# UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Centro de Desenvolvimento Tecnológico

Programa de Pós-Graduação em Computação


Dissertação

# Implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares Obtidas por Funções Duais e Agregadores Intervalares.


LIDIANE VISINTIN



Pelotas, 2013

LIDIANE VISINTIN

# Implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares Obtidas por Funções Duais e Agregadores Intervalares.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dr. Renata Hax Sander Reiser

Pelotas, 2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

V831i Visintin, Lidiane
Implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares obtidas por funções duais e agregadores intervalares / Lidiane Visintin; orientadora Renata Hax Sander Reiser. - Pelotas, 2012.
82 f.; il.

Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Computação) – Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, 2012.

1. Ciência da computação. 2. Lógica Fuzzy Intuicionista Intervalar. 3. Automorfismos Intuicionistas Intervalares. 4. Funções de Agregação Intervalares. 5. (Co) implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares. I. Reiser, Renata Hax Sander, orient. II. Título.

CDD: 005

Catalogação na Fonte: Aline Herbstrith Batista CRB 10/ 1737
Biblioteca Campus Porto - UFPel

**Banca examinadora:**

Prof. Dr. Adenauer Corrêa Yamin

Prof. Dr. Benjamìn René Callejas Bedregal

Profª. Drª. Luciana Foss

*Dedico este trabalho aos meus pais,*
*José e Dercila, por sempre*
*me apoiarem e incentivarem.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço:

- A Deus, pela oportunidade de estar concluindo mais esta caminhada.
- A minha família, em especial meu pai e minha mãe que apesar da distância sempre me apoiaram em todas as minhas decisões.
- A professora Dr. Renata Hax Sander Reiser, pela inestimável orientação, além de paciência e incentivo ao longo de todo este trabalho.
- Ao professor Dr. Benjamìn René Callejas Bedregal, pelas sugestões e críticas feitas aos trabalhos que desenvolvemos.
- Aos colegas de pós-graduação, Adriano, Melissa, Milena, Murian e demais colegas, pelas críticas, sugestões, apoio, companheirismo e pelas conversar nos corredores.
- A todos os membros do LUPS, que colaboraram direta ou indiretamente para o meu crescimento pessoal e intelectual.
- A todos os colegas de trabalho, que contribuíram significativamente para o meu crescimento profissional.

*"O que você tem, todo mundo pode ter...*
*Mas o que você é, ah, isso ninguém pode ser."*
— Clarice Lispector

# RESUMO

VISINTIN, Lidiane. **Implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares Obtidas por Funções Duais e Agregadores Intervalares.**. 2013. 81 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Computação. Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

Este trabalho consiste num estudo teórico, no sentido estrito da lógica fuzzy, fundamentado em conceitos de ambas abordagens, da lógica fuzzy intuicionista e da lógica intervalar. A lógica fuzzy intuicionista intervalar além de lidar com a indecisão natural inerente às variáveis linguísticas envolvidas desde a modelagem de sistemas computacionais, também colabora com duas outras importantes interpretações. Primeiramente, a interpretação obtida quando intervalos podem ser considerados como tipos particulares de conjuntos fuzzy, modelando a imprecisão de uma variável dependente do contexto computacional, dos cálculos e erros numéricos e referente às informações de vários especialistas quanto ao seu grau de pertinência. E, a interpretação da indecisão quanto a relação de pertinência, quando o grau de pertinência não se restringe apenas ao complemento do correspondente grau de não pertinência da variável modelada. Consolida-se esta interpretação com o uso de operadores de agregação e dualidade, contemplando uma modelagem mais flexível para a verdade associada a cada variável. Assim, esta análise da veracidade pode ser inferida tanto pelo seu grau intervalar de pertinência quanto pela negação do seu grau intervalar de não-pertinência. A extensão intervalar dos conectivos da lógica fuzzy intuicionista em estudo neste trabalho está focada nas implicações fuzzy intuicionistas intervalares e suas estruturas duais, as coimplicações fuzzy intuicionistas intervalares. Em especial, o trabalho considera as construções conjugadas destes conectivos, obtidas por ação de automorfismos intuicionistas intervalares, e apresenta uma interpretação para as condicionais baseadas em (co)implicações fuzzy intuicionistas intervalares. A principal contribui refere-se à introdução da classe de implicações fuzzy intuicionistas intervalares gerados por um conjunto finito de agregadores intervalares idempotentes e um par de funções intervalares duais, no caso uma implicação fuzzy intervalar e sua correspondente coimplicação fuzzy intervalar. Um estudo das propriedades algébricas das implicações fuzzy extensíveis para a abordagem intuicionista intervalar é desenvolvido, incluindo uma análise de propriedades inerentes da abordagem intuicionista, como o índice fuzzy intuicionista intervalar.

**Palavras-chave:** Lógica Fuzzy Intuicionista Intervalar, Automorfismos Intuicionistas Intervalares, Funções de Agregação Intervalares, (Co)Implicações Fuzzy intuicionistas intervalares.

# ABSTRACT

VISINTIN, Lidiane. **Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Implication obtined for Dual Functions and Interval-Values Aggregator**. 2013. 81 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Computação. Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

This work is a theoretical study, in the strict sense of fuzzy logic, based on the concepts of the following approaches: intuitionistic fuzzy logic and interval fuzzy logic. The interval intuitionistic fuzzy logic not only deals with the indecision inherent in natural language variables modeling computer systems, but also collaborates with two other important interpretations. Firstly, the interpretation which is achieved when intervals may be considered as particular types of fuzzy sets, modeling the imprecision of a variable depending on the computational context by calculations and numerical errors, and by regarding information related to various experts concerned to its membership degree. Secondly, the indecision about the relationship of membership functions, when the membership degree is not restricted to the complement of the corresponding nonmembership degree of such modeled variable. It reinforces these interpretations by using the duality principle and aggregation operators, providing a more flexible modeling for the truth associated with each variable. Thus, a more realistic analysis of the veracity of this variable can be inferred as much as from its interval membership degree and from the complement related to its interval nonmembership degree. The interval extension of intuitionistic fuzzy connectives analysed in this work is focussed on interval intuitionistic fuzzy implications and their dual structures, the interval intuitionistic fuzzy coimplications. In particular, this work considers conjugate functions related to these connectives, obtained by the action of interval intuitionistic automophisms in order to provide an interpretation to the conditional rules based on interval intuitionistic fuzzy logic. The main contribution of this work is the introduction of a special class: the interval intuitionistic fuzzy implications obtained by a finite set of idempotent aggregation operators and a pair of mutual dual interval functions, named as interval fuzzy implications and coimplications. Moreover, a study of algebraic properties extended from fuzzy implications is developed, including an analysis of inherent properties from intuitionistic approach such as the relationships of the interval intuitionistic fuzzy index and the new classes mentioned above.

**Keywords:** Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Logic, Interval-Valued Intuitionistic Automorphims, Interval-Valued Aggregation functions, Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy (Co)Implications.

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| IvA | Automorfismo Intervalar |
| IvIA | Automorfismo Intuicionista Intervalar |
| IFC | Coimplicação Fuzzy Intuicionista |
| IvIFC | Coimplicação Fuzzy Intuicionista Intervalar |
| IvFS | Conjunto Fuzzy Intervalare |
| IFS | Conjunto Fuzzy Intuicionista |
| IvIFS | Conjunto Fuzzy Intuicionista Intervalar |
| IFI | Implicação Fuzzy Intuicionista |
| IvIFI | Implicação Fuzzy Intuicionista Intervalar |
| FL | Lógica Fuzzy |
| IvFL | Lógica Fuzzy Intervalar |
| IFL | Lógica Fuzzy Intuicionista |
| IvIFL | Lógica Fuzzy Intuicionista Intervalar |
| IvIFN | Negação Fuzzy Intuicionista Intervalar |
| SIvIFN | Negação Fuzzy Intuicionista Intervalar Forte |

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Os conceitos de lógica nebulosa, lógica difusa, ou ainda lógica fuzzy (FL) como denominada no texto, são estudados desde a década de 1960, porém a área ganhou impulso maior a partir de 1980, com o surgimento dos computadores digitais e sua grande capacidade de processamento. A partir daí, essa lógica foi incorporada a programas que permitem o comando automático de determinados processos, máquinas ou equipamentos. Há inúmeros trabalhos envolvendo aplicações práticas, utilizando conceitos da FL (BEZDEK; DUBOIS; PRADE, 1999; DUBOIS; PRADE, 2000; KLIR; FOLGER, 1988).

As primeiras noções da lógica fuzzy foram apontadas por um lógico polonês Jan Lukasiewicz (FONT; HAJEK, 2002) em 1920, introduzindo a lógica dos conceitos "vagos" a partir dos conjuntos com graus de pertinência. Segundo (ALTROCK, 1996), a primeira publicação sobre lógica fuzzy data de 1965, quando recebeu esta denominação. Seu autor foi Lotfi Asker Zadeh (ZADEH, 1965), professor na Universidade da Califórnia, Berkeley, USA, desenvolvendo os fundamentos da lógica fuzzy ao combinar os conceitos da lógica clássica e os conjuntos de Lukasiewicz, definindo as funções de pertinência como extensão das funções características (ZADEH, 1965, 1975, 1994).

A principal diferença entre a proposição definida pelos conjuntos clássicos e a proposição definida sobre conjuntos fuzzy introduzida por Zadeh (ZADEH, 1965), está na valoração do grau de pertinência, cujos valores são números reais entre $0$ e $1$. Na abordagem clássica, um elemento pertence ou não a um determinado conjunto. A lógica fuzzy estende a lógica convencional, a qual somente se aplicam situações em que se pode decidir se o elemento está ou se não está no conjunto, sem possibilidade de descrever situações intermediárias.

A lógica fuzzy pode ser utilizada para realizar estimativas, tomada de decisões, controle de sistemas e processos evolutivos (FARMER, 1996; XU; YAGER, 2009; WU et al., 2008). Um exemplo da utilização da lógica nebulosa é o sistema de transporte subterrâneo, o metrô da cidade de Sendai, Japão. Desde 1987, um controlador nebuloso mantém os trens deste sistema em movimento, acelerando e freando as composições de forma sutil, parando-as precisamente nas estações, sem desperdiçar tempo e sem causar desconforto aos passageiros.

Outros exemplos vão desde o controle de temperatura em um ar-condicionado, ajuste automático de contraste, brilho, nitidez e cor em televisões, à transmissão automática e controle de freios ABS de veículos (MCNEILL; THRO, 1994)

Um dispositivo que utilizasse a lógica convencional para realizar estas tarefas teria que receber a informação exata para que pudesse determinar um valor exato para a abertura dos correspondentes instrumentos.

Dentro desta abordagem, a relevância do estudo dos conectivos para a modelagem de sistemas fuzzy baseados na fundamentação teórica da lógica fuzzy, e suas extensões, busca a construção de sistemas computacionais mais confiáveis, robustos, extensíveis e passíveis de uma verificação mais formal (JAULIN et al., 2001; LI; LI; XIE, 2011; CAI, 2001; LI et al., 2005; LI, 2008; JIN; LI; LI, 2007; REISER; BEDREGAL, 2012).

De especial interesse, as implicações fuzzy, suas construções duais e as correspondentes conjugadas obtidas por automorfismos são estudadas neste texto, contribuindo com outros trabalhos pioneiros e relevantes da literatura desta área, veja (BACZYŃSKI; JAYARAM, 2008a; CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2002; LI, 2011; DESCHRIJVER; KERRE, 2005a).

Este estudo poderá contribuir estendendo o estudo das diferentes formas de representação: implícita, explicita, das implicações fuzzy para abordagem fuzzy intuicionista e para a abordagem intervalar. Além desta, como descrito em (MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2005, 2008), outra contribuição poderá ser alcançada para diferentes classes de implicações: R-implicações, S-implicações, QL-Implicações, XOR-implicações (DESCHRIJVER; KERRE, 2005b; BEDREGAL et al., 2010). Também pode ser considerado o estudo de correlações entre conjuntos fuzzy (BUSTINCE; BURILLO, 1995; GERSTAENKORN; MAńKO, 1991) incluindo análise de robustez e sensibilidade dos conectivos estudados e introduzidos neste trabalho pela integração das abordagens entre a lógica fuzzy intuicionista e a lógica fuzzy intervalar.

## 1.1 Extensões da Lógica Fuzzy

Apesar de proverem uma abordagem consolidada para modelagem de incertezas de sistemas reais, sistemas fuzzy têm capacidades limitadas quanto ao contexto. Por exemplo, uma situação em que se considera a aproximação de dados aleatórios, ou ainda, cuja evolução está mudando de forma não conhecida ao longo do tempo.

Numa forma de responder a tais críticas, já em $1975$ (ZADEH, 1975), o Prof. Zadeh reconheceu esta dificuldade, introduzindo os conjuntos fuzzy de tipo-$2$ (ou de mais alta ordem) como extensão dos sistemas fuzzy de tipo-$1$, os quais fundamentam a FL.

Nesta nova e abrangente abordagem, um conjunto fuzzy do tipo-$2$ permite incorporar a incerteza sobre a função de pertinência. Além disso, de forma mais significativa, esta abordagem contribui com a generalização da teoria dos conjuntos fuzzy, pois, se não há ocorrência de incerteza, então um conjunto fuzzy do tipo-$2$ se reduz a um conjunto fuzzy do tipo-$1$. Esta generalização se reporta à teoria da probabilidade a qual se reduz ao determinismo quando a aleatoriedade desaparece (DUBOIS; PRADE, 1991, 2005; DESCHRIJVER; KERRE, 2005a,b; CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003).

Muitos estudos vem sendo desenvolvidos no sentido de estender a lógica fuzzy para a **lógica fuzzy intervalar** (IvFL), concebida como uma restrição da lógica fuzzy do tipo-$2$, baseada na representação intervalar dos operadores lógicos e na valoração das proposições por intervalos.

Dentre as diversas extensões da FL, Krassimir T. Atanassov introduz a teoria dos conjuntos fuzzy intuicionista e os fundamentos da lógica fuzzy intuicionista (LIN; XIA, 2006; DESCHRIJVER; KERRE, 2005b; CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2002). Esta teoria considera tanto a função de pertinência, como a função de não pertinência, ou seja, a cada elemento do conjunto $\mathcal{X}$ está associado a um grau de pertinência e um grau de não-pertinência. E, diferentemente da teoria os conjuntos fuzzy, o complemento do grau de pertinência não é necessariamente igual ao grau de não-pertinência, sendo assim possível de medir a distância entre o grau de pertinência e de não-pertinência. E tal diferença modelando o grau de hesitação que é também conhecida como índice fuzzy intuicionista. Ampliando-se assim a forma de modelagem lógica. A **lógica fuzzy intuicionista** (IFL) provê fundamentação para aplicações em diversas áreas, como descrito em (LIN; XIA, 2006).

A investigação proposta neste trabalho de pesquisa está nas interseções destas extensões da lógica fuzzy, ressaltam-se os estudos em **lógica fuzzy intuicionista intervalar** (IvIFL), baseada na teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares proposta em (ATANASSOV; GARGOV, 1989).

Esta extensão agrega a imprecisão tanto na função de pertinência como na função de não pertinência. A lógica fuzzy intuicionista intervalar preserva os princípios da lógica fuzzy intuicionista, ampliando a forma de representação e agregando a imprecisão da lógica fuzzy intervalar quanto a ambos os graus, de pertinência e de não pertinência.

O diagrama da Figura 1.1 descreve, graficamente, a modelagem das diferentes extensões da FL a partir de um conjunto universo não-vazio, sendo que estas extensões serão consideradas neste trabalho;
(i) devido a necessidade de melhor compreensão dos conceitos e fundamentos destas abordagens lógicas, e
(ii) e por serem estas extensões utilizados para a interpretação das regras condicionais baseadas na abordagem fuzzy intuicionista intervalar.

