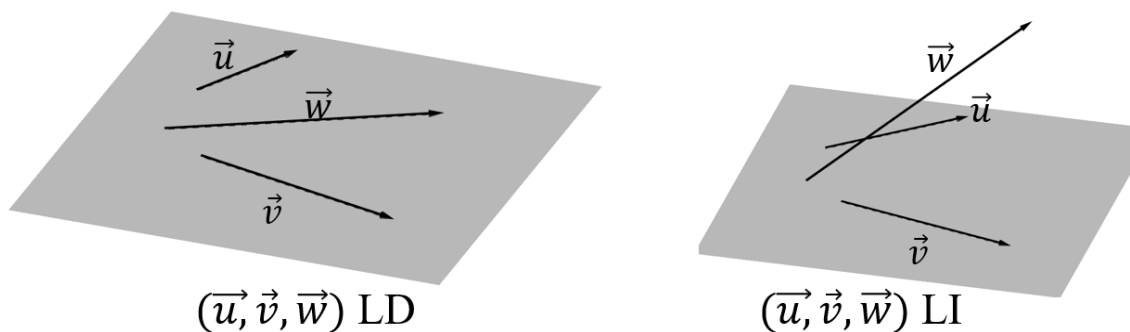


Figura 3 - Dependência Linear entre uma tripla de vetores.
Fonte: CAMARGO, BOULOS, 2004.

A explicação da revisão dos conceitos de vetor e dependência linear foi feita com auxílio dos recursos visuais do software GeoGebra. Em cada passo demonstramos a representação gráfica desses conceitos e questionamos os alunos sobre como os mesmos podem ser construídos, bem como problematizamos sobre outros possíveis significados para os tópicos apresentados. A Figura 4 ilustra parte dos procedimentos realizados com o GeoGebra.

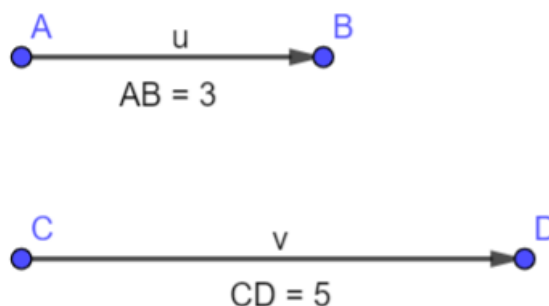


Figura 4 - Vetor, Paralelismo e Norma.
Fonte: Dos Autores.

Após as preliminares técnicas, motivamos nosso estudo apresentando uma aplicação de equações da reta em um problema de geometria computacional associado à modelagem computacional gráfica de objetos, que nesse momento é vista apenas como uma simplificação da grade tridimensional.

Para criar um modelo computacional gráfico de determinado objeto podemos construir uma grade tridimensional para mapear os pontos do objeto no espaço e traduzir esse mapeamento de informações para uma série de equações matemáticas que podem ser interpretadas pelo computador.

Para construir uma grade tridimensional utilizamos diversas retas e suas respectivas equações, de forma que cada região em que temos interesse em

mapear um ponto seja cortada por pelo menos uma reta. Dessa forma, podemos mapear a posição do ponto de interesse por meio da equação da reta em que ele está contido. Na Figura 5 é ilustrado um exemplo de como realizar esse mapeamento.

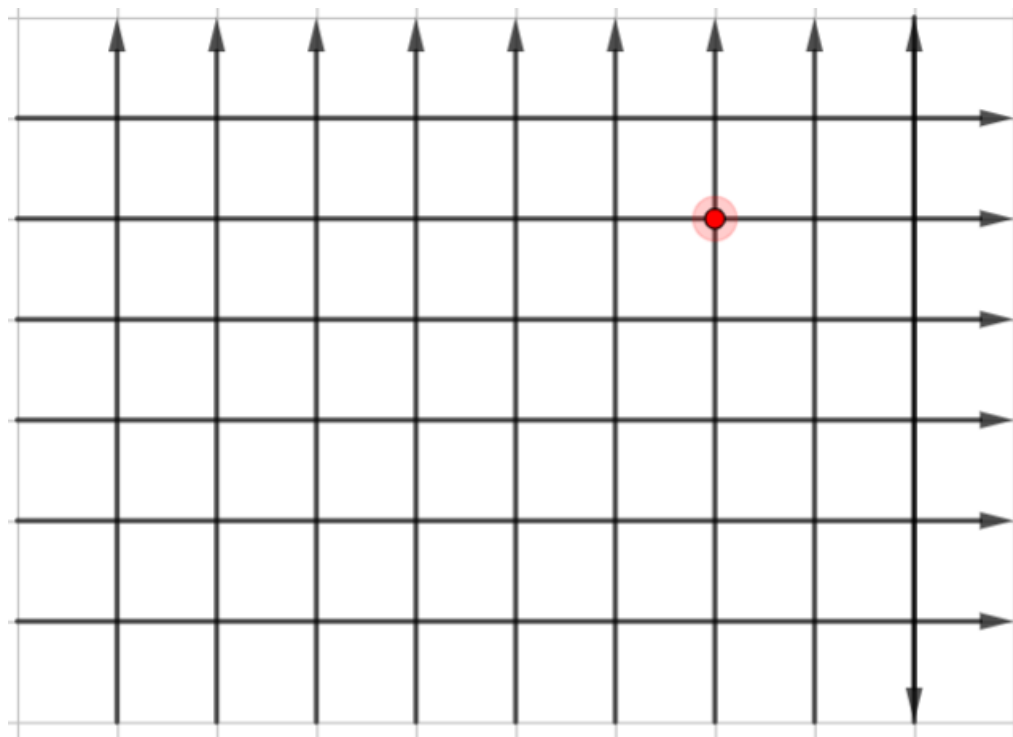


Figura 5 - Grade de retas para mapeamento de pontos
Fonte: Dos Autores.

Depois, formalizamos os conceitos relacionados ao estudo da reta. Buscamos que o discente compreenda que o processo de construção da reta depende de um ponto e de um vetor diretor que orienta a mesma. Sendo assim, a explicação do conceito de reta é acompanhada por uma construção feita no GeoGebra em que o estudante pode observar o processo de conceituação antes de formalizarmos a definição.

Primeiramente, apresentamos um texto introdutório para motivar o desenvolvimento do tópico.

O método adotado na Geometria Analítica, atribuído a René Descartes (1596-1650), consiste em associar a cada conjunto de pontos de $\mathbb{E}^3$ uma equação ou sistema de equações que o tenha por conjunto-solução. A finalidade é trabalhar com tais equações e tirar conclusões a respeito do conjunto. Assim, por exemplo, equações de uma reta r devem ter soluções exatamente os pontos de r ; trabalhando com elas, devemos ser capazes de obter pontos da reta, verificar se ela é paralela a uma reta conhecida, se está contida em um plano π , descobrir quais pontos de r têm uma dada

propriedade, enfim, de resolver problemas geométricos que envolvam a reta r . Pontos, porém, não se prestam muito bem à manipulação algébrica, pois a única operação envolvendo pontos que conhecemos é a que já foi estudada, e seu repertório de propriedades algébricas é reduzido. Por esse motivo, vamos preferir trabalhar com suas coordenadas, que, sendo números reais, têm uma afinidade muito maior com a Álgebra. Esse estudo é uma introdução à aplicação desse método ao estudo de retas e planos de $\mathbb{E}^3$ (CAMARGO; BOULOS, 2004, p. 144).

Construímos as equações da reta juntamente com os alunos. Para isso, questionamos o que é necessário para definir uma reta?

Inicialmente intuímos que precisamos de pelo menos um ponto, no entanto, utilizando o software GeoGebra como ferramenta visual, mostramos aos alunos que com apenas um ponto não é possível definir uma única reta, visto que é possível construir várias retas distintas que passam por apenas um ponto, como pode ser visto na Figura 6.

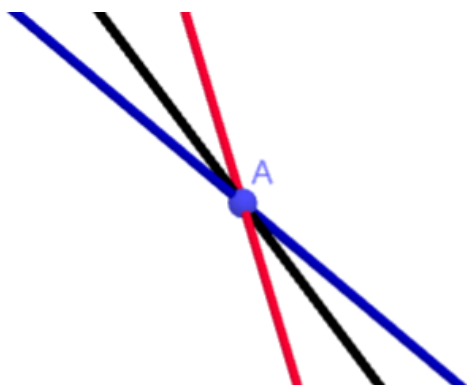


Figura 6 - Retas que passam por um ponto.
Fonte: Dos Autores.