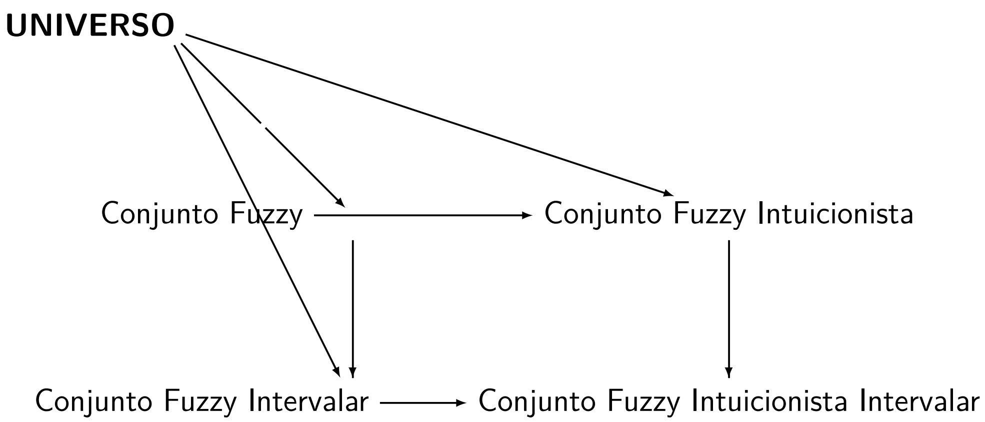


Figura 1: Interconexão entre extensões da lógica fuzzy

Este texto está focado no estudo estrito da IvIFL, de forma a estender os conceitos da FL e a capacidade de deduzir conclusões baseadas em informações incertas e imprecisas (BARROS; BASSANEZI, 2006; CARLSSON; FULLER, 2002).

A relevância do estudo dos conectivos para a modelagem de sistemas fuzzy, podem ser verificada em outros trabalhos, veja (CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2002; LI, 2011; DESCHRIJVER; KERRE, 2005a).

Além disso, este trabalho estende o estudo das diferentes formas de representação: implícita, explicita, das implicações fuzzy intuicionistas para a abordagem intervalar. Como descrito em (MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2005, 2008), outra contribuição poderá ser alcançada para diferentes classes de implicações: R-implicações, S-implicações, QL-Implicações, XOR-implicações (DESCHRIJVER; KERRE, 2005b; BEDREGAL et al., 2010).

Outra importante investigação pode ser alcançada com o estudo das correlações e entropias entre conjuntos fuzzy (BUSTINCE; BURILLO, 1995; GERSTAENKORN;

MAńKO, 1991) obtidos pelas novas classes de implicações e coimplicações geradas por pares de funções duais, implicações e coimplicações intervalares.

## 1.2 Aplicações da Lógica Fuzzy Intuicionista Intervalar

A expressão da incerteza e imprecisão tem sido amplamente discutida no decorrer dos anos gerando diversas extensões para a teoria introduzida por Zadeh. Introduzidos em (ATANASSOV, 1986) os conjuntos fuzzy intuicionistas, são caracterizados pela aplicação da função de pertinência e de não-pertinência, para a modelagem da hesitação (de especialistas e engenheiros do conhecimento), além da incerteza (de medidas e pretensão de instrumentos tecnológicos).

No início dos estudos sobre conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares, o foco das pesquisas era o estudo de operações e propriedades básicas, veja (ATANASSOV, 1994) definindo algumas operações e relações sobre IvIFS.

Várias pesquisas vêm colaborando com os estudos envolvendo a teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas(IFSs) de Atanassov. Pode-se citar diversos trabalhos. Em (CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003), encontra-se uma comparação entre IFSs e Conjuntos fuzzy intervalares IvFSs, envolvendo uma análise do índice fuzzy intuicionista. Em (XU; YAGER, 2009), tem-se um detalhado estudo dos conectivos fuzzy intuicionistas. São estudados neste caso t-normas, t-conormas e negação fuzzy. Seguem os trabalhos de (BACZYŃSKI, 2007; LIN; XIA, 2006; MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2008; BEDREGAL et al., 2010; BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009), entre outros, considerando extensões das implicações e conceituação de classes e representação. Em (ATANASSOV, 2005; BACZYŃSKI, 2003; DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004), faz-se o uso de representação intervalar de t-normas, t-conormas e complemento fuzzy.

Do mesmo modo, estudos sobre os IvFSs são assunto de diversas publicações, dentre elas, dá-se ênfase ao estudo das implicações fuzzy intervalares em (BEDREGAL et al., 2007), considerando propriedades algébricas das implicações veja também (SHI et al., 2008; RUIZ-AGUILERA; TORRENS, 2004, 2009; REISER et al., 2007; BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009).

Em (TIZHOOSH, 2008), propõe a interpretação do isomorfismo entre IFSs e IvFSs, considerando diferentes semânticas.

Em (ATANASSOV; GARGOV, 1989), introduz-se os IvIFSs, como uma generalização dos IFSs, estendendo as funções de pertinência e de não-pertinência para abordagem intervalar. O trabalho descrito em (ZHANG et al., 2008), mostra uma adequação formal para se representar a opinião de diferentes especialistas pela aplicação de IvIFSs.

Em (BUSTINCE; BURILLO, 1995), os conceitos de correlação e de coeficientes entre conjuntos fuzzy para a teoria dos IvIFSs são discutidos. Na sequência, em (HUNG; WU, 2002), os resultados foram obtidos com o desenvolvimento do método centroide para o cálculo de correlação de coeficientes dos IvIFSs.

Pesquisas sobre alguns conectivos e propriedades dos IvIFS, bem como o estudo de operadores de agregação fuzzy intuicionistas intervalares, também tem recebido considerável atenção. Salienta-se (LIU; ZHENG; XIONG, 2005; KREINOVICH; MUKAIDONO, 2000), os quais fazem uso do grau de hesitação (YE, 2009; WANG; LI; WANG, 2009).

Na lógica fuzzy intuicionista também seguiram as pesquisas e estudos de aplicação dos conectivos e das principais propriedades algébricas para modelagem de sistemas fáceis de validação e passíveis de extensão, veja (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004).

A teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares e as lógicas correspondentes, vêm sendo amplamente discutidas e aplicadas a diversas áreas tais como avaliação ambiental (ZENDEHDEL et al., 2009), seleção de fornecedores (WU et al., 2008), diagnósticos médicos (TSCHAN et al., 2009), políticas públicas (ZARGHAMI et al., 2008), processamento de imagens (BUSTINCE et al., 2009), tomada de decisão (WANG; LI; ZHANG, 2012), entre outras (GEHRKE; WALKER; WALKER, 1996; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2004; DESCHRIJVER, 2007; LI; WANG; CHEN, 2010).

## 1.3 Objetivos

A proposta deste trabalho tem com objetivo o estudo e análise das implicações fuzzy intuicionistas intervalares. Considerando principalmente a representação intervalar destes conectivos, este trabalho está focado no estudo das principais propriedades algébricas das implicações fuzzy intuicionistas intervalares.

Os objetivos específicos são:

- Caracterizar o estado da arte da lógica fuzzy intuicionista intervalar, e a relevância do estudo das implicações fuzzy intuicionistas intervalares;
- Revisar os principais conceitos da lógica fuzzy, focando nas principais propriedades algébricas das implicações fuzzy;
- Revisar os fundamentos da lógica fuzzy intervalar, incluindo os conceitos e principais propriedades das implicações fuzzy intervalares;
- Revisar os fundamentos da lógica fuzzy intuicionistas, incluindo os conceitos e principais propriedades das implicações fuzzy intuicionistas;
- Realizar a análise da principais propriedades algébricas das implicações fuzzy intuicionistas intervalares;
- Definir a extensão das implicações fuzzy intuicionistas intervalares obtidas pela aplicação de funções de agregação intervalares e por pares de funções intervalares duais.
- Definir automorfismos intuicionistas intervalares e analisar as relações entre as abordagens FL, IvFL e IvIFL;
- Analisar propriedades das funções conjugadas associadas à classe de (co)implicações fuzzy intuicionistas intervalares geradas por agregadores idempotentes e pares de funções duais.

## 1.4 Motivação

Seres humanos são capazes de lidar com processos complexos baseados em conhecimentos incertos, ou imprecisos. Os sistemas fuzzy permitem modelar este conhecimento em termos linguísticos considerando a fundamentação teórica dos conjuntos fuzzy.

Esta estruturação lógico-formal dos sistemas fuzzy fornece a base para geração de técnicas poderosas para a solução de processos incertos. As primeiras aplicações bem sucedidas foram na área de controle e automação. Por estes motivos, sistemas computacionais baseados em modelos lógicos vem sendo alvo de pesquisas durante anos, devido a análise minuciosa do problema e também pela facilidade de correção de erros e de extensão destes sistemas.

Com o uso de linguagens onde o desenvolvimento dos sistemas se aproximam do raciocínio humano, contribui-se significativamente para o desenvolvimento de aplicações que auxiliam as atividades humanas, fazendo com que haja mais sistemas computadorizados, e que os mesmos sejam mais precisos e rápidos.

Atualmente, tem-se uma vasta aplicabilidade na área das engenharias, em raciocínio aproximativo, processamento de imagens, reconhecimento de padrões, sistemas operacionais, sistemas de controle e tomada de decisões, mineração de dados, planejamento e otimização, como pode ser visto em (KLIR; FOLGER, 1987; COX, 1994; ATANASSOV et al., 2003; HERRERA; MARTÍNEZ; SÁNCHEZ, 2005).

Encontra-se também aplicações envolvendo sistemas que fazem uso da FL integrada às ferramentas computacionais, por exemplo, às redes neurais e a programação evolutiva (DENGFENG; CHUNTIAN, 2002; YE, 2011; MITCHELL, 2005; WANG; XIN, 2005). Tais sistemas são caracterizados como sistemas híbridos, cuja capacidade de aprendizado amplia ainda mais as áreas de aplicação de sistemas fuzzy e motivam o estudo de novas extensões da FL.

Novas e mais abrangentes aplicações vem incentivando a modelagem da incerteza na definição da função de pertinência. E, a extensão mais imediata, não atribui apenas um número, mas um intervalo como grau de pertinência (DESCHRIJVER; KERRE, 2003).

A IvFL, em sua concepção, agrega a incerteza na função de pertinência, fundamentando o desenvolvimento de sistemas computacionais considerando ainda o tratamento da incerteza nos dados como o controle automático de erros e imprecisão nos cálculos numéricos (HICKEY; JU; EMDEM, 2001; TURKSEN, 1989).

A IFL, caracterizada pela modelagem da relação de pertinência e de não-pertinência, que não são necessariamente complementares, vem incrementando sua aplicação em sistemas especialistas (DE; BISWAS; ROY, 2001), que fazem uso de raciocínio aproximativo como no processamento de imagens, veja (BEZDEK; DUBOIS; PRADE, 1999; XU, 2009; ZADEH, 1975).

Sendo assim, a principal motivação para o desenvolvimento deste trabalho é colaborar para a integração destas abordagens lógicas, visando desenvolvimento do estudo estrito da lógica fuzzy intuicionista intervalar. Com foco nas implicações fuzzy intuicionistas intervalares e no estudo das principais propriedades destes conectivos, visto que as propriedades são necessárias quando se montam um banco de regras, devido a possibilidade de diminuir o número de regras do mesmo, por exemplo, devido a satisfazer ou não uma determinada propriedade. Neste sentido o estudo também contribui para a melhor compreensão de sistemas computacionais e a modelagem lógico formal fundamentada na IvIFL.

Considera-se também o estudo de automorfismos, pois os mesmos são utilizados na geração de novos conectivos, preservando as propriedades algébricas das classes destes conectivos lógicos.

## 1.5 Metodologia

A metodologia utilizada na realização deste trabalho se resume no desenvolvimento das tarefas descritas a seguir:

1. Revisão bibliográfica e estudo das fundamentações da lógica fuzzy intuicionista;

1.1 Estudo dos principais conceitos de IFL e das propriedades inerentes às (co)implicações fuzzy intuicionistas.

1.2 Revisão bibliográfica do índice fuzzy intuicionista e principais propriedades relacionadas;

2. Revisão bibliográfica e estudo das propriedades algébricas das implicações fuzzy intervalares;

   2.1 Estudo das representações intervalares de conectivos fuzzy;

   2.2 Estudo das representações canônica para definição de implicações fuzzy intuicionistas intervalares;

3. Análise de propriedades das implicações fuzzy intuicionistas e das implicações fuzzy intervalares;

4. Introdução da definição de (co)implicações fuzzy intuicionistas intervalares e análise da propriedades, com base nos estudos descritos anteriormente;

5. Estudo do índice fuzzy intuicionista intervalar, e das propriedades relacionadas a este conceito.

6. Estudo dos automorfismos intuicionistas intervalares e da relação entre as classes de automorfismos apresentadas nas abordagens lógicas analisadas neste trabalho.

Salienta-se ainda que as atividades de revisão bibliográfica, análise e estudo compreendem: (i) estudo individual de várias referências bibliográficas; (ii) discussões no grupo de pesquisa; (iii) redação de artigos para publicação e contribuição com a área.

## 1.6 Organização do Texto

A apresentação deste texto está organizada em seis capítulos, brevemente resumidos logo a seguir.

O Capítulo 1 é a corrente introdução, onde estão registrados a contextualização, os objetivos e a metodologia utilizada para o desenvolvimento do estudo descrito neste texto.

O Capítulo 2 apresenta um estudo sobre a IFL, descrevendo os principais conceitos, e dentre estes, ressaltam-se o estudo do índice intuicionistas e dos automorfismos intuicionistas. Considerando também as (co)implicações fuzzy intuicionistas como principais conectivos estudados neste capítulo, uma análise introdutória das principais propriedades que estendem a lógica clássica e das propriedades inerentes a lógica intuicionista é desenvolvida, seguindo de alguns exemplos.

No Capítulo 3 é apresentada uma revisão da IvFL, as funções de agregação e negação fuzzy intervalar, implicação e coimplicação fuzzy intervalar. O capítulo finaliza com a apresentação da extensão dos principais exemplos apresentados nos capítulos anteriores.

No Capítulo 4, encontra-se um estudo da IvIFL, sendo descrito os principais conceitos, focado no estudo das implicações fuzzy intuicionistas intervalares (IIvFI), bem como propriedades, demonstrações de proposições e exemplificação. Os automorfismos intuicionistas intervalares, e o estudo da relação com as demais classes de automorfismos, seguindo de alguns exemplos e a analise de algumas propriedades são também descritos.

O Capítulo 5 apresenta um estudo sobre a construção dual das IvIFIs, e algumas das principais propriedades são verificadas.

No Capítulo 6 são destacadas as principais frentes exploradas no texto, as conclusões, bem como as possibilidades de continuidade do trabalho.

# 2 (CO)IMPLICAÇÕES FUZZY INTUICIONISTAS

Os principais conceitos da IFL são aqui considerados, embasando o estudo das implicações fuzzy intuicionistas. Tais conectivos são amplamente utilizados por sistemas especialistas baseados no raciocínio aproximativo, no processamento de imagens e tomada de decisão (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004; XU; WANG, 2012; DE; BISWAS; ROY, 2001; WANG; LI; ZHANG, 2012).

Frequentemente, sistemas baseados na IFL fazem uso de implicações fuzzy intuicionistas na construção de regras de inferência fuzzy, as quais preservam as propriedades das implicações fuzzy, estendendo sistemas baseados em FL e assim introduzindo flexibilidade pelo uso de novas propriedades (ATANASSOV, 2003).

Neste contexto, conceitos relacionados aos conjuntos fuzzy intuicionistas, ao índice fuzzy intuicionista, à relação de dualidade e à função conjugada de funções complemento são primeiramente reportados. Na sequência, revisamos alguns conectivos da IFL, tais como negações, t-normas e t-conormas. E então, focamos no estudo das implicações fuzzy intuicionistas, nas principais propriedades algébricas e na extensão intuicionista das implicações fuzzy, incluindo exemplificação.

## 2.1 Conceitos da Lógica Fuzzy Intuicionistas

A teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas (ATANASSOV; GARGOV, 1989), estende a teoria dos conjuntos fuzzy, associando a cada elemento $x$ em um conjunto universo $\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \neq \emptyset$, um grau de pertinência e um grau de não-pertinência, ambos definidos no intervalo unitário pelas correspondentes expressões $(\mu_A(x))$ and $(\nu_A(x))$, e tais que a seguinte restrição natural é satisfeita:

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1. \tag{1}$$

Desta forma um conjunto fuzzy intuicionista $A$ consiste num conjunto de pares $(\mu_A, \nu_A)$, cujas componentes satisfazem a restrição natural (ATANASSOV, 1986) dada pela Eq. (1). Logo, tem-se que um **conjunto fuzzy intuicionista** $A$ é descrito de acordo com a expressão:

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in \mathcal{X} \ e \ \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1\},$$

onde $\mu_A, \nu_A : \mathcal{X} \to U$ são as funções de pertinência e de não-pertinência de um elemento $x \in \mathcal{X}$ em $A$.

A desigualdade estabelecida na Eq. (1) generaliza os conjuntos fuzzy pois a relação entre pertinência e não pertinência, não é necessariamente complementar. Ou ainda, pode-se pensar em um conjunto fuzzy como um caso especial de um conjunto fuzzy intuicionista cujo grau de não pertinência pode ser obtido através da seguinte igualdade:

$$\nu_A(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Assim, na modelagem de um sistema de regras de inferência baseado em IFL, o grau de não-pertinência $(\nu_A(x)$ associado a cada elemento $x \in \mathcal{X}$, nem sempre coincide com o complemento do grau de pertinência $\mu_A(x)$.

Logo a seguir, exemplifica-se o uso desta abordagem.

**Exemplo 1.** *Em (CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003), está descrito um procedimento de votação onde as pessoas têm de expressar seu sentimento a uma série de propostas. É óbvio que, enquanto um pode ser a favor, outro vote em desfavor de uma proposta e, da mesma maneira, podem ocorrer abstenções. Usando somente o grau de pertinência, torna-se um trabalho árduo e de difícil compreensão a separação entre um defensor e um adversário da proposta. Para tal, parece natural aplicar uma modelagem em conjuntos fuzzy intuicionistas. Nesta abordagem, flexibiliza-se a modelagem associando-se a cada proposta, o número de defensores e de adversários, permitindo que o cardinal do complemento do conjunto de defensores não seja exatamente igual ao cardinal do conjunto de adversos à proposta em votação.*

### 2.1.1 Relações de Ordem em $\tilde{U}$

Seja $\tilde{U} = \{\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U} | x_1 + x_2 \leq 1\}$ o conjunto de todos os pares de graus de pertinência e não-pertinência, respectivamente.

As seguintes relações de ordem em $\tilde{U}$ são consideradas neste trabalho, veja mais detalhes em (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003):

$$(x_1, x_2) \leq_{\tilde{U}} (y_1, y_2) \text{ se, e somente se, } x_1 \leq y_1 \text{ e } x_2 \geq y_2. \tag{2}$$

$$(x_1, x_2) \preceq_{\tilde{U}} (y_1, y_2) \text{ se, e somente se, } x_1 \leq y_1 \text{ e } x_2 \leq y_2. \tag{3}$$

Se $\tilde{0} = (0, 1)$ e $\tilde{1} = (1, 0) \in \tilde{U}$, tem-se $\tilde{0} \leq_{\tilde{U}} \tilde{x} \leq_{\tilde{U}} \tilde{1}$, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$.

### 2.1.2 Funções de Projeção de $\tilde{U}$ em $U$

As funções $l_I, r_I : \tilde{U} \to U$, denotam as respectivas projeções à esquerda e à direita, as quais estão definidas, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$, pelas expressões:

$$l_{\tilde{U}}(\tilde{x}) = l_{\tilde{U}}(x_1, x_2) = x_1; \quad \text{e} \quad r_{\tilde{U}}(\tilde{x}) = r_{\tilde{U}}(x_1, x_2) = x_2. \tag{4}$$

Considera-se $\tilde{D} = \{\tilde{x} : l_{\tilde{U}}(\tilde{x}) + r_{\tilde{U}}(\tilde{x}) = 1\}$ como o conjunto de todos os elementos diagonais em $\tilde{U}$.

Na sequência, apresenta-se algumas das principais funções da IFL, suas propriedades algébricas, exemplos e demais conceitos relacionados.

### 2.1.3 Índice Fuzzy Intuicionista

O **índice fuzzy intuicionista** de um elemento de $x$ em $\mathcal{X}$ referente a um conjunto fuzzy intuicionista $A$, indicado pela expressão $\pi_A(x)$ é também denominado de **grau de hesitação** ou ainda, **grau de indeterminação** de $x$ em $A$. De acordo com (XU; YAGER, 2009; ATANASSOV, 1999), para todo $x \in \mathcal{X}$, o índice fuzzy intuicionista de $x$ referente a $A$ está definido pela expressão:

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x). \tag{5}$$

Se $\pi_A(x) = 0$, $A$ é um conjunto fuzzy (SZMIDT; KACPRZYK, 2004).

Propriedades inerentes às implicações fuzzy intuicionistas frequentemente fazem uso do grau de hesitação, de acordo com a expressão acima.

### 2.1.4 Negação Fuzzy Intuicionista

De acordo com (CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2004), a função $\tilde{N} : \tilde{U} \to \tilde{U}$ é uma **negação fuzzy intuicionista** se satisfaz as seguintes condições:

$\tilde{N}1$ : $\tilde{N}(\tilde{0}) = \tilde{1}$ e $\tilde{N}(\tilde{1}) = \tilde{0}$;

$\tilde{N}2$ : Se $\tilde{x} \geq_{\tilde{U}} \tilde{y}$ então $\tilde{N}(\tilde{x}) \leq_{\tilde{U}} \tilde{N}(\tilde{y})$, para todo $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{U}$.

Negações fuzzy intuicionistas fortes são *negações fuzzy intuicionistas* que satisfazem a propriedade involutiva (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003):

$\tilde{N}3$ : $\tilde{N}(\tilde{N}(\tilde{x})) = \tilde{x}$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{U}$.

De acordo com (BACZYŃSKI, 2003; DESCHRIJVER; KERRE, 2005c), a negação fuzzy intuicionista $\tilde{N} : \tilde{U} \to \tilde{U}$ é forte se, e somente se, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$, existe uma negação fuzzy forte $N : U \to U$ e $N_S = 1 - x$(em anexo), tal que:

$$\tilde{N}(\tilde{x}) = (N(N_S(x_2)), (N_S(N(x_1))). \tag{6}$$

**Exemplo 1.** *A extensão intuicionista da negação padrão $N_S$ (ZADEH, 1965) é um exemplo de uma negação fuzzy intuicionista forte. Aplicando a definição da negação padrão $N_S$ na Eq.( 6), resulta na expressão:*

$$\tilde{N}_S(\tilde{x}) = (N_S(N_S(x_2)), (N_S(N_S(x_1)))) = (x_2, x_1).$$

Seja $\tilde{N}$ uma negação fuzzy intuicionista. Pelas projeções definidas em Eqs. (4a) e (4b), as funções $N_{l_{\tilde{U}}}, N_{r_{\tilde{U}}} : U \to U$ são negações fuzzy, respectivamente definidas pelas expressões:

$$N_{l_{\tilde{U}}}(x) = l_{\tilde{U}}(\tilde{N}(x, 1-x)); \qquad N_{r_{\tilde{U}}}(x) = 1 - r_{\tilde{U}}(\tilde{N}(x, 1-x)). \tag{7}$$

### 2.1.5 Relação de Dualidade entre Funções Fuzzy Intuicionistas

Seja $\tilde{N}$ uma negação fuzzy intuicionista em $\tilde{U}$. A **função intuicionista $N$-dual** de uma função $\tilde{f} : \tilde{U}^n \to \tilde{U}$ é dada pela expressão:

$$\tilde{f}_N(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = \tilde{N}(\tilde{f}(\tilde{N}(\tilde{x}_1), \ldots, \tilde{N}(\tilde{x}_n))). \tag{8}$$

Se $\tilde{N}$ é forte, $(\tilde{f}_{\tilde{N}})_{\tilde{N}} = \tilde{f}$, ou seja, $\tilde{f}$ e $\tilde{f}_{\tilde{N}}$ são funções mutuamente duais em $\tilde{U}^n$.

### 2.1.6 Automorfismos Intuicionistas

O estudo de automorfismos, se torna necessário, pois eles são utilizados na geração de novos conectivos, preservando as propriedades algébricas das classes destes conectivos lógicos. Assim, a seguir são destacados alguns conceitos básicos deste estudo.

**Definição 1.** *A função $\Phi : \tilde{U} \to \tilde{U}$ é um **automorfismo intuicionista** em $\tilde{U}$ se é bijetiva e, para todo $\tilde{x}, \tilde{y}$, tem-se que $\tilde{x} \leq_{\tilde{U}} \tilde{y}$ se, e somente se, $\Phi(\tilde{x}) \leq_{\tilde{U}} \Phi(\tilde{y})$.*

Assim como $Aut(U)$ denota o conjunto de todos os automorfismos em $U$, $Aut(\tilde{U})$ indica o conjunto de todos os automorfismos intuicionistas em $\tilde{U}$.

A ação de $\Phi \in Aut(\tilde{U})$ em uma função $f_I : \tilde{U}^n \to \tilde{U}$ é uma função $f_I^{\Phi} : \tilde{U} \to \tilde{U}$, denominada **conjugada intuicionista de** $f_I$, definida para todo $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n \in \tilde{U}$ pela expressão:

$$f_I^{\Phi}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = \Phi^{-1}(f_I(\Phi(\tilde{x}_1), \ldots, \Phi(\tilde{x}_n))). \tag{9}$$

Seja $\Phi$ um automorfismo em $\tilde{U}$. Pela Proposição 20 em (COSTA; BEDREGAL; NETO, 2011), $\Phi$ preserva os elementos diagonais em $\tilde{U}$: $\Phi[\tilde{D}] = \tilde{D}$.

### *2.1.6.1 Relação entre $Aut(\tilde{U})$ e $Aut(U)$*

A seguir, reportam-se as principais proposições estabelecendo a relação entre classes de automorfismos que atuam sobre funções em $\tilde{U}$ e $U$, considerando as funções de projeção de $\tilde{U}$ em $U$.

**Proposição 1.** *(COSTA; BEDREGAL; NETO, 2011, Teorema 17) Seja $\phi : U \to U$ um automorfismo em $U$. Então, para todo $\tilde{x} \in \tilde{U}$, $\phi$-**automorfismo intuicionista representável em** $\tilde{U}$ é uma função $\llcorner\phi\lrcorner : \tilde{U} \to \tilde{U}$ dada pela expressão:*

$$\llcorner\phi\lrcorner(\tilde{x}) \quad = \quad (\phi(l_{\tilde{U}}(\tilde{x})), 1 - \phi(1 - r_{\tilde{U}}(\tilde{x}))); \tag{10}$$

**Proposição 2.** *(COSTA; BEDREGAL; NETO, 2011, Observação 2) Para todo $\phi \in Aut(U)$, $x \in U$, o operador $\llcorner\ \lrcorner : Aut(U) \to Aut(\tilde{U})$, definido pela Eq. (10), é uma bijeção que preserva a relação de ordem $\leq_{\tilde{U}}$ em $\tilde{U}$.*

Na construção inversa, a próxima proposição mostra como automorfismos em $U$ podem ser obtidos a partir da composição de automorfismos intuicionistas em $Aut(\tilde{U})$ e funções de projeção de $\tilde{U}$ em $U$.

**Proposição 3.** *(COSTA; BEDREGAL; NETO, 2011, Proposição 21) Seja $\Phi \in Aut(\tilde{U})$ e, para todo $x \in U$, $\Phi_{l_{\tilde{U}}}, \Phi_{r_{\tilde{U}}} : U \to U$ são funções dadas por*

$$\Phi_{l_{\tilde{U}}}(x) = l_{\tilde{U}}(\Phi(x, 1-x)), \quad \text{e} \quad \Phi_{r_{\tilde{U}}}(x) = 1 - r_{\tilde{U}}(\Phi(x, 1-x), \tag{11}$$

*Então, tem-se que $\Phi_l, \Phi_r$ são ambos automorfismos em $U$ tais que $\Phi_{r_{\tilde{U}}} = \Phi_{l_{\tilde{U}}}$.*

A seguir, as composições $\llcorner\ \lrcorner \circ l_{\tilde{U}}$ e $l_{\tilde{U}} \circ \llcorner\ \lrcorner$ são funções que preservam os automorfismos em $\tilde{U}$ e $U$.

**Proposição 4.** *(COSTA; BEDREGAL; NETO, 2011, Teorema 18, Corolário 19) Sejam $\llcorner\phi\lrcorner : \tilde{U} \to \tilde{U}$ e $\llcorner\Phi_{l_U}\lrcorner : \tilde{U} \to \tilde{U}$ automorfismos intuicionistas representáveis a partir de $\phi, \Phi_{l_U} : U \to U$, respectivamente. Considerando a função de projeção à esquerda $l_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$, para ambas composições $\llcorner\Phi_{l_U}\lrcorner : \tilde{U} \to \tilde{U}$ e $\llcorner\phi\lrcorner_{l_{\tilde{U}}} : U \to U$, tem-se, as correspondentes igualdades:*

$$\llcorner\Phi_{l_U}\lrcorner = \Phi \quad \textit{and} \quad \llcorner\phi\lrcorner_{l_{\tilde{U}}} = \phi. \tag{12}$$

*Construções análogas podem ser obtidas ao considerar a projeção $r_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$.*

Dado um automorfismo $\phi$ e uma negação fuzzy $N$, a conjugada de $N$:

$$N^{\phi}(x) = \phi^{-1}(N(\phi(x))), \tag{13}$$

e tal que $N^{\phi} \in Aut(U)$. De forma análoga, seja $\tilde{N}$ uma negação fuzzy intuicionista e $\Phi$ um automorfismo intuicionista. De acordo com o Teorema 29 em (BEDREGAL, 2010), a função $\tilde{N}^{\Phi}$, conjugada intuicionista de $\tilde{N}$, é uma negação fuzzy intuicionista, e para todo $x \in \tilde{U}$, tem-se que:

$$\tilde{N}^{\Phi}(\tilde{x}) = \Phi^{-1}(\tilde{N}(\Phi(\tilde{x}))). \tag{14}$$

Assim, denotando-se por $\mathcal{C}(N)$ e $\mathcal{C}(\tilde{N})$ as classes de negações fuzzy e negações fuzzy intuicionistas, respectivamente, tem-se que os principais resultados estudados nesta sessão estão resumidos no diagrama comutativo da Figura 2.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\tilde{N}) \times Aut(\tilde{U}) \arrow[r, "Eq.(14)"] \arrow[d, shift right, "Eqs.(7a)(7b)(6)"'] & \mathcal{C}(\tilde{N}) \arrow[d, shift left, "Eqs.(7a)(7b)(6)"] \\
\mathcal{C}(N) \times Aut(U) \arrow[r, "Eq.(13)"] \arrow[u, shift right, "Eq.(10)"'] & \mathcal{C}(N) \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

Figura 2: Relações entre $\mathcal{C}(\tilde{N})$ and $\mathcal{C}(N)$ nas famílias $Aut(\tilde{U})$ and $Aut(U)$.

## 2.2 Funções de Agregação Fuzzy Intuicionistas

De acordo com (DESCHRIJVER; KERRE, 2005c), o principal significado de uma função de agregação na FL é associar um único número real em $U$ a qualquer $n$-tupla de números reais em $U^n$, tal que esta função é não-decrescente, comutativa, e ainda, preservando as condições de contorno referente aos extremos do intervalo unitário ( coincide com a função identidade, quando a $n$-tupla é unária).

Uma função de *agregação* binária $\tilde{M} : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ satisfaz as seguintes propriedades (BACZYŃSKI, 2003):

**$\tilde{A}1$:** $\tilde{M}(\tilde{0}, \tilde{0}) = \tilde{0}$ e $\tilde{M}(\tilde{1}, \tilde{1}) = \tilde{1}$;

**$\tilde{A}2$:** Se $\tilde{x} \leq \tilde{z}$ então $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{M}(\tilde{z}, \tilde{y})$, $\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$;

**$\tilde{A}3$:** $\tilde{M}(x, y) = \tilde{M}(y, x)$, $\forall x, y \in U$.

Funções de agregações que satisfazem a propriedade $A4$,

**$\tilde{A}4$:** $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{x}$, $\forall \tilde{x} \in \tilde{U}$ (idempotência),

são chamadas de **funções de agregação idempotentes**.