Sendo assim, induzimos a verificação de que vamos precisar de pelo menos dois pontos para definir uma reta e, por meio de experimentos realizados com o software GeoGebra, concluímos que necessitamos de pelo menos dois pontos distintos para definir uma única reta, como mostra a Figura 7.

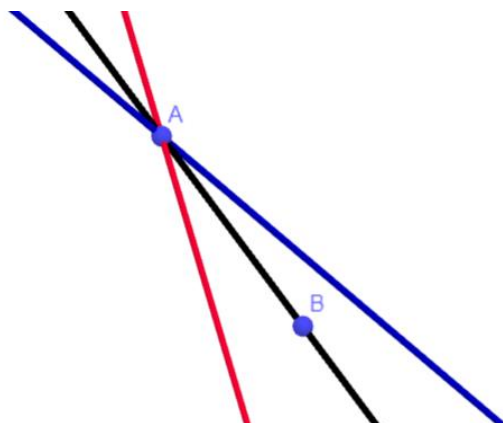


Figura 7 - Reta definida por dois pontos.
Fonte: Dos Autores.

Visando equacionar a definição da reta, realizamos um paralelo com o estudo que revisamos sobre vetores e paralelismo. Relembramos que quando temos dois pontos podemos sempre criar um vetor, e observamos que esse vetor será paralelo à reta que pode ser definida por esses pontos, ou seja, esse vetor pode atuar como vetor diretor da reta. Essa observação pode ser vista na Figura 8.

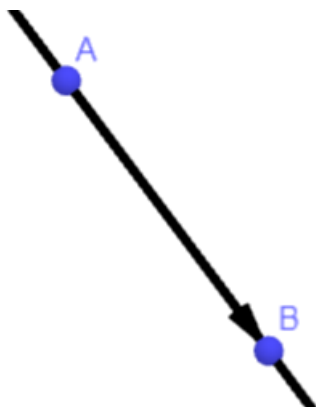


Figura 835 - Vetor diretor da reta definida por dois pontos.
Fonte: Dos Autores.

Uma vez estabelecida essa construção, passamos a formalização dos conteúdos.

Equação Vetorial da Reta: Sejam $\vec{u} \neq \vec{0}$ um vetor diretor de uma reta r e A um ponto de r , como mostrado na Figura 9. Um ponto X pertence a r se, e somente se, $(\overrightarrow{AX}, \vec{u})$ é LD, ou seja, se, e somente se, existe um número real λ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u}$. Isso equivale a

$$X = A + \lambda \vec{u}$$

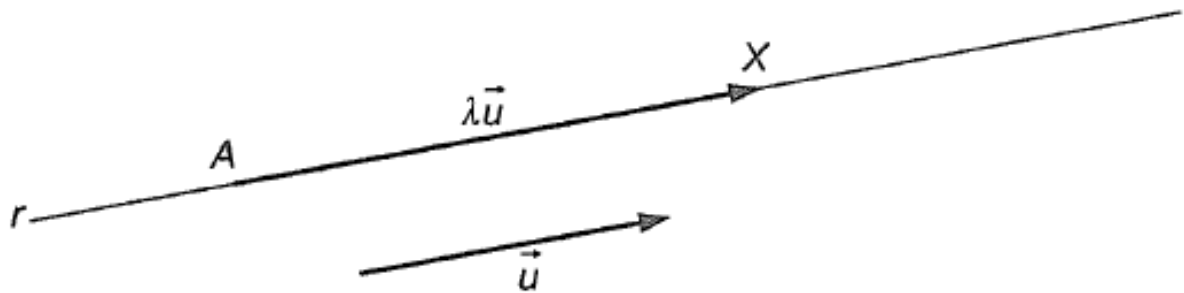


Figura 9 - Representação da Equação Vetorial da Reta.
Fonte: CAMARGO; BOULOS, 2004.

Assim, a cada número real λ fica associado um ponto X de r e, reciprocamente, se X é um ponto de r , existe λ satisfazendo a equação. Na linguagem clássica da Geometria, r é o lugar geométrico dos pontos X para os quais existe λ que torna verdadeira a equação da reta.

Em seguida, recordamos que elementos da Geometria Analítica podem ser representados com o uso do sistema cartesiano, sendo assim, podemos traduzir essa construção identificando as coordenadas dos pontos e vetores utilizados.

Equação Paramétrica da Reta: Assumindo um sistema de coordenadas com $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (a, b, c)$. Podemos escrever $X = A + \lambda\vec{u}$ em coordenadas, assim obtemos:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} (\lambda, \in \mathbb{R})$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ A & \vec{u} \end{matrix}$$

Observe que a, b, c não são todos nulos, pois $\vec{u} \neq \vec{0}$, isto é, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Para fixar os conteúdos vistos, recomendamos que os alunos reproduzissem as construções realizadas em aula com o GeoGebra. Dessa forma, poderiam repetir os procedimentos exemplificados para compreender de sua própria perspectiva o processo de estruturação das equações da reta. Tal procedimento também buscou garantir que o aluno realizasse experimentos com o software para esclarecer

quaisquer dúvidas que não tenham sido perceptíveis na primeira explanação, além de incentivar a prática do manuseio do recurso.

Fornecemos uma lista com exercícios objetivos e dissertativos (Anexo A) que podiam ser realizados com o auxílio de experimentações com uso do GeoGebra, tais atividades verificavam o entendimento discente sobre os conteúdos trabalhados e sua aplicação em problemas teóricos e práticos, como o mapeamento de pontos.

Ao final da aula, as construções realizadas com uso do GeoGebra e a resolução da lista de exercícios foram entregues ao professor, sendo utilizadas como instrumento de avaliação. O mesmo ocorre ao final de cada aula, sendo assim, vamos omitir o trecho.

1.2.2 Aula 2: Estudo da Equação do Plano

Uma vez apresentado o estudo sobre as equações da reta, desenvolvemos os conceitos para o estudo do plano. Novamente, considerando a dificuldade de entendimento sobre como essas expressões são estabelecidas, desenvolvemos a construção desses conteúdos juntamente com o auxílio de recursos visuais do GeoGebra, ilustrando os procedimentos necessários para estabelecer essas equações como decorrentes de interações entre um ponto e dois vetores.

Primeiramente recordamos o estudo sobre retas, visto que generalizamos alguns conceitos desenvolvidos na reta para o estudo do plano.

Para motivar nosso estudo apresentamos a aplicação das equações do plano no problema da geometria computacional que lida com modelagem computacional gráfica, dessa vez apresentando a versão que trata da grade tridimensional construída com planos.

Desejamos criar um modelo computacional gráfico de determinado objeto, para isso devemos construir uma grade tridimensional para mapear os pontos do objeto no espaço e traduzir esse mapeamento de informações em uma série de equações matemáticas que podem ser interpretadas pelo computador.

Para construir uma grade tridimensional utilizamos diversos planos e suas equações, de forma que cada região que temos interesse em mapear um ponto seja cortada por pelo menos um plano. Dessa forma, mapeamos a posição do ponto de interesse por meio da equação do plano em que ele está contido.

Para mostrar como lidamos com esse mapeamento de pontos apresentamos o seguinte problema.

Problema: Suponha que estamos utilizando os planos π_1, π_2 e π_3 , dados por suas equações vetoriais, para construir uma grade que será utilizada no mapeamento de pontos.

$$\pi_1: (0,0,0) + \lambda_1(1,0,0) + \mu_1(0,1,0)$$

$$\pi_2: (0,4,0) + \lambda_2(1,0,0) + \mu_2(0,0,1)$$

$$\pi_3: (2,0,0) + \lambda_3(0,1,0) + \mu_3(0,0,1)$$

Considere que temos interesse em mapear os pontos $A = (4,3,0)$, $B = (1,4,7)$ e $C = (2,5,3)$. Mostre que $A \in \pi_1$, $B \in \pi_2$ e $C \in \pi_3$.