**Exemplo 2.** *Sejam as funções de agregação (VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2012, Exemplo 1)*$\wedge_{\tilde{U}}, \vee_{\tilde{U}} : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$, *definidas para todo* $\tilde{x} = (x_1, x_2)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, *pelas expressões:*

$$\vee_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\vee_U(x_1, x_2), \wedge_U(y_1, y_2)); \tag{15}$$
$$\wedge_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\wedge_U(x_1, x_2), \vee_U(y_1, y_2)), \tag{16}$$

*respectivamente. Se $\tilde{M}$ é uma função de agregação idempotente, tem-se que:*

$$\wedge_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \vee_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}),\ \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{U}.$$

### 2.2.1 T-normas e T-conormas Fuzzy Intuicionistas

Funções de agregação que qualificam as intersecções fuzzy intuicionista e uniões fuzzy intuicionista são também referidas na literatura como t-normas e t-conormas intuicionistas, respectivamente.

#### *2.2.1.1 Normas Triangulares Intuicionista*

**Definição 1.** *Em (BACZYŃSKI, 2003) uma **norma triangular intuicionista** (t-norma) é uma função $\tilde{T} : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$, satisfazendo as seguintes propriedades, para todo $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$:*

**$\tilde{T}1$:** $T(\tilde{x}, \tilde{y}) = T(\tilde{y}, \tilde{x})$ *(Comutatividade);*

$\tilde{T}2$: $T(\tilde{x}, T(\tilde{y}, \tilde{z})) = T(T(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z})$ *(Associatividade);*

$\tilde{T}3$: $T(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq T(\tilde{z}, \tilde{y})$, *se* $\tilde{x} \leq \tilde{z}$ *(Monotonicidade);*

$\tilde{T}4$: $T(\tilde{x}, \tilde{1}) = \tilde{x}$ *(Elemento neutro).*

#### 2.2.1.2 Conormas Triangulares Intuicionistas

**Definição 2.** *Uma* ***conorma triangular intuicionista*** *(t-conorma) é uma função* $\tilde{S} : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$*, satisfazendo as seguintes propriedades, para todo* $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$*:*

$\tilde{S}1$: $S(\tilde{x}, \tilde{y}) = S(\tilde{y}, \tilde{x})$ *(Comutatividade);*

$\tilde{S}2$: $S(\tilde{x}, S(\tilde{y}, \tilde{z})) = S(S(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z})$ *(Associatividade);*

$\tilde{S}3$: $S(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq S(\tilde{z}, \tilde{y})$ *se* $\tilde{x} \leq \tilde{z}$ *(Monotonicidade);*

$\tilde{S}4$: $S(\tilde{x}, \tilde{0}) = \tilde{x}$ *(Elemento neutro).*

A Proposição (5) reporta uma representação para t-normas e t-conormas apresentada em (DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004) e (CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2004).

**Proposição 5.** *(BACZYŃSKI, 2003, Lema 1) Se* $(S)T$ *é uma t-(co)norma tal que, para todo* $\forall x, y \in U$, $T(x, y) \leq N_S(S(N_S(x), N_S(y)))$*, então as funções* $(\tilde{S})\tilde{T}$ *definidas por:*

$$\tilde{T}((x1, x2), (y1, y2)) = (T(x1, y1), S(x2, y2)) \quad (17)$$
$$\tilde{S}((x1, x2), (y1, y2)) = (S(x1, y1), T(x2, y2)) \quad (18)$$

*é uma* ***t-(co)norma fuzzy intuicionista representável.***

*Nos casos apresentados na Proposição. (5), de acordo com (DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004),* $\tilde{T}$ e $\tilde{S}$ *são* ***t-representáveis*** *por pares (T,S) e (S,T), respectivamente.*

## 2.3 Implicações e Coimplicações Fuzzy Intuicionistas obtidas por Agregadores e Funções Duais

Na literatura, encontram-se diversas definições para as implicações fuzzy intuicionistas, veja (BACZYŃSKI, 2007; LIN; XIA, 2006; MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2008; BEDREGAL et al., 2010; BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009), assim como encontram-se diferentes formas de realizar a construção dual (coimplicações fuzzy intuicionistas) (LIN; XIA, 2006). Entretanto, o consenso mostra dentre as definições existentes que as (co)implicações fuzzy intuicionistas estendem o comportamento das (co)implicações fuzzy, (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004).

Na construção dos sistemas de inferência fuzzy, as implicações interpretam o grau de verdade de uma regra baseada na expressão condicional "$p \Rightarrow q$". Analogamente, tem-se as coimplicações interpretando o grau de não verdade da mesma regra. Sejam o grau de pertinência $(x_1, y_1)$ e o grau de não-pertinência $(x_2, y_2)$ de um elemento $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{U}^2$. Neste caso o grau de pertinência não é necessariamente igual ao complemento do grau de não-pertinência, o que é estabelecido pela expressão $x_1 \leq N_S(x_2)$ e $y_1 \leq N_S(y_2)$. Esta interpretação baseada no lógica fuzzy intuicionista torna mais ampla a representação, modelando a incerteza entre o totalmente verdadeiro $(1)$ e o totalmente falso $(0)$, considerando ambos, os graus de pertinência e de não pertinência.

### 2.3.1 Propriedades de (Co)-Implicações Fuzzy Intuicionistas

A seguir são consideradas a extensão fuzzy intuicionista para as principais propriedades das (co)implicações fuzzy, as quais são relevantes para as diferentes formas de definição de (co)implicações fuzzy intuicionistas.

**Definição 2.** *Uma **(co)implicação fuzzy intuicionista** $(J_I)I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma função binária satisfazendo as seguintes condições de contorno:*

$\mathbf{I}_I\mathbf{1}$ $I_I(\tilde{0},\tilde{0}) = I_I(\tilde{0},\tilde{1}) = I_I(\tilde{1},\tilde{1}) = \tilde{1}$ *e* $I_I(\tilde{1},\tilde{0}) = \tilde{0}$;

$\mathbf{J}_I\mathbf{1}$ $J_I(\tilde{0},\tilde{0}) = J_I(\tilde{1},\tilde{0}) = J_I(\tilde{1},\tilde{1}) = \tilde{0}$ *e* $J_I(\tilde{0},\tilde{1}) = \tilde{1}$;

A Definição (2) se reduz a uma (co)implicação quando $\tilde{x} = (x_1, x_2)$ e $\tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, tais que $x_1 = N_S(x_2)$ e $y_1 = N_S(y_2)$ (ATANASSOV; GARGOV, 1989).

A seguir, são definidas as (co)implicações fuzzy intuicionistas no sentido de J. Fodor e M. Roubens (FODOR; ROUBENS, 1994). Veja também (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Definição 3).

**Definição 3.** *Uma (co)implicação fuzzy intuicionista $(J_I)I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ satisfaz, para todo $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$, as seguintes propriedades:*

$\mathbf{I}_I\mathbf{2}$ $\tilde{x} \leq \tilde{z} \Rightarrow I_I(\tilde{x},\tilde{y}) \geq I_I(\tilde{z},\tilde{y})$; $\mathbf{J}_I2$ $\tilde{x} \leq \tilde{z} \Rightarrow J_I(\tilde{x},\tilde{y}) \geq J_I(\tilde{z},\tilde{y})$;

$\mathbf{I}_I\mathbf{3}$ $\tilde{y} \leq \tilde{z} \Rightarrow I_I(\tilde{x},\tilde{y}) \leq I_I(\tilde{x},\tilde{z})$; $\mathbf{J}_I3$ $\tilde{y} \leq \tilde{z} \Rightarrow J_I(\tilde{x},\tilde{y}) \leq J_I(\tilde{x},\tilde{z})$;

$\mathbf{I}_I\mathbf{4}$ $I_I(\tilde{0},\tilde{y}) = \tilde{1}$; $\mathbf{J}_I4$ $J_I(\tilde{1},\tilde{y}) = \tilde{0}$;

$\mathbf{I}_I\mathbf{5}$ $I_I(\tilde{x},\tilde{1}) = \tilde{1}$; $\mathbf{J}_I5$ $J_I(\tilde{x},\tilde{0}) = \tilde{0}$;

A seguir, as propriedades inerentes às implicações fuzzy intuicionistas consideradas neste estudo, que é fortemente fundamentado nos resultados apresentados em (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004).Para quaisquer $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, tem-se que:

$\mathbf{I}_I\mathbf{6}$ $\pi_{I_I(\tilde{x},\tilde{y})} \leq \pi_{I((N_S(x_2),y_1),I_N(x_1),N_S(y_2))}$;

$\mathbf{I}_I\mathbf{7}$ $I_I(\tilde{x},\tilde{y}) \succeq (I(N_S(x_2),y_1), I_N(N_S(x_1),y_2))$;

$\mathbf{I}_I\mathbf{8}$ $\pi_{I_I(\tilde{x},\tilde{y})} \leq \vee(N_S(x_1), N_S(y_1))$;

$\mathbf{I}_I\mathbf{9}$ Se $\tilde{x} = \tilde{y}$ então $\pi_{I_I(\tilde{x},\tilde{y})} = \pi_{\tilde{x}}$;

$\mathbf{I}_I\mathbf{10}$ Se $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$ então $\pi_{I_I(\tilde{x},\tilde{y})} = \pi_{\tilde{x}}$; e

$\mathbf{I}_I\mathbf{11}$ Se $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{U},$ tais que $x_1 + x_2 = 1$ e $y_1 + y_2 = 1$ então $\pi_{I_I(\tilde{x},\tilde{y})} = 0$.

Em (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Definição 3), a definição proposta por J. Fodor e M. Roubens (FODOR; ROUBENS, 1994) para uma implicação fuzzy é estendida contemplando a abordagem fuzzy intuicionista. Nesta abordagem, uma implicação fuzzy intuicionistas $I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma função que satisfaz as propriedades $I_I2$, $I_I3$,$I_I4$, $I_I5$ e $I_I11$, incluindo condições de contorno $I0$.

Segundo (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004), o objetivo principal no estudo de propriedades inerentes às implicações fuzzy intuicionistas, é encontrar propriedades características dos operadores de implicação fuzzy intuicionista que não são extensão do caso fuzzy. Investigam-se então estas propriedades, visto que as mesmas também podem ser utilizadas em aplicações de processos de raciocínio aproximativo baseado na IFL.

### 2.3.2 Implicações Fuzzy Intuicionistas Obtidas a partir de Agregadores e do Princípio da Dualidade

Encontram-se diversos trabalhos sobre formas de representação de implicações e suas propriedades (LIN; XIA, 2006; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2004; BACZYŃSKI, 2007).

Este trabalho considera a forma de representação proposta por (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004), utilizando a negação padrão, funções de agregação idempotente e pares de funções duais para a obtenção de uma classe especial de implicações fuzzy intuicionistas, denotada $\mathcal{C}(I_I)$.

Esta sessão estuda a classe onde uma implicação fuzzy intuicionista $I_I$ gerada por um conjunto finito $\mathcal{M}$ de funções de agregação e por um par de funções mutuamente duais $(I, I_N)$, no caso, uma implicação fuzzy $I$ (FODOR; ROUBENS, 1994) e sua correspondente coimplicação fuzzy $I_N$, obtida a partir de uma negação forte $N$.

**Proposição 6.** *(BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Proposição 3) Seja $I$ uma implicação fuzzy, $I_N$ a coimplicação associada com a implicação $I$ obtida a partir da negação forte $N$ e $\mathcal{M} = \{M_i : U^2 \to U : i \in \{1,2,3,4\}\}$ um conjunto de funções de agregação idempotentes satisfazendo, para todo $x, y \in U$, as seguintes condições:*

$$M_1(x,y) + M_3(N_S(x), N_S(y)) \geq 1; \qquad M_2(x,y) + M_4(N_S(x), N_S(y)) \leq 1. \quad (19)$$

*Então, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, a função binária $I_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ é uma IFI (de acordo com a Definição 3) dada por:*

$$(l_{\tilde{U}} \circ I_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) = I(M_1(x_1, N_S(x_2)), M_2(y_1, N_S(y_2))); \quad (20)$$

$$(r_{\tilde{U}} \circ I_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) = I_N(M_3(N_S(x_1), x_2), M_4(N_S(y_1), y_2)). \quad (21)$$

### 2.3.3 Construção Dual das Implicações Fuzzy Intuicionistas

Como primeira contribuição deste trabalho, esta sessão introduz a construção dual da (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Proposição 3), apresentando uma classe especial de coimplicações fuzzy intuicionistas, indicada por $\mathcal{C}(J_I)$. Nesta classe, cada coimplicação fuzzy intuicionista $J_I$ é obtida por composições definidas entre $\mathcal{M}$, um conjunto de funções de agregação idempotentes, e um par de funções mutuamente duais $(J, J_N)$, no caso, uma coimplicação fuzzy intuicionista $J$ e sua correspondente implicação fuzzy intuicionista $J_N$.

Enquanto as implicações fuzzy consistem em extensões da lógica Booleana para as implicações clássicas ($p \Rightarrow q$, significando que $p$ é suficiente para deduzir $q$) as coimplicações fuzzy são extensões da lógica Booleana para as coimplicações clássicas ($p \not\Leftarrow q$, significando que $p$ não é necessário para deduzir $q$) (BACZYńSKI, 2004; BACZYŃSKI; JAYARAM, 2008b; BACZYńSKI; JAYARAM, 2007). Mostraremos na sequência, a dualidade entre coimplicações fuzzy intuicionistas intervalares e implicações fuzzy intuicionistas intervalares.

Esta construção dual considera as Definições 3 e 2, para obter uma correspondente coimplicação fuzzy intuicionista $J_I$.

**Proposição 7.** *(VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2012, Proposição 2) Seja $J$ uma coimplicação fuzzy, $J_N$ a implicação fuzzy associada à $J$ obtida pela negação forte $N$ e*

$\mathcal{M} = \{M_i : U^2 \to U | i \in \{1,2,3,4\}\}$ *o conjunto de funções de agregação idempotentes, satisfazendo para todo* $x, y \in \tilde{U}$*, as seguintes condições:*

$$M_1(x,y) + M_3(N_S(x), N_S(y)) \geq 1; \qquad M_2(x,y) + M_4(N_S(x), N_S(y)) \leq 1. \quad (22)$$

*Então, para todo* $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$*, a função binária* $J_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ *é uma coimplicação fuzzy intuicionista cujas projeções são dadas pela seguinte expressões:*

$$(l_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) = J(M_3(x_1, N_S(x_2)), M_4(y_1, N_S(y_2))); \quad (23)$$
$$(r_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) = J_N(M_1(N_S(x_1), x_2), M_2(N_S(y_1), y_2)). \quad (24)$$

**Prova.** *Considere que* $J$ *é uma coimplicação fuzzy e* $J_N$ *uma implicação fuzzy segundo as correspondentes definições apresentada em (FODOR; ROUBENS, 1994). Primeiramente, prova-se que* $J_I$ *está bem definida. Para todo* $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$*, sejam as funções de agregação idempotentes* $M_1, M_2, M_3, M_4$*, tais que:*

$$\begin{cases} M_1(N_S(x_1), x_2) \geq N_S(M_3(x_1, N_S(x_2))) \\ M_2(N_S(y_1), y_2) \leq N_S(M_4(y_1, N_S(y_2))) \end{cases}$$

*Baseando-se nas Definições 2 e 3 e propriedades* $A4$*,* $J2$ *e* $J3$*, tem-se que:*

$$\begin{aligned} J_I(\tilde{x}, \tilde{y}) &= J_N(N_S(M_3(x_1, N_S(x_2))), N_S(M_4(y_1, N_S(y_2)))) \\ &\geq J_N(M_1(N_S(x_1), x_2), M_2(N_S(y_1), y_2)). \end{aligned}$$

*Pela construção* $N-$*dual, Eq.(8), a equação a seguir é obtida:*

$$\begin{aligned} J_I(\tilde{x}, \tilde{y}) &= N_S(J_N(N_S(M_3(x_1, N_S(x_2))), N_S M_4(y_1, N_S(y_2)))) \\ &\leq N_S(J_N(M_1(N_S(x_1), x_2)), M_2(N_S(y_1), y_2))). \end{aligned}$$

*Portanto, segue que:*

$$\begin{aligned} J(M_3(x_1, N_S(x_2)) &, M_4(y_1, N_S(y_2))) \\ &\leq J_N(M_1(N_S(x_1), x_2), M_2(N_S(y_1), y_2))); \\ J(M_3(x_1, N_S(x_2)) &, M_4(y_1, N_S(y_2))) \\ &+ J_N(M_1(N_S(x_1), x_2), M_2(N_S(y_1), y_2))) \leq 1. \end{aligned}$$