Informamos que o problema será resolvido ao fim da aula, visto que precisamos dos conteúdos da mesma para construir a solução, e passamos para o desenvolvimento. Iniciamos recordando que para definir uma reta são necessários um ponto e um vetor diretor. Visando estender o conceito de definição da reta para o plano, questionamos aos alunos o que é necessário para definir um plano?

Inicialmente intuímos que vamos precisar de pelo menos dois pontos distintos, no entanto, utilizando o software GeoGebra como ferramenta visual, mostramos aos alunos que com apenas dois pontos não é possível definir um único plano, visto que é possível construir vários planos distintos que passam por dois pontos, como ilustra a Figura 10.

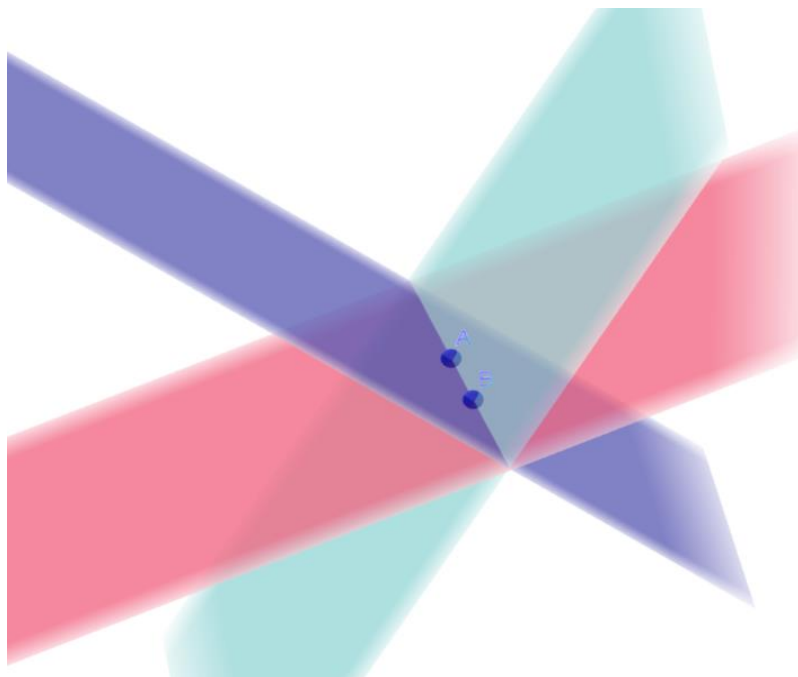


Figura 360 - Múltiplos planos passam por dois pontos.

Fonte: Dos Autores.

Sendo assim, induzimos a verificação de que vamos precisar de pelo menos três pontos para definir um plano e, por meio de experimentos realizados com o software GeoGebra, concluímos que necessitamos de pelo menos três pontos não colineares para definir um plano, como podemos observar na Figura 11.

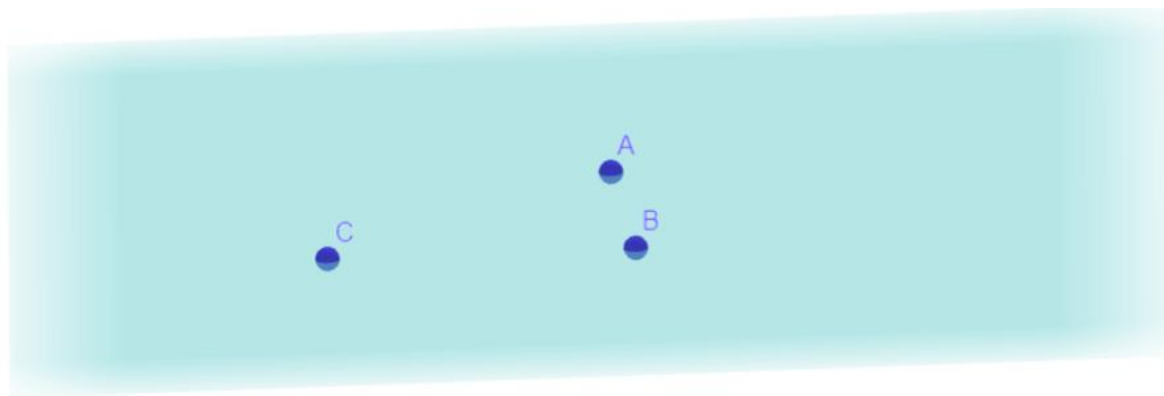


Figura 11 - Três pontos não colineares definem um plano

Fonte: Dos Autores.

Determinação de um plano:

- Precisamos de pelo menos 3 pontos não-colineares para determinar um plano, digamos pontos A , B e C ;

- Utilizando esses 3 pontos não-colineares podemos criar dois vetores que formam um par L.I., digamos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Tal fato pode ser observado na Figura 12.

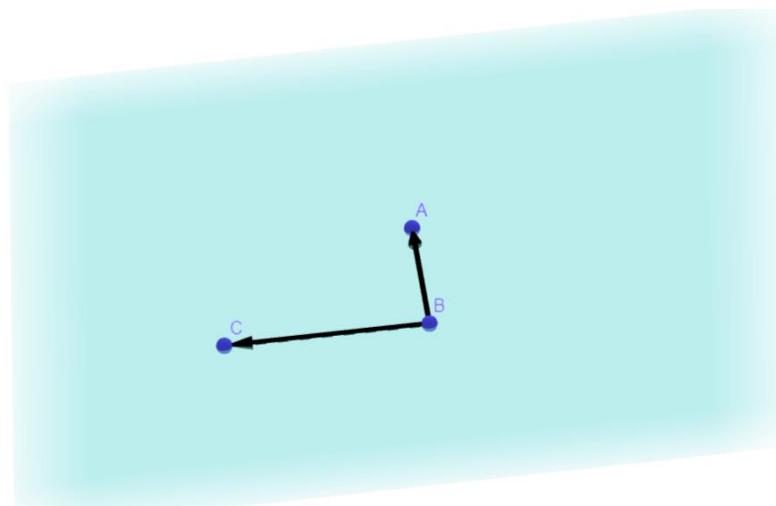


Figura 12 - Vetores diretores do Plano.
Fonte: Dos Autores.

Logo precisamos de um ponto e um par de vetores L.I. para determinar um plano.

Visando equacionar a definição do plano, realizamos um paralelo com o estudo que revisamos sobre a equação da reta. Relembramos que quando tínhamos dois pontos em uma reta podíamos criar um vetor paralelo à reta, ou seja, um vetor que podia atuar como vetor diretor da reta. Pensando de forma análoga, note que como os 3 pontos que definem o plano não são colineares podemos criar pelo menos dois vetores, digamos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, paralelos ao plano que não são múltiplos, ou seja, formam um conjunto L.I.

Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é L.I., todos os planos paralelos a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos entre si. Logo, assim como um vetor não-nulo determina a direção de uma reta, um par de vetores LI determina a direção de um plano. Com isso, formalizamos a próxima definição.

Definição: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI e paralelos a um plano π , o par $(\vec{u}, \vec{v})$ é chamado **par de vetores diretores de π** . Vetores diretores de um plano surgem sempre aos pares e são LI.

Equação Vetorial do Plano: Seja A um ponto do plano π e $(\vec{u}, \vec{v})$ um par de vetores diretores de π . Um ponto X pertence a π se, e somente se, $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AX})$ é LD, ou seja, se, e somente se, existem números reais λ e μ tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Essa definição pode ser ilustrada pela Figura 13.

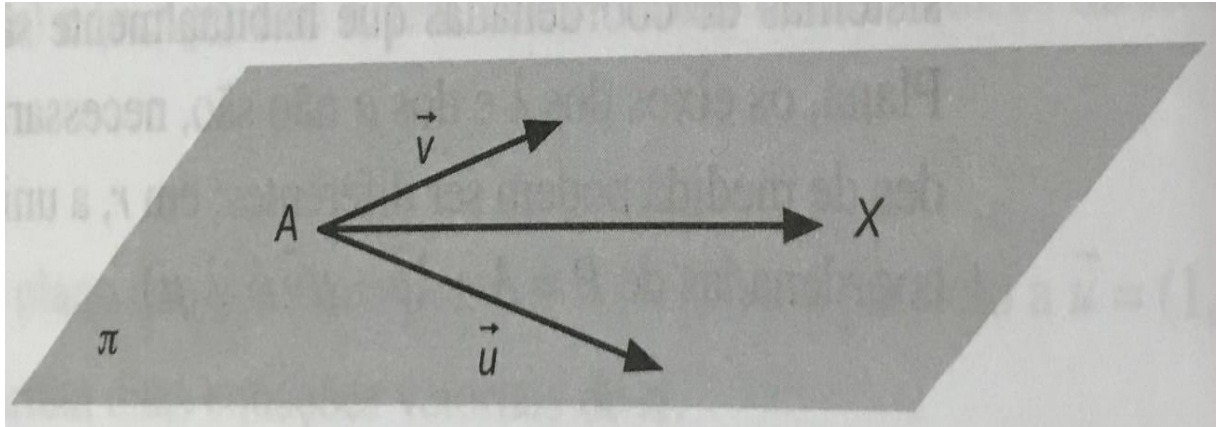


Figura 13 - Representação da Equação Vetorial do Plano.
Fonte: CAMARGO, BOULOS, 2004.