*Assim,* $J_I$ *está bem definida. Agora, para* $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$*, tem-se que:*

$J_I$**2** *Assumindo que* $\tilde{x} \leq \tilde{z}$ *e pelas propriedades* $A2$ *e* $N2$*, ambas inequações logo a seguir são verificadas:*

$$M_1(x_1, N_S(x_2)) \leq M_1(z_1, N_S(z_2)); \quad M_3(N_S(x_1), x_2) \geq M_3(N_S(y_1), y_2).$$

*Além disso,* $J$ *e* $J_N$ *verificam* $J2$ *e* $I2$*, respectivamente. Então, segue que:*

$$\begin{aligned} (l_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) &= J(M_3(x_1, N_S(x_2), M_4(y_1, N_S(y_2)))) \\ &\geq J(M_3(z_1, N_S(z_2)), M_4(y_1, N_S(y_2))) = (l_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{z}, \tilde{y}); \text{ e} \\ (r_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) &= J_N(M_1(x_1, N_S(x_2)), M_2(y_1, N_S(y_2))) \\ &\geq J_N(M_1(N_S(z_1), z_2), M_2(N_S(y_1), y_2)) = (r_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{z}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

*Portanto,* $J_I$ *verifica* $J_I 2$*, a antitonicidade no primeiro argumento.*

$J_I$**3** *Considerando que* $\tilde{y} \leq \tilde{z}$, *pela isotonicidade dos operadores de agregação* $M_2$ *e* $M_4$, *tem-se que*

$$M_2(y_1, N_S(y_2)) \leq M_2(z_1, N_S(z_2)); \;\; M_4(N_S(y_1), y_2) \geq M_4(N_S(z_1), z_2).$$

*E, desde que* $J$ *e* $J_N$ *verificam* $J3$ *e* $I3$, *respectivamente. Assim, segue que:*

$$\begin{aligned}(l_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) &= J(M_3(x_1, N_S(x_2)), M_4(y_1, N_S(y_2))) \\ &\leq J(M_3(x_1, N_S(x_2)), M_4(z_1, N_S(z_2)) = (l_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{z}); \quad \textit{e} \\ (r_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) &= J_N(M_3(N_S(x_1), x_2), M_4(N_S(y_1), y_2)) \\ &\leq J_N(M_3(N_S(y_1), y_2), M_4(N_S(z_1), z_2))) = (r_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{z}).\end{aligned}$$

*Portanto,* $J_I$ *verifica* $J_I3$, *a isotonicidade no segundo argumento.*

$J_I$**4** *Uma vez que* $J$ *e* $J_N$ *verificam* $J4$ *e* $I4$, *obtém-se que:*

$$\begin{aligned}(l_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{1}, \tilde{y}) = J(M_3(1,1), M_4(y_1, N_S(y_2))) &= J(1, M_4(y_1, N_S(y_2)) = 0; \\ (r_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{1}, \tilde{y}) = J_N(M_1(0,0), M_2(N_S(y_1), y_2))) &= J_N(0, M_2(N_S(y_1), y_2))) = 1.\end{aligned}$$

*Portanto,* $J_I(\tilde{1}, \tilde{y}) = \tilde{1}$ *e assim,* $J_I$ *verifica* $J_I4$

$J_I$**5** *Por* $I5$ *e* $J5$ *garantida na Definição em (FODOR; ROUBENS, 1994), segue que:*

$$\begin{aligned}(l_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{0}) = J(M_3(x_1, N_S(x_2)), M_4(0,0))) &= J(M_3(x_1, N_S(x_2)), 0) = 0, \\ (r_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{0}) = J_N(M_1(N_S(x_1), x_2), M_2(1,1)) &= J_N(M_1(N_S(x_1), x_2), 1) = 1.\end{aligned}$$

*Portanto,* $J_I(\tilde{x}, \tilde{0}) = \tilde{0}$, *e tem-se que* $J_I(\tilde{x}, \tilde{0}) = \tilde{0}$.

*É fácil verificar que* $\mathbf{J}_I$ *também satisfaz a condição de contorno:*

$$J_I(\tilde{0}, \tilde{1}) = (J(0,1), J_N(1,0)) = (1,0) = \tilde{1}. \tag{25}$$

*Portanto, pela Definição 3, pode-se concluir que* $J_I$ *é uma IFC.*

□

**Proposição 8.** *Seja* $N_I = N_{SI}$ *e* $I_I(J_I) : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ *uma (co)implicação fuzzy intuicionista satisfazendo as condições da Proposição 7. Então, o operador* $N_I-$*dual de* $I_I$ $(J_I)$ *é denotado por* $(I_I)_{N_I}(I_{I_{NI}})_{N_I}) : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ *e definido como:*

$$(I_I)_{N_I}(\tilde{x}, \tilde{y}) = N_I(I_I(N_I(x), N_I(Y))) \tag{26}$$
$$(J_I)_{N_I}(\tilde{x}, \tilde{y}) = N_I(J_I(N_I(x), N_I(Y))) \tag{27}$$

**Prova.** *Tomando* $N = N_S$ *e baseados na Eqs. (20) e (21) na Prop. (6), e Eq. (26) tem-se que:*

$$\begin{aligned}(I_I)_{N_I}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= N_{I_S}(I_I(N_{I_S}(\tilde{x}), N_{I_S}(\tilde{y}))) \\ &= N_{I_S}(I_I((x_2, x_1), (y_2, y_1)) \\ &= N_{I_S}(I(M_1(x_2, N_S(x_1)), M_2(y_2, N_S(y_1))), I_N(M_3(N_S(x_2), x_1), M_4(N_S(y_2), y_1)))), \\ &= (J(M_3(N_S(x_2), x_1), M_4(N_S(y_2), y_1)))), J_N(M_1(x_2, N_S(x_1)), M_2(y_2, N_S(y_1))))\end{aligned}$$

*Assim, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, a função binária $(I_I)_{N_I} : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$, cujas propriedades podem ser definidas como:*

$$(l_{\tilde{U}} \circ (I_I)_{N_I}) = I_N(M_3(N_S(x_2), x_1), M_4(N_S(y_2), y_1))); \tag{28}$$

$$(r_{\tilde{U}} \circ (I_I)_{N_I}) = I(M_1(x_2, N_S(x_1)), M_2(y_2, N_S(y_1)); \tag{29}$$

*é a correspondente IFC de uma IFI $I_I$.* □

Considerando que $\mathcal{C}(M)$ denota a classe de funções de agregação idempotentes, o diagrama comutativo apresentado na Figura 3 resume o relacionamentos entra as classes de (co)implicações fuzzy intuicionistas estudas nesta sessão.

Para tal, utiliza-se a notação: (i) $\mathcal{C}(I)$ e $\mathcal{C}(J)$ para as classes de implicações e coimplicações fuzzy intuicionistas; e ainda, (ii) $\mathcal{C}(I_N)$ e $\mathcal{C}(J_N)$ para as respectivas construções $N_I$-duais.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I_N) \times \mathcal{C}(M) \arrow[r, "Eqs.\ (20)(21)"] \arrow[d, "Eqs.(108)(109)"'] & \mathcal{C}(I_I) \arrow[d, "Eq.(26)"] \\
\mathcal{C}(J) \times \mathcal{C}(J_N) \times \mathcal{C}(M) \arrow[r, "Eqs.\ (23)(24)"] & \mathcal{C}(I_{I_{N_I}})
\end{tikzcd}$$

Figura 3: Relações sobre classes de FI e classes de IFI e suas contruções duais.

### 2.3.4 Interpretação da Regra Condicional Fuzzy Intuicionista

Considere $\tilde{U}$, $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) | x \in \mathcal{X}\}$ e $\tilde{B} = \{(y, \mu_B(y), \nu_B(y)) | y \in \mathcal{Y}\}$ são IFSs, tal que, para todo $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$ deve verificar a condição dada pela Eq. (1).

Baseado nas funções de pertinência e de não-pertinência $\mu_A, \nu_A : \mathcal{X} \to \tilde{U}$ e $\mu_B, \nu_B : \mathcal{Y} \to \tilde{U}$, ambos componentes dos respectivos pares $(\mu_A(x), 1 - \nu_A(x))$ e $(\mu_B(y), 1 - \nu_B(y))$ denotam o grau de pertinência de $x \in \mathcal{X}$ e de $y \in \mathcal{Y}$ nos IFSs $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$, respectivamente.

De acordo com (BUSTINCE; BARRENECHEA; PAGOLA, 2008), uma abordagem consolidada para interpretação da regra condicional e que considera ambos graus de pertinência e ambos graus de não pertinência acima mencionados é a aplicação de operadores de agregação. Tais operadores podem ser ponderados ou compensatórios, como médias (aritmética, ponderada, OWA operador, média quase-aritmética), somas (soma aritmética) e, os conectivos t-normas e t-conormas.

Sendo $M_1, M_2 : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ funções de agregação, tem-se então que $M_1(\mu_A(x), 1 - \nu_A(x))$ e $M_2(\mu_B(y), 1 - \nu_B(y))$ interpretam o grau de verdade, da proposição "x é $\tilde{A}$" e "y é $\tilde{B}$", respectivamente. Assim, em IFL, quando $x$ e $y$ são variáveis em $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ respectivamente, a regra condicional fuzzy

$$R : \text{Se } x \text{ é } \tilde{A} \text{ então } y \text{ é } \tilde{B}, \tag{30}$$

pode ser definida por uma IFI $I_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$. E, neste contexto, o grau de verdade da regra $R$(30) é interpretado por:

$$(l_{\tilde{U}} \circ I_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) = I(M_1(\mu_A(x), N_S(\nu_A(x)), M_2(\mu_B(y), N_S(\nu_B(y))). \tag{31}$$

Similarmente, $M_3(1-\mu_A(x), \nu_A(x))$ e $M_4(1-\mu_B(y), \nu_B(y))$ indicam o grau de não verdade das proposições "$x$ é $\tilde{A}$" e "$y$ é $\tilde{B}$", respectivamente. Assim, o grau de não verdade da regra condicional $R$(30) é interpretado pela expressão:

$$(r_{\tilde{U}} \circ I_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) = I_N(M_3(N_S(\mu_A(x)), \nu_A(x)), M_4(N_S(\mu_B(y)), N_S(\nu_B(y))). \quad (32)$$

Preservando a condição da Eq. (1) tanto para $x$ quanto para $y$, verifica-se a correspondência entre $\tilde{U} \times \tilde{U}$ e $\tilde{U}$ definidas pelas Eqs. (31) e (32) :

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \longrightarrow I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = ((l_{\tilde{U}} \circ I_I)(\tilde{x}, \tilde{y}), (r_{\tilde{U}} \circ I_I)(\tilde{x}, \tilde{y})).$$

Esta relação está representada no diagrama comutativo da Figura 4.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "l_{\tilde{U}} \circ I_I"'] \arrow[d, shift left, "r_{\tilde{U}} \circ I_I"] \arrow[dr] & \\
\tilde{U} \times \tilde{U} \arrow[r, "I_N"] & \tilde{U} & \tilde{U} \times \tilde{U} \arrow[l, "I"']
\end{tikzcd}$$

Figura 4: Interpretação da Regra Condicional em $\tilde{U}$ baseada em uma IFI.

Na construção dual, baseado em uma IFC $J_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$, a não verdade da regra $R$(30) pode ser interpretada por:

$$(l_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) = J(M_3(\mu_A(x), N_S(\nu_A(x)), M_4(\mu_B(y), N_S(\nu_B(y))). \quad (33)$$

Similarmente, o grau de verdade da regra condicional $R$ (30) é interpretada por uma função $N-$dual de uma coimplicação fuzzy intuicionista, definida pela seguinte expressão:

$$(r_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) = J_N(M_1(N_S(\mu_A(x)), \nu_A(x)), M_2(N_S(\mu_B(y)), N_S(\nu_B(y))). \quad (34)$$

Preservando as condiçòes apresentadas na Eq. (1) e pelas projeções dadas nas Eqs (33) e (34), tem-se a seguinte correspondência:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \longrightarrow J_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (l_{\tilde{U}} \circ J_I)(\tilde{x}, \tilde{y}), r_{\tilde{U}} \circ J_I(\tilde{x}, \tilde{y}))$$

O diagrama comutativo da Figura 5 mostra um resumo dos resutados descritos nas Eqs. (33) e (34).

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "r_{\tilde{U}} \circ J_I"'] \arrow[d, shift left, "l_{\tilde{U}} \circ J_I"] \arrow[dr] & \\
\tilde{U} \times \tilde{U} \arrow[r, "J_N"] & \tilde{U} & \tilde{U} \times \tilde{U} \arrow[l, "J"']
\end{tikzcd}$$

Figura 5: Interpretação da Regra Condicional em $\tilde{U}$ baseada em uma IFC.

### 2.3.5 Exemplificação

Concluindo este capítulo, algumas das principais extensões intuicionistas das implicações fuzzy são apresentadas, veja mais detalhadamente em (LIN; XIA, 2006) e (VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2011).

Nesta exemplificação é considerada a seguinte notação: $\vee_{\tilde{U}}$ como a operação de máximo dada pela Eq. (15) e $\wedge_{\tilde{U}}$ para a operação de mínimo dada pela Eq. (16).

As propriedades satisfeitas pelas implicações fuzzy intuicionistas descritas na Tabela 1 estão apresentadas na Tabela 2.

| | Implicação Fuzzy Intuicionista |
|---|---|
| KD-Kleene-Dienes: | $I_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (x_2 \vee y_1, x_1 \wedge y_2)$ |
| RC-Reichenbach: | $I_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (x_2 + y_1 - x_2y_1, x_1y_2)$ |
| LZ-Łukasiewicz: | $I_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (1 \wedge (x_2 + y_1), 0 \vee (x_1 + y_2 - 1))$ |
| Zadeh: | $I_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (x_2 \vee ((1 - x_2) \wedge y_1, x_1 \wedge ((1 - x_1) \vee y_2))$ |
| P.C.: | $I_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (y_1 - y_1x_2, 1 - x_1 + x_1y_2)$ |
| B.C.: | $I_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (0 \vee (y_1 - x_2), 1 \wedge (1 - x_1 + y_2))$ |
| P.D.: | $I_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (1 - x_2 + x_2y_1, y_2 - y_2x_1)$ |
| B.D.: | $I_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (1 \wedge (1 - x_2 + y_1), 0 \vee (y_2 - x_1))$ |

Tabela 1: Implicações Fuzzy Intuicionistas

| | $I_I1$ | $I_I2$ | $I_I3$ | $I_I4$ | $I_I5$ | $I_I6$ | $I_I7$ | $I_I8$ | $I_I9$ | $I_I10$ | $I_I11$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| KD: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | x | ✓ | ✓ | ✓ |
| RC: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| LZ: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| ZH: | ✓ | x | x | ✓ | ✓ | x | x | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| P.C.: | ✓ | x | ✓ | x | x | x | x | ✓ | x | x | ✓ |
| B.C.: | ✓ | x | ✓ | x | x | x | x | ✓ | x | x | ✓ |
| P.D.: | x | x | ✓ | ✓ | x | x | x | ✓ | x | x | ✓ |
| B.D.: | x | x | ✓ | ✓ | x | x | x | ✓ | x | x | ✓ |

Tabela 2: Propriedades Satisfeitas pelas Implicações Fuzzy Intuicionistas

De forma análoga à exemplificação acima, obteve-se as correspondentes coimplicações fuzzy intuicionistas na Tabela 3. Considerando a construção dual das propriedades, a Tabela 4 estendendo os estudos apresentados em (LIN; XIA, 2006).

## 2.4 Considerações Finais

O estudo dos fundamentos da IFL é essencial para algumas aplicações computacionais, como a área de processamento de imagens, veja (BEZDEK; DUBOIS; PRADE, 1999; XU, 2009; ZADEH, 1975). A breve descrição de implicações e coimplicações geradas por funções de agregação e funções duais, realizada neste capítulo, bem como a interpretação destes operadores, estendem os conceitos da lógica clássica e podem viabilizar fundamentação para novas aplicações e/ou adaptação de sistemas computacionais já existentes.

| | Coimplicação Fuzzy Intuicionista |
|---|---|
| KD-Kleene-Dienes: | $J_I(\tilde{x},\tilde{y}) = ((x_2 \wedge y_1),(x_1 \vee y_2))$ |
| RC-Reichenbach: | $J_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (y_1 + (1-x_2)y_1, x_1 - (1-x_1)y_2)$ |
| LZ-Łukasiewicz: | $J_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (1 \vee x_2 + y_1, 0 \wedge y_2 - (1-x_1))$ |
| Zadeh: | $J_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (x_2 \wedge ((1-x_2) \wedge y_1),(x_1 \vee (1-x_1)) \vee y_2)$ |
| P.C.: | $J_I(\tilde{x},\tilde{y}) = ((1-x_2) + y_1 - ((1-x_2)y_1),(1-x_1) + y_2)$ |
| B.C.: | $J_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (0 \wedge (1-x_2) + y_1 - 1), 1 \vee x_1 + y_2)$ |
| P.D.: | $J_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (1-x_2) + y_1,(1-x_1) + y_2 - 1x_1))$ |
| B.D.: | $J_I(\tilde{x},\tilde{y}) = (1 \vee (1-x_2) + y_1, 0 \wedge (1-x_1) + y_2 - 1)$ |

Tabela 3: Coimplicações Fuzzy Intuicionistas

| | $J_I1$ | $J_I2$ | $J_I3$ | $J_I4$ | $J_I5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| KD: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| RC: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| LZ: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| ZH: | ✓ | x | x | ✓ | ✓ |
| P.C.: | ✓ | x | ✓ | x | x |
| B.C.: | ✓ | x | ✓ | x | x |
| P.D.: | x | x | ✓ | ✓ | x |
| B.D.: | x | x | ✓ | ✓ | x |

Tabela 4: Propriedades Satisfeitas pelas Complicações Fuzzy Intuicionistas

# 3 IMPLICAÇÕES FUZZY INTERVALARES

Este capítulo apresenta um estudo da lógica fuzzy intervalar, introduzindo conceitos básicos da teoria dos conjuntos fuzzy tipo-2, e mais especificamente, dos conjuntos fuzzy intervalares. Este estudo fundamenta a modelagem e o desenvolvimento de aplicações em sistemas computacionais que visam tanto o tratamento de incertezas na descrição de variáveis linguísticas quanto o tratamento e propagação de erros de arredondamento e truncamento nos cálculos numéricos dos resultados comutados.

Na sequência o estudo dos conectivos da lógica fuzzy intervalar como as funções de agregação, negação fuzzy intervalar, implicação e coimplicação fuzzy intervalar são revisados.

## 3.1 Conjuntos Fuzzy Intervalares

Em sua concepção,(ZADEH, 1965), um subconjunto fuzzy $A$ de um conjunto universo $X \neq \emptyset$ é construído a partir do mapeamento $\mu_A : X \to U$, cujo valor de $\mu_A(x)$ em $U$ é normalmente associado com um grau de crença de algum especialista, quanto a pertinência de $x \in X$ estar em $A$.

Entretanto uma visão cada vez mais predominante considera este método de codificação de informações insuficiente, pois a atribuição de um número exato baseado na opinião de um engenheiro do conhecimento é demasiado restritivo.

Também restritiva é a abordagem baseada na média referente a opiniões, geralmente distintas, de vários destes especialistas (NGUYEN; WALKER, 2006).

Para contribuir de forma mais realista com esta discussão, pode-se atribuir um intervalo contendo os valores com todas as opiniões dos vários especialistas. Significando assim, a substituição do intervalo de valores fuzzy $U = [0, 1]$ pelo conjunto de todos os subintervalos do intervalo unitário $U$.

Nesta nova concepção, a teoria dos conjuntos fuzzy intervalares generaliza a teoria dos conjuntos fuzzy, considerando

$$\mathbb{U} = \{([a, b]) : a, b \in U, 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

como o conjunto de todos os graus intervalares de pertinência.

Em (DUBOIS; PRADE, 2000), um conjunto fuzzy valorado intervalarmente consiste em um conjunto fuzzy cujo grau de pertinência de cada elemento é também um conjunto fuzzy, cuja função de pertinência é multivalorada por intervalos na escala de pertinência. No estudo da lógica fuzzy de tipo-2, a Lógica Fuzzy Intervalar constitui-se na abordagem mais simples, capturando em $\mu_A(x)$ a imprecisão, no grau intervalar de pertinência, de um elemento $x$ a um conjunto fuzzy intervalar $A$.

Com a demanda para o tratamento do conhecimento de sistemas capazes de lidar e distinguir entre diversos graus de imprecisão, faz-se necessário a formal caracterização de modelos matemáticos para geração de resultados a partir da aplicação de regras de inferência que também manipulam a imprecisão nos graus de pertinência. Esta formalização é obtida pelo uso da lógica fuzzy do tipo-2, através da definição de extensões dos conetivos, em especial, dos dos operadores de implicação fuzzy.

Muitos tipos de incerteza nas diversas áreas da ciência podem ser relacionadas adequadamente e descritas em termos estatísticos, tem-se, como exemplo, a incerteza de medição. Consequentemente, o trabalho investigativo integrando às novas tecnologias tem provido métodos bem desenvolvidos em engenharias e demais ciências, os quais têm sido eficientemente aplicados à muitas áreas.

Nos trabalhos descritos em (KREINOVICH, 2008), as camadas profundas nos estudos geológicos são muito importantes, mas é extremamente difícil medir diretamente as propriedades da rocha em grandes profundidades. Para determinar essas propriedades, temos, portanto, que complementar os resultados da medição com estimativas de especialistas. Entretanto, os especialistas nem sempre nos fornecem os valores exatos das quantidades estimadas. Às vezes, eles fornecem um intervalo que contém o valor (desconhecido) da quantificação.

Em outros casos, os peritos também podem fornecer intervalos estreitos que contém essa quantidade, com um certo grau de certeza. Nestes casos, temos uma família de intervalos correspondendo a diferentes graus de incerteza. Este, e muitos outros exemplos de aplicações de lógica fuzzy intervalar, como reportados em (BUSTINCE et al., 2009), motivam e justificam o estudo da mesma.

A seguir apresenta-se um estudo, no sentido estrito, das extensões intervalares de funções intervalares, com ênfase na representabilidade dos conectivos lógicos.

## 3.2 Teoria da Representabilidade de Conetivos Fuzzy

Um intervalo $X \subseteq U$ é dito ser uma representação intervalar de um número real $\alpha$ se $\alpha \in X$. Considerando dois intervalos representáveis $X$ e $Y$ de um número $\alpha$, $X$ pode ser chamado de melhor representação de $\alpha$ que $Y$ se $X \subseteq Y$.

**Definição 4.** *(SANTIAGO; BEDREGAL; ACIóLY, 2006) Uma função intervalar $F : \mathbb{U}^2 \longrightarrow \mathbb{U}$ é uma **representação intervalar** de uma função real $f : U^2 \longrightarrow U$ se, para cada $(X_1, X_2) \in \mathbb{U}^2$ e $(x_1, x_2) \in (X_1, X_2)$, $f(x_1, x_2) \in F(X_1, X_2)$.*

Sejam $F : \mathbb{U}^2 \longrightarrow \mathbb{U}$ e $G : \mathbb{U}^2 \longrightarrow \mathbb{U}$ duas representações intervalares da função $f : U^2 \longrightarrow U$. $F$ é a *melhor representação intervalar* de $f$ que $G$, denotado por $G \sqsubseteq F$, se, para cada $(X_1, X_2) \in \mathbb{U}^2$, a inclusão $F(X_1, X_2) \subseteq G(X_1, X_2)$ é satisfeita. Esta notação pode ser facilmente estendida para tuplas de $n$ intervalos indicada por $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

**Definição 5.** *(SANTIAGO; BEDREGAL; ACIóLY, 2006) Para cada função real $f : U^n \longrightarrow U$, a função intervalar $\widehat{f} : \mathbb{U}^n \longrightarrow \mathbb{U}$, definida por:*

$$\widehat{f}(\overrightarrow{X}) = \left[\inf\{f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{X}\}, \sup\{f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{X}\}\right], \tag{35}$$

*é chamada **a melhor representação de** $f$ ou **representação canônica** de $f$.*

A função intervalar $\widehat{f}$ está bem definida e, para qualquer outra representação intervalar $F$ de $f$, $F \sqsubseteq \widehat{f}$. A função intervalar $\widehat{f}$ retorna um intervalo que é mais "estreito" do que qualquer outra representação intervalar de $f$. Assim, $\widehat{f}$ apresenta a *propriedade da optimalidade* de algoritmos intervalares mencionados por Hickey et al. (HICKEY; JU; EMDEM, 2001), quando ele é visto como um algoritmo para calcular uma função real $f$.

As funções projeções $l_{\mathbb{U}}, r_{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \rightarrow U$, para todo $[a,b] \subseteq U$, são dadas por:

$$l_{\mathbb{U}}([a,b]) = a \qquad r_{\mathbb{U}}([a,b]) = b, \tag{36}$$

Para qualquer $X \subseteq U$, tem-se que

- $l_{\mathbb{U}(}X) = \underline{X}$ e $r_{\mathbb{U}}(X) = \overline{X}$ são notações alternativas para as projeções de $X$.
- se $\overline{X} = \underline{X} = x$, $X$ é denominado intervalo degenerado e indicado por $X = [x,x] = \mathbf{x}$.
- o conjunto de todos os elementos diagonais em $\mathbb{U}$ é indicado por $\mathbb{D}[\mathbb{U}] = \{\mathbf{x} : x \in U\}$.

Seja $\mathbb{U} = \{X = [\underline{X}, \overline{X}] \mid \underline{X}, \overline{X} \in U$ e $0 \leq \underline{X} \leq \overline{X} \leq 1\}$, dentre as diferentes relações de ordem (GEHRKE; WALKER; WALKER, 1996) este trabalho considera a relação de ordem de Kulish-Miranker ou **ordem produto** tal que, para todo $X, Y \in \mathbb{U}$, esta definida por:

$$X \leq_{\mathbb{U}} Y \Leftrightarrow \underline{X} \leq \underline{Y} \text{ e } \overline{X} \leq \overline{Y}. \tag{37}$$

Logo, tem-se que $[0,0] = \mathbf{0} \leq X \leq [1,1] = \mathbf{1}$, para todo $X \in \mathbb{U}$

Considera-se ainda para todo $X, Y \in \mathbb{U}$, a seguinte relação proposta por Moore (MOORE, 1963).

$$(ii)\ X \prec_{\mathbb{U}} Y \Leftrightarrow \overline{X} \leq \underline{Y}. \tag{38}$$

**Observação 1.** *Salienta-se que os IFSs e os IvFSs são isomorfos, como provado em (ATANASSOV; GARGOV, 1989, Def. 2 e Lema 1).*

## 3.3 Conceitos da Lógica Fuzzy Intervalar

Na sequência, apresentam-se alguns dos principais conectivos da IvFL, suas propriedades algébricas, exemplos e demais fundamentos relacionados.

### 3.3.1 Negação Fuzzy Intervalar

Nesta seção são estudadas as funções de negação fuzzy intervalar e o conceito de dualidade fuzzy intervalar.

Existem diversas maneiras, referenciadas na literatura, para transformar o conceito de negação fuzzy em negação fuzzy intervalar, veja por exemplo (GORZALCZANY, 1987; GEHRKE; WALKER; WALKER, 1996; NGUYEN; WALKER, 1999; BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a). Neste trabalho foi adotado a extensão proposta em (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a) e aplicada em (REISER et al., 2007).

**Definição 3.** *(REISER et al., 2007) Uma função intervalar $\mathbb{N} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ é uma* ***negação fuzzy intervalar*** *se, para qualquer $X, Y \in \mathbb{U}$, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

**$\mathbb{N}1$:** $\mathbb{N}([0,0]) = \mathbf{1}$ *e* $\mathbb{N}([1,1]) = \mathbf{0}$.

$\mathbb{N}2a$ *: Se $X \geq Y$ então $\mathbb{N}(X) \leq \mathbb{N}(Y)$.*

$\mathbb{N}2b$ *: Se* $X \subseteq Y$ *então* $\mathbb{N}(X) \supseteq \mathbb{N}(Y)$.

*Se* $\mathbb{N}$ *também satisfaz a propriedade involutiva:*

$\mathbb{N}4$ *:* $\mathbb{N}(\mathbb{N}(X)) = X$, *para todo* $X \in \mathbb{U}$,

*então* $\mathbb{N}$ *é denominada de* ***negação fuzzy intervalar forte*** *(REISER et al., 2007).*

**Exemplo 3.** *A extensão intervalar da* ***Negação Fuzzy Padrão*** $N_S(x) = 1 - x$ *é a negação fuzzy intervalar forte* $\mathbb{N}_S : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, *definida por:*

$$\mathbb{N}_S(X) = [1,1] - X = [1 - \overline{X}, 1 - \underline{X}]. \tag{39}$$

### 3.3.2 Relação de Dualidade entre Funções Fuzzy Intervalares

**Definição 6.** *(REISER; BEDREGAL; REIS, 2012) Seja* $\mathbb{N}$ *uma negação fuzzy forte intervalar em* $\mathbb{U}$ *e* $F : \mathbb{U}^n \longrightarrow \mathbb{U}$ *uma função intervalar. A* ***função intervalar*** $\mathbb{N}$***-dual*** *de* $F$ *é dada por:*

$$F_{\mathbb{N}}(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{N}(F(\mathbb{N}(X_1), \ldots, \mathbb{N}(X_n))). \tag{40}$$

Pela Eq.( 40), quando $\mathbb{N}$ é involutiva, $(F_{\mathbb{N}})_{\mathbb{N}} = F$ e, $F$ e $F_{\mathbb{N}}$ são funções denominadas mutuamente duais.

### 3.3.3 Automorfismos Intervalares

Nesta sessão, apresentam-se algumas contribuições que complementam o estudo dos automorfismos intervalares introduzidos em (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006b), no sentido de, na sequência deste texto, fundamentar o estudo dos automorfismos intuicionistas intervalares e suas conjugadas correspondentes às negações fuzzy intuicionistas intervalares.

**Definição 7.** *Uma função intervalar* $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *é um* ***automorfismo intervalar*** *(IvA) se ela é bijetiva e monotônica com respeito a ordem produto, isto é,* $X \leq_{\mathbb{U}} Y$ *se, e somente se,* $\phi(X) \leq_{\mathbb{U}} \phi(Y)$.

Seja $Aut(\mathbb{U})$ o conjunto de todos os automorfismos intervalares em $\mathbb{U}$. Automorfismos intervalares são fechados para composição, isto é, para todo $\phi, \phi' \in Aut(\mathbb{U})$, $\phi \circ \phi' \in Aut(\mathbb{U})$; e para todo $\phi \in Aut(\mathbb{U})$ existe o automorfismo inverso $\phi^{-1} \in \mathbb{U}$, tais que $\phi \circ \phi^{-1} = Id_{\mathbb{U}}$. Assim, $(Aut(\mathbb{U}), \circ)$ tem uma estrutura de grupo, tendo a função identidade intervalar como o elemento neutro.

A ação de um IvA $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ sobre uma função intervalar $F : \mathbb{U}^n \to \mathbb{U}$ é uma função intervalar $F^{\phi} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, chamada **conjugado intervalar** de $F$, definida pela expressão:

$$F^{\phi}(X_1, \ldots, X_n) = \phi^{-1}(F(\phi(X_1), \ldots, \phi(X_n))). \tag{41}$$

#### *3.3.3.1 Relacionamento entre $Aut(U)$ e $Aut(\mathbb{U})$*

Automorfismos intervalares obtidos a partir de automorfismos e suas construções inversas são considerados nesta seção, e portanto, estuda-se um operador de bijeção preservando propriedades e associando a ordem natural de $Aut(U)$ à ordem produto em $Aut(\mathbb{U})$.

Primeiramente, na Eq. (42) reporta-se a construção canônica de um automorfismo intervalar $\widehat{\phi}$ a partir de um automorfismo $\phi$. E assim, automorfismos intervalares são a melhor representação intervalar de automorfismos.