Isso equivale a dizer que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Por meio dessa igualdade fica associado, a cada par (μ, λ) de números reais, um ponto X do plano π . Reciprocamente, se X pertence a π , existem λ e μ que tornam verdadeira a igualdade acima.

Existem semelhanças entre as equações vetoriais da reta e do plano, a diferença reside na quantidade de vetores diretores (e, conseqüentemente, na de parâmetros) utilizados, que passou de um para dois.

Equação Paramétrica do Plano: Usando um sistema de coordenadas, tomamos $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. A equação $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ fica:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p) \\ &= (x_0 + \lambda a + \mu m, y_0 + \lambda b + \mu n, z_0 + \lambda c + \mu p) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & \vec{u} & \vec{v} \end{matrix}$$

Concluindo o estudo, resolvemos o problema apresentado na motivação. Para isso, vamos primeiramente construir as equações paramétricas dos planos, assim temos:

$$\pi_1: \begin{cases} x = 0 + \lambda_1 \\ y = 0 + \mu_1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 0 + \lambda_2 \\ y = 4 \\ z = \mu_2 \end{cases} \quad \pi_3: \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda_3 \\ z = \mu_3 \end{cases}$$

Sendo assim, considere

- $A \in \pi_1$: basta considerar $\lambda_1 = 4$ e $\mu_1 = 3$.
- $B \in \pi_2$: basta considerar $\lambda_2 = 1$ e $\mu_2 = 7$.
- $C \in \pi_3$: basta considerar $\lambda_3 = 5$ e $\mu_3 = 3$.

Para concluir o problema apresentamos para os alunos, utilizando o software GeoGebra como recurso visual, os planos considerados no problema e os pontos de interesse que foram mapeados, como na Figura 14.

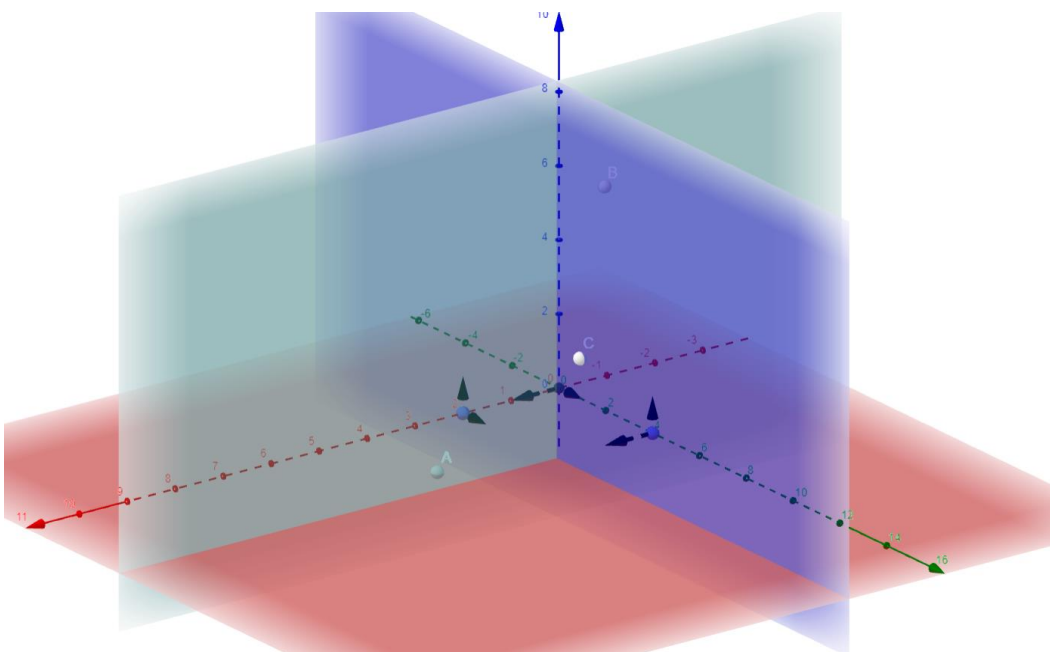


Figura 14 - Mapeamento de pontos no Exercício.
Fonte: Dos Autores.

Verificar que cada ponto pertence ao seu respectivo plano pode ser considerado fácil, visto que para simplificar o mapeamento dos pontos geralmente escolhemos vetores diretores que facilitam os cálculos envolvidos no processo. No entanto, observamos que nem sempre é fácil encontrar os coeficientes (μ, λ) que definem um ponto em um plano e que exemplos disso podem ser encontrados em exercícios.

Para fixar os conteúdos vistos, recomendamos que os alunos reproduzam as construções realizadas em aula com o GeoGebra, assim podem repetir os procedimentos exemplificados para um melhor entendimento. Além disso, possuem a oportunidade de realizar experimentos enquanto revisam o conteúdo, podendo fazer descobertas e conjecturas sobre esses conhecimentos. Essa atividade também possibilitou a manipulação do software, garantindo a proficiência para o desenvolvimento de outras práticas.

Também fornecemos outra lista com exercícios objetivos e dissertativos (Anexo B) que deviam ser feitos por meio de experimentações realizadas com o auxílio do GeoGebra. Tais atividades tinham como objetivo verificar o entendimento do aluno sobre os conteúdos trabalhados e se a abordagem proposta estava fornecendo resultados para a aprendizagem.

1.2.3 Aula 3: Construção da Grade Tridimensional

Iniciamos a aula recordando o estudo sobre as equações da reta e do plano, uma vez que vamos estudar as interações entre esses elementos, como intersecção e posições relativas.

Visando conceituar as possíveis intersecções entre duas retas, questionamos aos alunos: de quantas maneiras duas retas podem se tocar? Por meio de experimentações construídas com o GeoGebra, demonstramos que ou duas retas não se tocam, ou se tocam em um único ponto, como mostrado na Figura 15. Ainda existe o caso em que as retas são idênticas, sua ilustração será omitida.

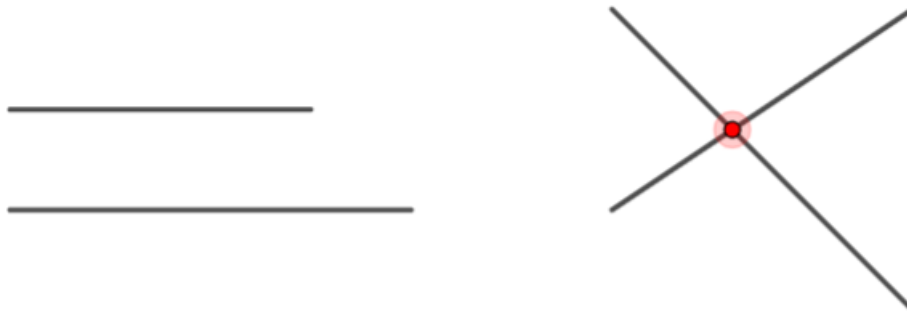


Figura 15 - Intersecção entre retas.
Fonte: Dos Autores.

Intersecção entre duas retas: Dadas as duas retas r e s :

$$r: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$$

$$s: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \mu(d, e, f).$$

Dizemos que elas possuem intersecção se existe uma solução única (λ, μ) para o sistema que iguala cada uma de suas coordenadas, nesse caso, a intersecção é o ponto resultante dessa solução. Caso contrário, ou as retas são idênticas (existem infinitas soluções para o sistema), ou as retas não possuem intersecção (não existe solução para o sistema).