**Proposição 9.** *(BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006b, Teorema 5.1)(GEHRKE; WALKER; WALKER, 1996, Teorema 2) Seja $\phi : U \to U$ um automorfismo em $U$. Então $\lfloor \phi \rfloor : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ é um automorfismo chamado $\lfloor \phi \rfloor$-**automorfismo representável em** $\mathbb{U}$ e definido por*

$$\lfloor \phi \rfloor(X) = [\phi(\underline{X}), \phi(\overline{X})], \ \ \forall X \in \mathbb{U}. \tag{42}$$

**Proposição 10.** *Para todo $\phi \in Aut(U)$, $X \in \mathbb{U}$, o operador $\lfloor \ \rfloor : Aut(U) \to Aut(\mathbb{U})$, definido pela Eq. (42), é uma bijeção preservando as correspondentes estruturas ordenadas, no caso $(Aut(U), \leq)$ e $(Aut(\mathbb{U}), \leq_{\mathbb{U}})$.*

**Prova.** *Segue da Proposição 9.* □

**Corolário 1.** *(BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006b, Corolário 5.1) Se $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ é um automorfismo intervalar então é uma inclusão monotônica, ou seja, $\phi(X) \subseteq \phi(Y)$ sempre $X \subseteq Y$.*

Na sequencia, da Proposição 11 até 13 discutem-se as condições para automorfismos $\phi_{l_{\mathbb{U}}}, \phi_{r_{\mathbb{U}}} : U \to U$ que podem ser obtidos a partir das projeções associadas a um automorfismo intervalar $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$.

**Proposição 11.** *Seja $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ um automorfismo intervalar em $\mathbb{U}$. Para todo $x \in U$, as funções $\phi_{l_{\mathbb{U}}}, \phi_{r_{\mathbb{U}}} : U \to U$ são automorfismos, respectivamente definidos por*

$$\phi_{l_{\mathbb{U}}}(x) = l_{\mathbb{U}}(\phi([x, x]); \qquad \phi_{r_{\mathbb{U}}}(x) = 1 - r_{\mathbb{U}}(\mathbf{1} - \phi([x, x]). \tag{43}$$

**Prova.** *Segue da definição de função conjugada intervalar restrita ao conjunto de intervalos degenerados $\mathbb{D}[\mathbb{U}]$.* □

**Proposição 12.** *Para todo $\phi \in Aut(U)$ e $x \in U$, se $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ é um automorfismo em $\mathbb{U}$, $\phi_{l_{\mathbb{U}}} = \phi_{r\mathbb{U}}$.*

**Prova.** *Segue das Proposições 10 e 11.* □

Baseado nos resultados da Proposição 12, para todo automorfismo intervalar $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, existe um $\phi$-automorfismo em $U$, tal que $\phi_{l_{\mathbb{U}}} = \phi = \phi_{r\mathbb{U}}$.

A seguir, salienta-se que um automorfismo intervalar $\phi$ preserva intervalos degenerados em $\mathbb{U}$.

**Lema 1.** *Seja $\phi$ um automorfismo em $Aut(\mathbb{U})$ e $X \in \mathbb{U}$. Então $l_{\mathbb{U}}(\phi([\underline{X}, \underline{X}])) = l_{\mathbb{U}}(\phi(X))$ e $r_{\mathbb{U}}(\phi([\overline{X}, \overline{X}])) = r_{\mathbb{U}}(\phi(X))$*

*Proof.* Por definição, $\phi$ é crescente com respeito à ordem em Kulisch-Miranker e pelo Corolário1 é uma inclusão monotônica. Então, desde $[\underline{X}, \underline{X}] \leq X$ e $[\underline{X}, \underline{X}] \subseteq X$ então $\phi([\underline{X}, \underline{X}]) \leq \phi(X)$ e $\phi([\underline{X}, \underline{X}]) \subseteq \phi(X)$. Portanto, $l_{\mathbb{U}}(\phi([\underline{X}, \underline{X}])) = l_{\mathbb{U}}(\phi(X))$. A prova de que $r_{\mathbb{U}}(\phi([\overline{X}, \overline{X}])) = r_{\mathbb{U}}(\phi(X))$ é análoga. □

**Proposição 13.** *Sejam $\phi : U \to U$ e $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ automorfismos em $U$ e em $\mathbb{U}$, respectivamente. Então, considera-se a correspondente projeção a esquerda, ambas composições comutam $\lfloor \phi_{l_{\mathbb{U}}} \rfloor : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ e $\lfloor \phi \rfloor_{l_{\mathbb{U}}} : U \to U$ podem ser, respectivamente, expressas pelas Eqs. (44a) e (44b) abaixo:*

$$\lfloor \phi_{l_{\mathbb{U}}} \rfloor = \phi, \qquad \lfloor \phi \rfloor_{l_{\mathbb{U}}} = \phi. \tag{44}$$

*Pode-se obter a construção análoga, pela projeção à direita, $r_{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \to U$.*

**Prova.** *Para todo $X \in \mathbb{U}$, com base nas equações estabelecidas na Proposição 12 e Lema 1, segue que*

$$\begin{aligned}\lfloor \phi_{l_{\mathbb{U}}} \rfloor(X) &= [\phi_{l_{\mathbb{U}}}(\underline{X}), \phi_{l_{\mathbb{U}}}(\overline{X})] = [l_{\mathbb{U}}(\phi([\underline{X}, \underline{X}]), l_{\mathbb{U}}(\phi([\overline{X}, \overline{X}])] \\ &= [l_{\mathbb{U}}(\phi([\underline{X}, \underline{X}]), r_{\mathbb{U}}(\phi([\overline{X}, \overline{X}])] = [l_{\mathbb{U}}(\phi(X), r_{\mathbb{U}}(\phi(X)] = \phi(X)\end{aligned}$$

*Portanto, Eq.(44)a é satisfeita. Analogamente, para todo $x \in U$, segue que $\lfloor \phi \rfloor_{l_{\mathbb{U}}}(x) = ([\phi(x), \phi(x)])_{l_{\mathbb{U}}} = \phi(x)$, significando que Eq.(44)b é válida.* □

Baseado na Eq. (41), o conjugado de uma negação fuzzy $\mathbb{N} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ é dado por

$$\mathbb{N}^{\phi}(X) = \phi^{-1}(\mathbb{N}(\phi(X))). \tag{45}$$

$\mathbb{N} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ é uma negação fuzzy (canônica)representável se existe a negação fuzzy $N : U \to U$ tal que $\mathbb{N}(X) = [N(\overline{X}), N(\underline{X})]$.

**Proposição 14.** *(BEDREGAL, 2010, Teorema 5.2) Seja $\mathbb{N}$ uma negação fuzzy intervalar. As funções $\underline{\mathbb{N}}, \overline{\mathbb{N}} : U \to U$ são negações fuzzy definidas por*

$$\underline{\mathbb{N}}(x) = l_{\mathbb{U}}(\mathbb{N}([x, x])); \qquad \overline{\mathbb{N}}(x) = r_{\mathbb{U}}(\mathbb{N}([x, x])) \tag{46}$$

**Proposição 15.** *Seja $\phi$ um automorfismo intervalar em $\mathbb{U}$. Então, $\phi(\bar{D}) = \bar{D}$.*

**Prova.** *Direta pela Proposição 10, 11 e 12.* □

O diagrama comutativo da Figura 6 a seguir, ilustra as principais relações entre as classes de negações em $U$ e em $\mathbb{U}$ e suas correspondentes conjugadas obtidas por automorfismos em $Aut(U)$ e $Aut(\mathbb{U})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathbb{N}) \times Aut(\mathbb{U}) \arrow[r, "Eq.(45)"] \arrow[d, shift right, "Eqs.(39)(46a)(46b)"'] & \mathcal{C}(\mathbb{N}) \arrow[d, shift left, "Eqs.(39)(46a)(46b)"] \\
\mathcal{C}(N) \times Aut(U) \arrow[r, "Eq.(13)"] \arrow[u, shift right, "Eqs.(42)(43a)(43b)"'] & \mathcal{C}(N) \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

Figura 6: Relações em $U$ e $\mathbb{U}$ entre classes das conjugadas de $Aut(\mathbb{U})$ e $Aut(U)$ e das negações de $\mathcal{C}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{C}(N)$.

## 3.4 Funções de Agregação Intervalares

Uma função de agregação intervalar $\mathbb{M} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ verifica as condições:

$\mathbb{A}1$ : $\mathbb{M}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\mathbb{M}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

$\mathbb{A}2$ : Se $X \leq Z$ então $\mathbb{M}(X, Y) \leq \mathbb{M}(Z, Y), \forall X, Y, Z \in \mathbb{U}$;

$\mathbb{A}3$ : $\mathbb{M}(X, Y) = \mathbb{M}(Y, X)$, $\forall X, Y \in \mathbb{U}$;

Adicionalmente, funções de agregação intervalares são idempotentes se também verificam a propriedade $\mathbb{A}4$:

$\mathbb{A}4$ : $\mathbb{M}(X, X) = X$, $\forall X \in \mathbb{U}$ (propriedade de idempotência).

**Exemplo 4.** *Sejam as funções de agregação* $\bigwedge, \bigvee : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$*, dadas por:*

$$\bigwedge(X, Y) = [\wedge(\underline{X}, \underline{Y}), \wedge(\overline{X}, \overline{Y})] e \tag{47}$$

$$\bigvee(X, Y) = [\vee(\underline{X}, \underline{Y}), \vee(\overline{X}, \overline{Y})]. \tag{48}$$

Considerando a ordem produto e as Eqs.(37) e (38) em $\mathbb{U}$, se $\mathbb{M}$ é uma função de agregação idempotente, então tem-se que:

$$\bigwedge(X, Y) \leq M(X, Y) \leq \bigvee(X, Y),\ \forall X, Y \in \mathbb{U}.$$

### 3.4.1 Normas Triangulares Intervalares

Considerando-se a generalização proposta em (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a), uma norma triangular intervalar (*t-norma intervalar*) pode ser considerada uma representação intervalar de uma t-norma. Esta generalização se enquadra no princípio fuzzy, significando que o grau de pertinência intervalar pode ser pensado como uma aproximação do grau de pertinência exato.

**Definição 4.** *(BEDREGAL et al., 2007) A função* $\mathbb{T} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *é uma* ***t-norma intervalar*** *se, para todo* $X, Y, Z \in \mathbb{U}$*, seguintes propriedades são satisfeitas:*

$\mathbb{T}_1$ *Comutatividade:* $\mathbb{T}(X, Y) = T(Y, X)$;

$\mathbb{T}_2$ *Associatividade:* $\mathbb{T}(X(\mathbb{T}(Y, Z)) = \mathbb{T}(\mathbb{T}(X, Y), Z)$;

$\mathbb{T}_3$ *Elemento Neutro:* $\mathbb{T}(X, 1) = X$;

$\mathbb{T}_4$ *Monotonicidade:* $\mathbb{T}(X, Y) \leq \mathbb{T}(X, Z)$ *se* $Y \leq Z$.

**Proposição 1.** *(BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a) A função* $\mathbb{T} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *é uma t-norma intervalar se existem t-normas* $T_1$, $T_2 : U^2 \to U$ *tal que* $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$*. Logo:*

$$\mathbb{T}(X, Y) = [T_1(\underline{X}, \underline{Y}), T_2(\overline{X}, \overline{Y})], \forall X, Y \in \mathbb{U}. \tag{49}$$

No caso da Eq.(49), a t-norma intervalar $\mathbb{T}$ é dita ser representável por $T_1$ e $T_2$. A representabilidade de t-normas foi primeiramente proposto em trabalho como (DESCHRIJVER; KERRE, 2005c; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2004)

**Proposição 2.** *(BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a) Se* $T$ *é uma t-norma, então* $\widehat{T} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *é uma t-norma intervalar, cuja expressão é dada por:*

$$\widehat{T}(X, Y) = [T(\underline{X}, \underline{Y}), T(\overline{X}, \overline{Y})]. \tag{50}$$

### 3.4.2 Conormas Triangulares Intervalares

Uma conorma triangular intervalar (*t-conorma intervalar*) também pode ser considerada uma representação intervalar de uma t-conorma (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006c).

**Definição 5.** *(BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006c) A função* $\mathbb{S} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *é uma* ***t-conorma intervalar*** *se, para todo* $X, Y, Z \in \mathbb{U}$*, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

$\mathbb{S}_1$ *Comutatividade:* $\mathbb{S}(X,Y) = \mathbb{S}(Y,X)$;

$\mathbb{S}_2$ *Associatividade:* $\mathbb{S}(X(\mathbb{S}(Y,Z)) = \mathbb{S}(\mathbb{S}(X,Y),Z)$;

$\mathbb{S}_3$ *Elemento Neutro:* $\mathbb{S}(X,0) = X$;

$\mathbb{S}_4$ *Monotonicidade:* $\mathbb{S}(X,Y) \leq (X,Z)$ *se* $Y \leq Z$.

**Proposição 3.** *(BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a) A função* $\mathbb{S} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ *é uma t-conorma intervalar se existem t-conorma* $S_1$, $S_2 : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ *tal que* $S_1 \leq S_2$

$$\mathbb{S}(X,Y) = [S_1(\underline{X},\underline{Y}), S_2(\overline{X},\overline{Y})] \tag{51}$$

O estudo da representação para as t-conormas foram introduzidos nos trabalhos de (DESCHRIJVER; KERRE, 2005c; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2004). A prova da próxima proposição foi apresentada em (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a).

**Proposição 4.** *Se* $S$ *é uma t-conorma, então* $\widehat{S} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ *é uma t-conorma intervalar dada pela expressão:*

$$\widehat{S}(X,Y) = [S(\underline{X},\underline{Y}), S(\overline{X},\overline{Y})]. \tag{52}$$

## 3.5 Implicações e Coimplicações Fuzzy Intervalares

Esta seção introduz os conceitos de implicações fuzzy intervalares e coimplicações fuzzy intervalares, mostrando as principais propriedades satisfeitas pelas implicações intervalares e pela ação do construtor dual (coimplicações fuzzy intervalares).

### 3.5.1 Implicação Fuzzy Intervalar

**Definição 6.** *(BEDREGAL et al., 2007) Uma função* $\mathbb{I} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ *é uma* ***implicação fuzzy intervalar*** *se as seguintes condições de contorno são satisfeitas:*

**$\mathbb{I}1$:** $\mathbb{I}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = \mathbb{I}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbb{I}(\mathbf{0},\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ *e* $\mathbb{I}(\mathbf{1},\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Sejam $X, Y, Z \in \mathbb{U}$. As seguintes extensões intervalares das propriedades apresentadas na Seção 2.3 são consideradas logo a seguir:

**$\mathbb{I}2$:** Se $X \leq Z$ então $\mathbb{I}(X,Y) \geq \mathbb{I}(Z,Y)$;

**$\mathbb{I}3$:** Se $Y \leq Z$ então $\mathbb{I}(X,Y) \leq \mathbb{I}(X,Z)$;

**$\mathbb{I}4$:** $\mathbb{I}(\mathbf{0},Y) = \mathbf{1}$;

**$\mathbb{I}5$:** $\mathbb{I}(X,\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

**$\mathbb{I}6$:** $\mathbb{I}(\mathbf{1},Y) = Y$.

### 3.5.2 Coimplicação Fuzzy Intervalar

Essa seção aborda as coimplicações fuzzy intervalares, definição e propriedades da versão intervalar de uma coimplicação fuzzy.

**Definição 7.** *A função binária* $\mathbb{J} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ *é chamada* ***coimplicação fuzzy intervalar*** *se satisfaz as seguintes condições de contorno:*

$\mathbb{J}1$**:** $\mathbb{J}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = \mathbb{J}(\mathbf{1},\mathbf{0}) = \mathbb{J}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *e* $\mathbb{J}(\mathbf{0},\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Além das condições de contorno, também as propriedades de coimplicações fuzzy podem ser naturalmente estendidas de uma abordagem pontual de $J$ para a correspondente intervalar $\mathbb{J}$. Assim, para todo $X, Y, Z \in \mathbb{U}$, tem-se:

$\mathbb{J}2$**:** Se $X \leq Z$ então $\mathbb{J}(X,Y) \geq \mathbb{J}(Z,Y)$;

$\mathbb{J}3$**:** Se $Y \leq Z$ então $\mathbb{J}(X,Y) \leq \mathbb{J}(X,Z)$;

$\mathbb{J}4$ : $\mathbb{J}(\mathbf{1},Y) = \mathbf{0}$;

$\mathbb{J}5$**:** $\mathbb{J}(X,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

$\mathbb{J}6$**:** $\mathbb{J}(\mathbf{0},Y) = Y$.