Motivamos o estudo explicando que utilizamos essas intersecções nos procedimentos para captura de pontos de interesse, visando identificar quais pontos de uma reta estão presentes nos planos que compõem a grade tridimensional. Em seguida, aproveitamos o momento para reapresentar o problema, o mesmo será omitido visto que já foi feito anteriormente.

Com base na apresentação do problema, reforçamos que é necessário saber identificar a intersecção entre um plano e uma reta, assim questionamos aos alunos: como essa intersecção pode ocorrer?

Com o auxílio do GeoGebra realizamos construções gráficas que demonstram que as possíveis intersecções entre um plano e uma reta são um ponto, ou a reta em si, ou eles não se tocam. Tais conclusões são ilustradas na Figura 16, sendo omitido o caso em que a reta está contida no plano.

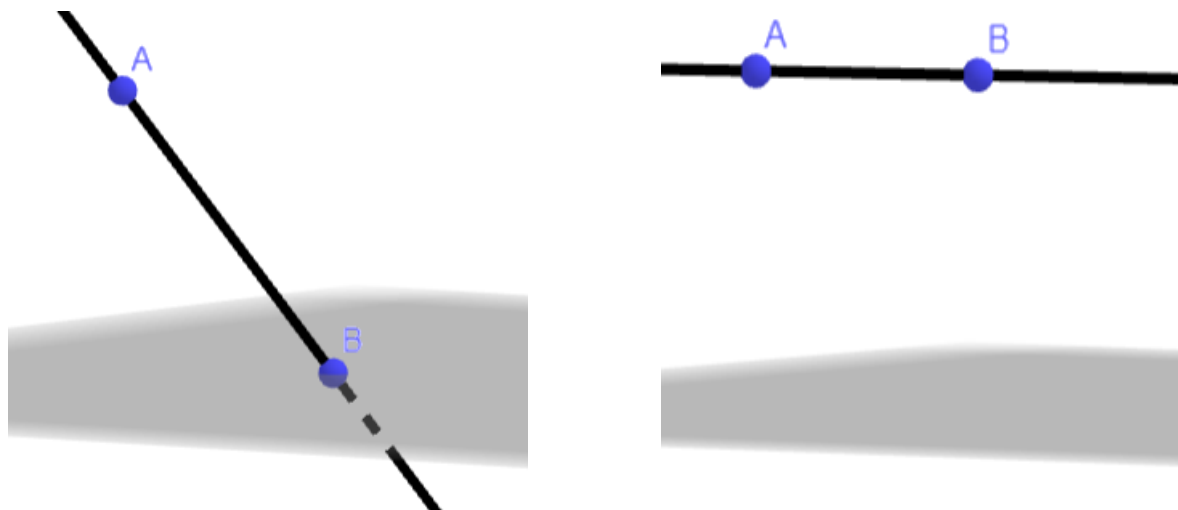


Figura 16 - Intersecção entre reta e plano
Fonte: Dos Autores.

Intersecção entre plano e reta: Dado um plano π as uma reta r :

$$\pi: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p)$$

$$r: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \alpha(d, e, f).$$

Dizemos que eles possuem intersecção se existe uma solução única (λ, μ, α) para o sistema que iguala cada uma de suas coordenadas, nesse caso, a intersecção é o ponto resultante dessa solução. Caso contrário, ou o plano e a retas não possuem intersecção (o sistema não tem solução), ou a reta pertence ao plano (o sistema tem infinitas soluções).

Por fim, apresentamos uma imagem de uma grade tridimensional semelhante a que é utilizada para o mapeamento de ponto e explicamos que para construir um recurso semelhante precisamos saber construir planos paralelos e perpendiculares.

Primeiramente, questionamos os alunos sobre as possíveis posições relativas entre dois planos. Por meio de experimentações com o GeoGebra mostramos que ou dois planos são paralelos, ou coincidentes, como mostra a Figura 17. Existe ainda o caso em que os planos são transversais, cuja ilustração foi omitida.

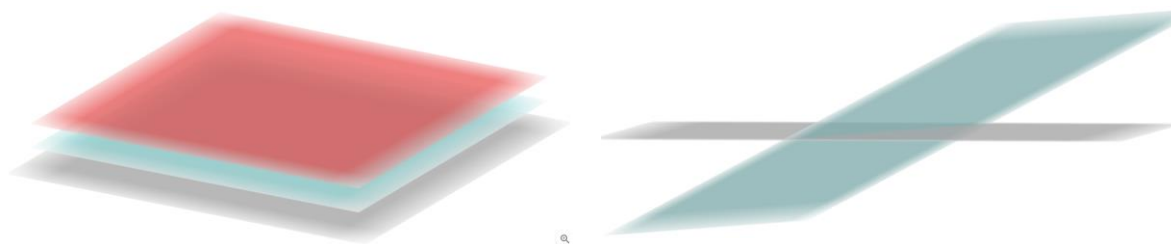


Figura 17 - Planos paralelos e transversais.
Fonte: Dos Autores.

Assim questionamos: o que é necessário para que os planos sejam paralelos? Explorando o estudo de vetores diretores dos planos com o uso do GeoGebra, induzimos aos alunos o conceito de que dois planos serão paralelos quando os vetores diretores de um forem paralelos ao outro plano, ou ainda, quando as duas triplas de vetores construídas com os dois vetores diretores de um plano e um do outro forem L.D., e os planos não possuem pontos em comum.

Planos Paralelos: Dados os planos:

$$\pi_1: X + \lambda_1 \vec{v} + \mu_1 \vec{u} \quad \text{e} \quad \pi_2: Y + \lambda_2 \vec{r} + \mu_2 \vec{s}.$$

Temos que π_1 e π_2 são ditos planos paralelos se as triplas $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$ e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{s})$ são ambas L.D. e os planos não possuem nenhum ponto em comum.

Analogamente, questionamos: o que é necessário para que os planos sejam perpendiculares? Explorando o estudo dos vetores diretores dos planos com o GeoGebra, induzimos aos alunos o conceito de que dois planos serão perpendiculares quando o produto vetorial dos vetores diretores de um formarem uma tripla de vetores L.D. com os vetores diretores do outro.

Planos Perpendiculares: Dados os planos:

$$\pi_1: X + \lambda_1 \vec{v} + \mu_1 \vec{u} \quad \text{e} \quad \pi_2: Y + \lambda_2 \vec{r} + \mu_2 \vec{s}.$$

Temos que π_1 e π_2 são ditos planos perpendiculares se a tripla $(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{r}, \vec{s})$ é L.D.

Por fim, utilizamos esses conceitos para construir com os alunos uma grade de planos paralelos e perpendiculares que permite o mapeamento de pontos para construção de um modelo computacional gráfico de um objeto. Essa grade é ilustrada na Figura 18.

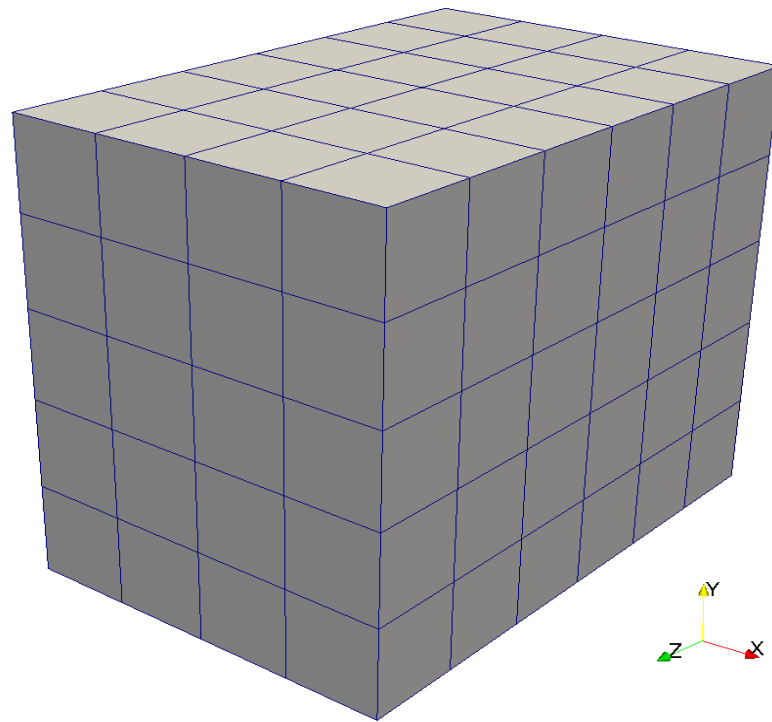


Figura 18 - Grade para Mapeamento de Pontos
Fonte: Dos Autores.

Para exemplificar como o mapeamento de ponto é realizado, apresentamos na Figura 19 uma garrafa com as marcações dos pontos de interesse delimitados e informamos aos alunos que esse é o objeto que vamos modelar na próxima aula utilizando os conhecimentos construídos.



Figura 19 - Garrafa com marcações dos pontos de interesse.
Fonte: Dos Autores.

Para concluir a aula, novamente solicitamos que os alunos reproduzam as construções vistas. Também fornecemos outra lista com exercícios objetivos e dissertativos (Anexo C) que devem ser realizados pelos mesmos procedimentos das anteriores, no entanto, essa é mais curta, visto que desejamos fornecer tempo para que os alunos construam seus modelos da garrafa.

1.2.4 Aula 4: Modelo Computacional Gráfico de um sólido de Revolução

Iniciamos a aula comunicando que vamos desenvolver aplicações, com os conceitos trabalhados em aula, no campo da geometria computacional gráfica, ou seja, estamos interessados em construir os modelos computacionais gráficos de objetos físicos discutidos ao longo dos momentos de motivação das últimas aulas.

Sendo assim, não abordamos conceituações ou definições da Geometria Analítica, mas buscamos compreender como os conteúdos vistos são utilizados na prática.

Primeiramente, guiamos os alunos no processo de construção da grade tridimensional de planos paralelos e perpendiculares utilizados para o mapeamento de pontos de interesse. Para construir o primeiro plano π_0 precisamos de um ponto O e de um par $(\vec{u}, \vec{v})$ de vetores L.I. Utilizando o ponto O e o vetor resultante do cálculo do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ construímos uma reta r que é perpendicular ao plano π_0 . Utilizando os pontos situados ao longo da reta r e o par $(\vec{u}, \vec{v})$ de vetores L.I. conseguimos construir diversos planos paralelos.

Na prática, utilizando o GeoGebra, uma forma conveniente de realizar esse procedimento é tomar a origem como sendo o ponto O e o par de vetores L. I. $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$. Nesse caso, a reta r terá vetor diretor $(0,0,1)$ e será representada pelo eixo z do sistema de coordenadas cartesianas. Tomando os pontos da forma $(0,0,n)$, com $n \in \mathbb{N}$, podemos construir os planos paralelos utilizando os vetores da forma $(1,0,n)$ e $(0,1,n)$. Vejamos na Figura 20:

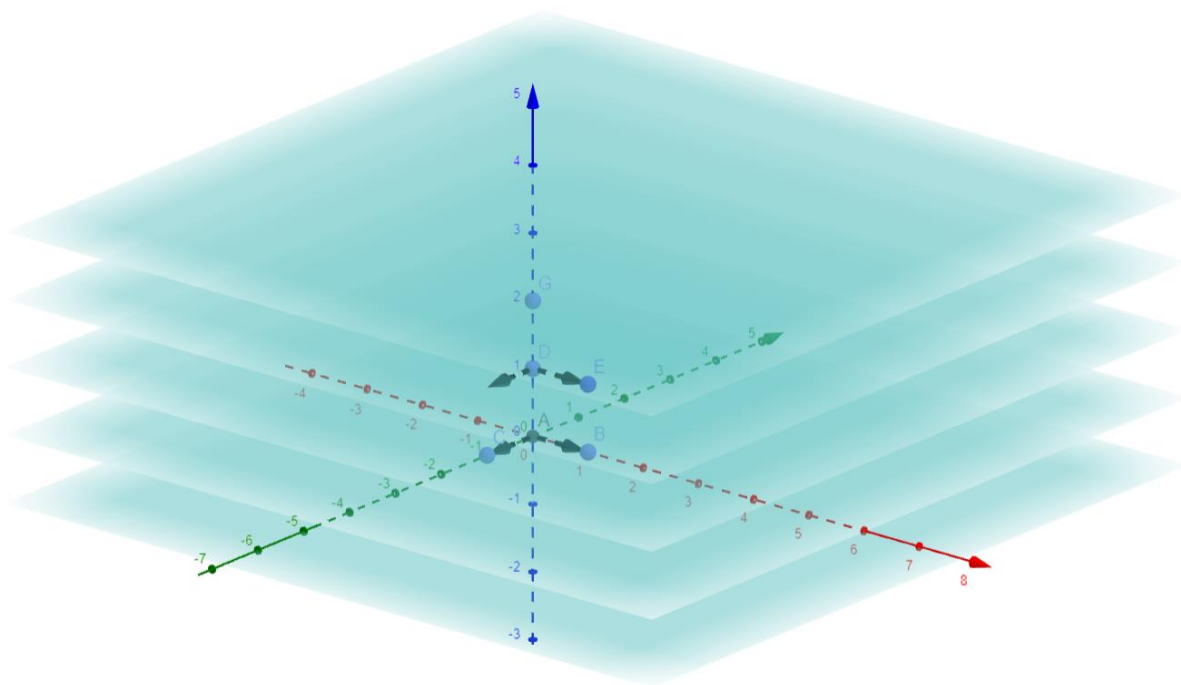


Figura 20 - Planos paralelos traçados com o uso do GeoGebra.
Fonte: Dos Autores.

Para construir os demais planos perpendiculares aos primeiros procedemos de forma semelhante, apenas utilizando os vetores resultantes do primeiro produto

vetorial como vetores diretores desses planos e calculando produtos vetoriais a partir disso. Não entramos em detalhes sobre esse procedimento, pois sua formalização exige notações nas quais não estamos interessados, em vez disso, focamos no desenvolvimento da prática com o uso do GeoGebra.

Utilizando a origem no ponto O e os vetores $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ como vetores diretores, temos um plano perpendicular a todos os anteriores construídos. Além disso, utilizando pontos da forma $(0,n,0)$, com $n \in \mathbb{N}$, construímos planos paralelos a ele com vetores da forma $(1,n,0)$ e $(0,n,1)$, como na Figura 21.

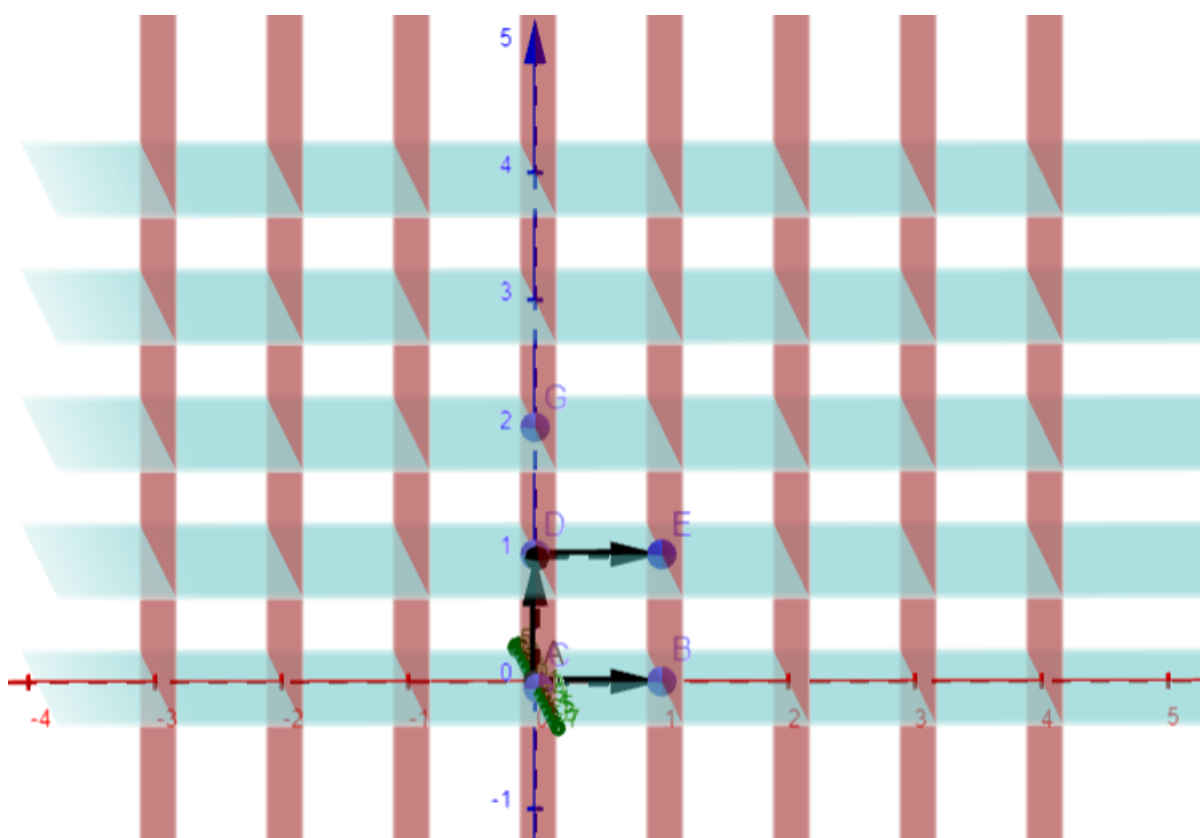


Figura 21 - Planos perpendiculares com o uso do GeoGebra.
Fonte: Dos Autores.

O restante dos planos perpendiculares que compõem a grade tridimensional pode ser construído por um processo análogo. Vejamos o resultado final apresentado na Figura 22:

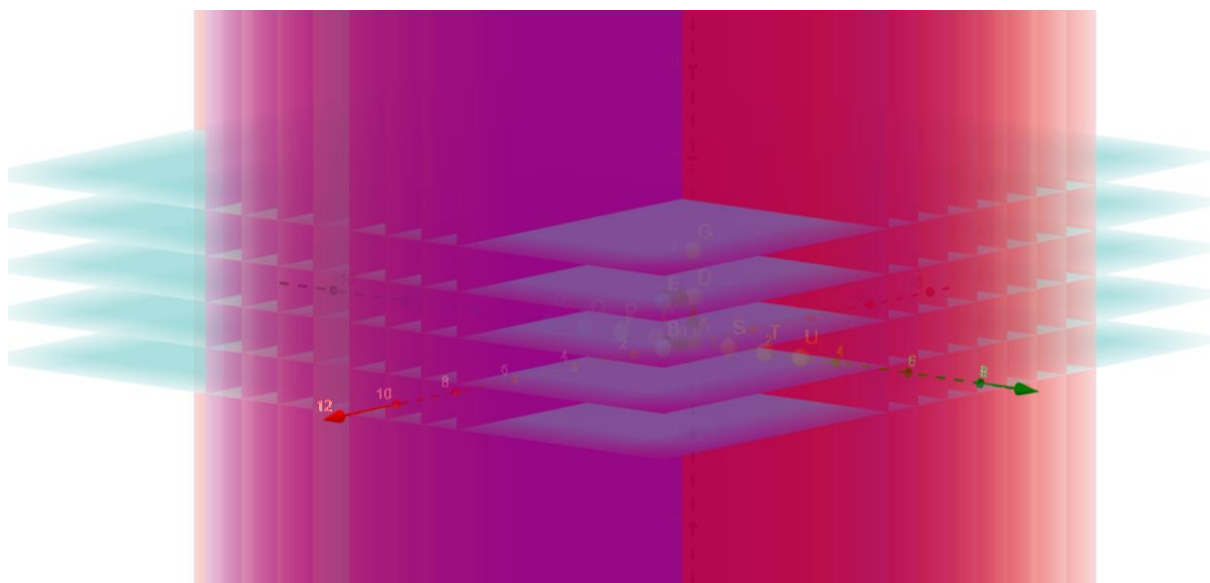


Figura 372 - Grade de planos tridimensional no GeoGebra
Fonte: Dos Autores.

Observamos que a poluição visual da grande quantidade de planos pode dificultar o mapeamento de pontos por meio do GeoGebra, sendo assim, é recomendável utilizar o sistema de coordenadas cartesianas e construir as equações dos planos que forem necessários, por apresentarem pontos de interesse.

Outro método possível para construção de um modelo computacional gráfico estabelece uma grade diretamente sobre o objeto que se deseja modelar. Utilizamos esse procedimento para realizar a modelagem da garrafa ilustrada na Figura 22.

Dessa forma, utilizando uma régua, ou outro instrumento de medição, é possível estabelecer as coordenadas dos pontos do objeto que devem ser marcados no GeoGebra para construir um modelo computacional gráfico.

Em particular, escolhemos a garrafa por se tratar de um sólido de revolução, sendo assim, a determinação de suas coordenadas pode ser simplificada devido a sua simetria radial, ou seja, identificamos a posição dos pontos de interesse para modelagem em seu contorno e obtemos os demais pontos da construção por meio da rotação dessas coordenadas.

Utilizamos a técnica de definição da grade para marcação dos pontos diretamente sobre o objeto modelamos e fotografamos o mesmo. Essa imagem foi

importada para o GeoGebra, fazendo com que os pontos de interesse sejam associados com coordenadas do espaço, como ilustrado na Figura 23.

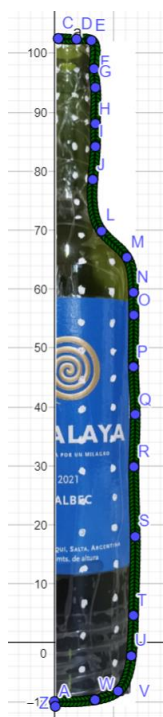


Figura 23 - Mapeamento do contorno da garrafa
Fonte: Dos Autores.

Por fim, utilizando as informações dos pontos demarcados, rotacionamos o contorno da garrafa de forma que são estabelecidas as coordenadas de todos os outros pontos de interesse para construção do modelo computacional. O resultado final desse procedimento é esboçado na Figura 24.

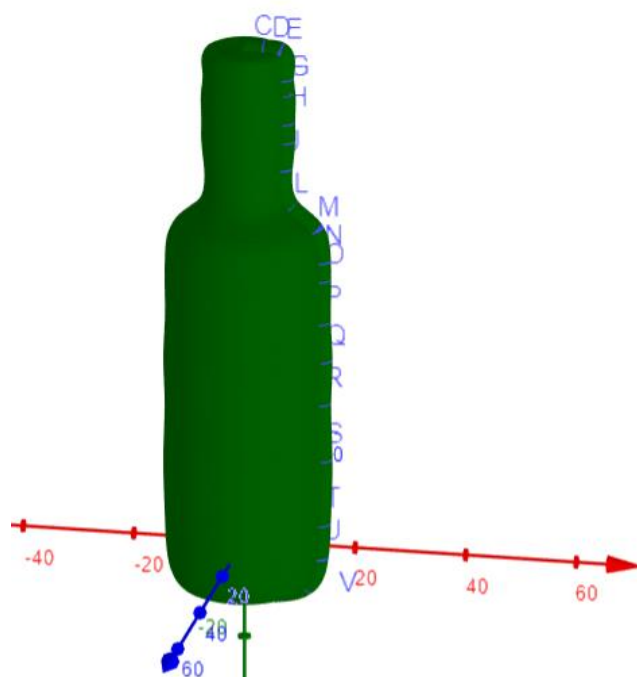


Figura 24 - Modelo computacional gráfico da garrafa
Fonte: Dos Autores.

Para concluir, solicitamos que os alunos construam seus próprios modelos seguindo as orientações fornecidas, bem como enviem seus resultados obtidos para o professor. As construções realizadas foram utilizadas como instrumentos de avaliação e constituem parte dos dados analisados nesta investigação.

Download GeoGebra: <https://www.geogebra.org/>

Download Gerador de Sólidos de Revolução:

3. BIBLIOGRAFIA

BALDIN, Yuriko Yamamoto; FURUYA, Yolanda K. Saito. **Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra**. EduFSCar: São Carlos, 2011.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial**. Pearson Academic, 2004.

FILHO, Ivan de Oliveira Holanda; CRUZ, Marcos Paulo Mesquita. **GeoGebra: soluções na geometria**. Curitiba: Editora Appris, 2019.

GOMES, Maria da Conceição Vieira. Álgebra, Geometria e Aritmética de Mãos Dadas no Ensino Fundamental. **Boletim GEPEM**, n. 42, 2003. Disponível em: <<https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/425>>. Acesso em: 29 maio 2022.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO; Paulo Cezar Pinto. **Coordenadas no Plano**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

WINTERLE, Paulo; STEINBRUCH, Alfredo. **Vetores e Geometria Analítica**. 2 ed. São Paulo: Makron Books, 2000.

ANEXOS

Anexo A: Folha de exercícios da aula 1



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA



GEOMETRIA ANALÍTICA – 2022/1
Débora Marília Hauenstein

LISTA DE EXERCÍCIO 1: VETORES E O ESTUDO DA RETA

Questões Discursivas

- 1) Por meio de experimentações realizadas com o GeoGebra verifique qual o maior número de vetores L.I. que podem estar contidos em um mesmo conjunto. Justifique sua resposta descrevendo seus experimentos.
- 2) Descreva como você pensaria em mapear os pontos de interesse de uma figura plana para construir seu modelo computacional gráfico em uma grade de retas no plano. Pense como seriam identificadas as coordenadas de cada ponto.
- 3) Para definir uma reta precisamos de dois pontos distintos, além disso, utilizando esses dois pontos podemos construir um vetor, de modo que outra forma de definir uma reta é utilizando apenas um ponto e um vetor diretor. Utilize o GeoGebra para verificar se existem outros elementos que podem ser usados para definir uma reta.
- 4) Observamos que a reta pode ser representada por duas equações diferentes, a equação vetorial e a equação paramétrica. Discorra sobre quais os motivos para a existência dessas duas representações. Você consegue identificar situações em que o uso de uma representação seja mais vantajoso que o da outras? Quais?

Questões Objetivas

- 1) Utilize o GeoGebra para identificar quais as triplas de vetores abaixo são L.D.
a) $(-6,3,8), (4,5-9), (-10,19,-12)$ b) $(5,2,-7), (11,2,-8), (4,4,4)$
c) $(-1,-2,5), (3,2-2), (7,0,9)$ d) $(2,-4,5), (4,8-2), (10,12,1)$
- 2) Considere os pontos $A = (2,2,3), B = (-2,-2,0), C = (1,1,0), D = (0,0,\frac{3}{2}), E = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}), F = (-1,-1,-1)$. Construa os pontos no GeoGebra e verifique quais 3 pertencem a uma mesma reta.
a) A, B, C b) A, B, D c) C, D, E d) C, D, F
- 3) Considere os pontos $A = (2,5,3)$ e $B = (-1,2,4)$. Identifique a equação vetorial da reta definida por esses pontos.
a) $r: (2,5,3) + \lambda(-3,3,1)$ b) $r: (2,5,3) + \lambda(3,3,1)$
c) $r: (2,5,3) + \lambda(-3,-3,1)$ d) $r: (2,5,3) + \lambda(3,-3,1)$
- 4) Considere a reta dada pela equação $r: (2,7,11) + \lambda(-3,2,-5)$. Identifique o valor de λ que fornece o ponto $(-31,29,-44)$.
a) $\lambda = 7$ b) $\lambda = 9$ c) $\lambda = 11$ d) $\lambda = 13$

Anexo B: Folha de exercícios da aula 2



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA



GEOMETRIA ANALÍTICA – 2022/1
Débora Marília Hauenstein

LISTA DE EXERCÍCIO 2: O ESTUDO DO PLANO

Questões Discursivas

- 1) Descreva como você pensaria em construir feixes de planos paralelos e perpendiculares de forma que fosse possível construir uma grade tridimensional para mapear os pontos de interesse de um objeto.
- 2) Considere que a grade tridimensional já esteja construída. Com base no exercício realizado em aula, descreva como você pensaria em mapear os pontos de interesse de um objeto para construir seu modelo computacional gráfico. Pense como seriam identificadas as coordenadas de cada ponto.
- 3) Para definir um plano precisamos de três pontos não colineares, além disso, utilizando esses pontos podemos construir dois vetores, de modo que podemos definir o plano utilizando um ponto e dois vetores diretores. Utilize o GeoGebra para verificar se existem outros elementos que podem ser usados para definir um plano.
- 4) O plano pode ser representado por duas equações diferentes, a equação vetorial e a equação paramétrica. Discorra sobre quais os motivos para a existência dessas duas representações. Você consegue identificar situações em que o uso de uma representação seja mais vantajoso que o da outras? Quais?

Questões Objetivas

- 1) Considere os pontos $A = (2,2,3)$, $B = (-2,-2,0)$, $C = (1,1,0)$, $D = (0,0,\frac{3}{2})$, $E = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $F = (-1, -1, -1)$. Verifique com quais pontos não é possível definir um plano.
a) A, B, C b) A, B, D c) C, D, E d) C, D, F
- 2) Considere os pontos $A = (2,5,3)$, $B = (-1,2,4)$ e $C = (5,-2,-1)$. Identifique a equação vetorial do plano definida por esses pontos.
a) $\pi: (2,5,3) + \lambda(3,3,-1) + \mu(-3,7,2)$ b) $\pi: (5,-2,-1) + \lambda(-3,7,4) + \mu(-6,4,3)$
c) $\pi: (-1,2,4) + \lambda(3,3,-1) + \mu(6,-4,-5)$ d) $\pi: (2,5,3) + \lambda(-3,-3,-1) + \mu(-3,7,-2)$
- 3) Suponha que estamos utilizando os planos abaixo, dados por suas equações vetoriais, para construir uma grade que será utilizada no mapeamento de pontos.
 $\pi_1: (0,0,7) + \lambda_1(1,0,0) + \mu_1(0,1,0)$ $\pi_2: (0,4,0) + \lambda_2(1,0,0) + \mu_2(0,0,1)$
 $\pi_3: (5,0,0) + \lambda_3(0,1,0) + \mu_3(0,0,1)$
Considere que temos interesse em mapear os pontos $A = (4,4,7)$, $B = (5,2,3)$ e $C = (2,5,3)$. Assinale a alternativa correta.
a) $B \in \pi_2 \cap \pi_3$ b) $A \in \pi_1 \cap \pi_2$ c) $C \in \pi_1 \cap \pi_3$ d) $A \in \pi_1 \cap \pi_2$

Anexo C: Folha de exercícios da aula 3



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA



GEOMETRIA ANALÍTICA – 2022/1
Débora Marília Hauenstein

LISTA DE EXERCÍCIO 3: CONSTRUÇÃO DA GRADE TRIDIMENSIONAL

Questões Discursivas

- 1) Por meio de experimentações realizadas com o GeoGebra, verifique se com o uso do software é possível identificar a solução do sistema (λ, μ) que garante que duas retas possuem um ponto de intersecção. Descreva como você procedeu.
- 2) Considere o problema do exercício 1 para o caso que trata da intersecção entre uma reta e um plano. Note que dessa vez o sistema considerado possui uma solução do tipo (λ, μ, α) .
- 3) Utilizando os conceitos de planos paralelos e perpendiculares vistos na aula de hoje, descreva como construir uma grade tridimensional com os planos paralelos e perpendiculares que possibilite o mapeamento de pontos de interesse em uma modelagem computacional gráfica.

Questões Objetivas

- 1) Identifique o ponto de intersecção entre as retas $r: (3, 0, -1) + \lambda(1, 1, 1)$ e $s: (1, 2, 1) + \mu(2, -2, -2)$.
a) $(2, 1, 1)$ b) $(3, 0, 1)$ c) $(-3, 1, 1)$ d) $(1, 0, 3)$
- 2) Identifique a tripla (λ, μ, α) que garante que a reta $r: (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$ e o plano $\pi: (10, 5, 5) + \mu(1, 0, -1) + \alpha(0, 1, -1)$ possuem um ponto em comum.
a) $(3, 3, 2)$ b) $(-3, 3, -2)$ c) $(3, -3, 2)$ d) $(3, -3, -2)$
- 3) Considere o plano $\pi: (2, 6, 3) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(3, 4, 1)$. Identifique o par de vetores abaixo que podem ser utilizados para definir um segundo plano paralelo ao plano π .
a) $(2, 5, 3), (-3, 3, 1)$ b) $(3, 3, 5), (3, 3, 1)$
c) $(5, 6, 5), (8, 12, 3)$ d) $(7, 7, 10), (3, 9, 10)$