#### *3.5.2.1 Representação Canônica de Implicação e Coimplicação*

Considerando-se qualquer (co)implicação fuzzy, é sempre possível obter canonicamente uma (co)implicação fuzzy intervalar. A implicação fuzzy intervalar assim obtida satisfaz a propriedade de optimalidade, preservando as mesmas propriedades satisfeitas para a implicação fuzzy.

**Proposição 16.** *(REISER; BEDREGAL, 2011, Prop. 6) (BEDREGAL et al., 2010, Prop. 10). Sejam as funções* $(I)J$ *(co)implicação fuzzy satisfazendo* $I2$ *e* $I3$ *(*$J2$ *e* $J3$*). A função* $\widehat{I}$ *(*$\widehat{J}$*), chamada de representação canônica de* $I(J) : U^2 \longrightarrow U$*, é dada por:*

$$\widehat{I}(X,Y) = [I(\overline{X},\underline{Y}), I(\underline{X},\overline{Y})], \tag{53}$$

$$\widehat{J}(X,Y) = [J(\overline{X},\underline{Y}), J(\underline{X},\overline{Y})], \tag{54}$$

**Proposição 5.** *Sejam as funções* $(I)J$ *(co)implicação fuzzy satisfazendo* $I2$ *e* $I3$*(*$J2$ *e* $J3$*), então* $\widehat{I}$ *é uma implicação fuzzy intervalar e* $\widehat{J}$ *é uma coimplicação fuzzy intervalar.*

**Prova.** *(BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a) Por definição de* $\widehat{I}$*, nos temos que* $I = \{(x,y)|x \in X, y \in Y\} \subseteq \widehat{I} = (X,Y)$*, e somente se* $I(\overline{X},\underline{Y})$ *e* $I(\underline{X},\overline{Y})$ *estão ambos em* $I$*, então:*

$$\underline{X} \leq x \leq \overline{X}, \underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}. \tag{55}$$

*Logo pelas propriedades* $I_2$ *e* $I_3$*, segue-se que:*

$$I(\overline{X},\underline{Y}) \leq I(x,y) \leq I(\underline{X},\overline{Y}). \tag{56}$$

*Então* $I(\overline{X},\underline{Y})$ *e* $I(\underline{X},\overline{Y})$*, são o ínfimo e o supremo, respectivamente e* $I(x,y) \subseteq \widehat{I} = (X,Y)$*. De forma análoga, prova-se para* $\widehat{J}$*.* □

A Proposição 6 mostra que a representação canônica preserva a inclusão monotônica, propriedade necessária para assegurar a computabilidade de funções intervalares (SANTIAGO; BEDREGAL; ACIóLY, 2005, 2006).

**Proposição 6.** *(BEDREGAL et al., 2007, Proposição 6.2) Seja $I$ é uma implicação fuzzy satisfazendo $I2$ e $I3$. Então para cada $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbb{U}$, se $X_1 \subseteq X_2$ e $Y_1 \subseteq Y_2$ então $\widehat{I}(X_1, Y_1) \subseteq \widehat{I}(X_2, Y_2)$.*

Na sequência, a Proposição 7 mostra que coimplicações fuzzy intervalares que são antimonotônicas no primeiro argumento e isotônicas no segundo argumento então satisfazem a dominância da falsidade no antecedente e da veracidade do consequente.

**Proposição 7.** *Se uma coimplicação fuzzy intervalar $\mathbb{J}$ satisfaz a Propriedade $\mathbb{J}2$ e $\mathbb{J}3$, então $\mathbb{J}$ também satisfaz a Propriedade $\mathbb{J}4$ e $\mathbb{J}5$.*

**Prova.** *Seja $\mathbb{J}$ uma coimplicação fuzzy intervalar e $X, Y \in \mathbb{U}$.*

*(i) Uma vez que $Y \leq \mathbf{1}$, segue-se que $\mathbb{J}(\mathbf{1}, Y) \leq \mathbb{J}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ por $\mathbb{J}2$. Além disso, $\mathbb{J}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{0}$ pelas condições de contorno ($\mathbb{J}1$). Assim, $\mathbb{J}(\mathbf{1}, Y) \leq \mathbf{0}$. Por outro lado, $\mathbb{J}(\mathbf{1}, Y) \geq \mathbb{J}(Y, Y)$ por $\mathbb{J}2$ e $\mathbb{J}(X, X) = \mathbf{0}$ por $\mathbb{J}11$, significando que, $\mathbb{J}(\mathbf{1}, Y) \geq \mathbf{0}$. Portanto, tem-se $\mathbb{J}(\mathbf{1}, Y) = \mathbf{0}$;*

*(ii) Visto que $X \geq \mathbf{0}$, segue-se que $\mathbb{J}(X, \mathbf{0}) \leq \mathbb{J}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ por $\mathbb{J}2$. Além disso, $\mathbb{J}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ pelas condições de contorno ($\mathbb{J}1$). Assim, $\mathbb{J}(X, \mathbf{0}) \leq \mathbf{0}$. Por outro lado, $\mathbb{J}(X, \mathbf{0}) \geq \mathbb{J}(X, X)$ por $\mathbb{J}2$ e $\mathbb{J}(X, X) = \mathbf{0}$ $\mathbb{J}10$, significa que, $\mathbb{J}(X, \mathbf{0}) \geq \mathbf{0}$. Portanto, tem-se que $\mathbb{J}(X, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

□

### 3.5.3 Interpretação da Regra Condicional Fuzzy Intervalar

Sejam $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$, $\mathbf{A} = \{(x, M_{\mathbf{A}}(x)) \,|\, x \in X\}$ e $\mathbf{B} = \{(y, M_{\mathbf{B}}(y)) \,|\, y \in Y\}$ conjuntos fuzzy intervalares definidos em $X$ e $Y$, respectivamente. De acordo com (ZADEH, 1965), (BAETS, 1997; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2004, 2006) e (GASSE et al., 2006), as correspondentes funções intervalares de pertinência $M_{\mathbf{A}} : X \rightarrow \mathbb{U}$, $M_{\mathbf{B}} : Y \rightarrow \mathbb{U}$ são dadas por:

$$M_{\mathbf{A}}(x) = [\underline{M_A}(x), \overline{M_A}(x)], \text{ e} \tag{57}$$

$$M_{\mathbf{B}}(y) = [\underline{M_B}(y), \overline{M_B}(y)]. \tag{58}$$

E, tem-se que $M_{\mathbf{A}}(x)$ e $M_{\mathbf{B}}(y)$ denotam os graus intervalares de pertinência da variável $x$, tomando valores em $X$, e da variável $y$, tomando valores em $Y$, nos conjuntos fuzzy intervalares $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente.

Assim, a IvFL generaliza a FL, identificando intervalos degenerados em $\mathbb{U}$ com um número real em $U$. Além disso, a regra condicional fuzzy:

$$R\ (3.5.3) : \text{“Se } x \text{ é } \mathbf{A} \text{ então } y \text{ é } \mathbf{B}\text{”},$$

pode ser definida por uma implicação fuzzy intervalar $\mathbb{I} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$, estabelecendo a seguinte correspondência:

$$(x, y) \longrightarrow \mathbb{I}(M_{\mathbf{A}}(x), M_{\mathbf{B}}(y)).$$

Pelas Eqs. (57) e (58), uma imagem $\mathbb{I}(M_{\mathbf{A}}(x), M_{\mathbf{B}}(y))$ em $\mathbb{U}$ fornece interpretação para o grau intervalar de verdade da condicional fuzzy intervalar, considerando a regra R (3.5.3).

Na construção dual, as correspondentes funções de pertinência $N_{\mathbf{A}} : X \to \mathbb{U}$, $N_{\mathbf{B}} : Y \to \mathbb{U}$ são definidas pelas expressões:

$$N_{\mathbf{A}}(x) = [\underline{N_{\mathbf{A}}}(x), \overline{N_{\mathbf{A}}}(x)] = [N_S(\overline{M_{\mathbf{A}}}(x)), N_S(\underline{M_{\mathbf{A}}}(x))]; \tag{59}$$

$$N_{\mathbf{B}}(y) = [\underline{N_{\mathbf{B}}}(y), \overline{N_{\mathbf{B}}}(y)] = [N_S(\overline{M_{\mathbf{B}}}(y)), N_S(\underline{M_{\mathbf{B}}}(y))]. \tag{60}$$

Neste contexto, para uma coimplicação fuzzy valorada intervalarmente $\mathbb{J} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$, o intervalo $\mathbb{J}(N_{\mathbf{A}}(x), N_{\mathbf{B}}(y))$ em $\mathbb{U}$ é interpretado como o grau de não verdade da regra da condicional fuzzy R (3.5.3).

Desta maneira, $N_{\mathbf{A}}(x)$ e $N_{\mathbf{B}}(y)$ indicam os graus de não pertinência do elemento $x \in X$ e $y \in Y$ nos conjuntos fuzzy intervalares $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, respectivamente, proporcionando a correspondência entre os elementos de conjuntos $X \times Y$ e $\mathbb{U}$:

$$(x, y) \longrightarrow \mathbb{J}(N_{\mathbf{A}}(x), N_{\mathbf{B}}(y)).$$

As relações descritas pela Def. 6 e as Eqs. de (57) a (60) estão resumidas no diagrama comutativo da Figura 7.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \arrow[dl, "\mathbb{J} \circ (N_A, N_B)"'] \arrow[d, shift right=2, "(N_A, N_B)"'] \arrow[d, shift left=2, "(M_A, M_B)"] \arrow[dr, "\mathbb{I} \circ (M_A, M_B)"] & \\
U & \mathbb{U} \times \mathbb{U} \arrow[l, "\mathbb{J}"'] \arrow[r, "\mathbb{I}"] & \mathbb{U}
\end{tikzcd}$$

Figura 7: Interpretação das (co)implicações fuzzy intervalares

#### 3.5.3.1 *Exemplos de Implicações e Coimplicações Fuzzy Intervalares*

A extensão intervalar das (co)implicações da lógica fuzzy definidas em (LIN; XIA, 2006) é apresentada logo a seguir na Tabela 5 da Exemplificação 2, e para tal, considera-se a notação:

1. $\bigwedge$ da Eq.(47) como a operação intervalar de mínimo;

2. $\bigvee$ da Eq.(48) para a operação intervalar de máximo; e

3. a negação forte $\mathbb{N}_S(X) = [N_S(\overline{X}), N_S(\underline{X})]$.

**Exemplo 2.** *Considera-se como exemplo a implicação de Kleene-Dienes $I_{KD} : U^2 \to U$, e sua correspondente coimplicação $(I_{KD})_N : U^2 \to U$, apresentada em (LIN; XIA, 2006), para obter-se a abordagem intervalar:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(X, Y) &= ((\mathbf{1} - X) \bigvee Y) = \bigvee(\mathbf{1} - X, Y) = [\vee(1 - \overline{X}, \underline{Y}), \vee(1 - \underline{X}, \overline{Y})]; \\
\mathbb{J}(X, Y) &= ((\mathbf{1} - X) \bigwedge Y) = \bigwedge(\mathbf{1} - X, Y) = [\wedge(1 - \overline{X}, \underline{Y}), \wedge(1 - \underline{X}, \overline{Y})].
\end{aligned}$$

*Considerações análogas podem ser descritas para as implicações de Reichenbach ($I_{RC}$), de Łukasiewicz ($I_{LK}$) e muitas outras, veja Tabela 5.*

| | Implicação Fuzzy Intervalar | Coimplicação Fuzzy Intervalar |
|---|---|---|
| KD: | $\mathbb{I}(X,Y) = (\mathbf{1} - X) \bigvee Y$ | $\mathbb{J}(X,Y) = (\mathbf{1} - X) \bigwedge Y$ |
| RC: | $\mathbb{I}(X,Y) = \mathbf{1} - X + XY$ | $\mathbb{J}(X,Y) = Y - XY$ |
| LZ: | $\mathbb{I}(X,Y) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{se } X \leq Y; \\ \mathbf{1} - X + Y & \text{se } X > Y. \end{cases}$ | $\mathbb{J}(X,Y) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se } X \geq Y; \\ Y - X & \text{se } X < Y. \end{cases}$ |
| Zadeh: | $\mathbb{I}(X,Y) = (\mathbf{1} - X) \bigvee (X \bigwedge Y)$ | $\mathbb{J}(X,Y) = (\mathbf{1} - X) \bigwedge (X \bigvee Y)$ |
| P.C.: | $\mathbb{I}(X,Y) = XY$ | $\mathbb{J}(X,Y) = X + Y - XY$ |
| B.C.: | $\mathbb{I}(X,Y) = \mathbf{0} \bigvee (X + Y - \mathbf{1})$ | $\mathbb{J}(X,Y) = \mathbf{1} \bigwedge (X + Y)$ |
| P.D.: | $\mathbb{I}(X,Y) = X + Y - XY$ | $\mathbb{J}(X,Y) = XY$ |
| B.D.: | $\mathbb{I}(X,Y) = \mathbf{1} \bigwedge (X + Y)$ | $\mathbb{J}(X,Y) = \mathbf{0} \bigvee (X + Y - \mathbf{1})$ |

Tabela 5: Implicações e Coimplicação Fuzzy Intervalares

## 3.6 Considerações Finais

Este capítulo descreveu os principais conceitos da lógica fuzzy intervalar, automorfismos intervalares, incluindo a interpretação de regras condicionais baseadas em (co)implicações fuzzy intervalares. Na sequência, estes resultados serão aplicados na definição da classe de IvIFIs e IvFCs obtidas por funções intervalares de agregação idempotentes e pares de funções intervales duais.

# 4 IMPLICAÇÕES FUZZY INTUICIONISTAS INTERVALARES

Neste capítulo as implicações fuzzy intuicionistas intervalares são estudas, incluindo propriedades e exemplificação. Introduzimos então a extensão intervalar da classe de implicações intuicionistas obtidas por um conjunto de agregadores fuzzy intervalares e pares de funções intervalares duais, uma implicação fuzzy intervalar e sua correspondente coimplicação fuzzy intervalar.

## 4.1 Conjuntos Fuzzy Intuicionistas Intervalares

Esta primeira sessão reporta alguns conceitos de lógica fuzzy intuicionista intervalar, apresentando alguns conectivos nesta abordagem fuzzy e principais propriedades.

A teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares (ATANASSOV, 1989) generaliza a teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas propostos por Atanassov (ATANASSOV, 1986). Dado um conjunto fuzzy intuicionista intervalar $\tilde{\mathbb{A}}$, associa-se a cada elemento $x \in X$, sendo $X$ um conjunto não-vazio, um grau de pertinência intervalar $M_{\tilde{\mathbb{A}}}(x)$ e o grau de não-pertinência intervalar $N_{\tilde{\mathbb{A}}}(x)$. Desta forma um conjunto fuzzy intuicionista intervalar $\tilde{\mathbb{A}}$ é representado por tuplas $(x, M_{\tilde{\mathbb{A}}}(x), N_{\tilde{\mathbb{A}}}(x))$.

A teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares agrega a imprecisão ao grau intervalar de pertinência $M_{\tilde{\mathbb{A}}}(x)$, e de não-pertinência $N_{\tilde{\mathbb{A}}}(x)$, incluindo os seus complementos intervalares, os quais não são necessariamente iguais ao grau intervalar de não-pertinência e de pertinência, respectivamente. Desta maneira, estende-se a notação dos conjuntos fuzzy intuicionistas, justificando um estudo estendido das relações de ordem e demais propriedades que caracterizam esta teoria preservando as características dos conjuntos fuzzy e dos conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares.

Considere $\tilde{\mathbb{U}} = \{\tilde{X} = (X_1, X_2) \in \mathbb{U}^2 | X_1 + X_2 \leq \mathbf{1}\}$ e os conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares

$$\tilde{\mathbb{A}} = \{\tilde{X} = (M_{\tilde{\mathbb{A}}}(x), N_{\tilde{\mathbb{A}}}(x)) | \tilde{x} \in X\} \text{ e } \tilde{\mathbb{B}} = \{\tilde{Y} = (M_{\tilde{\mathbb{B}}}(y), N_{\tilde{\mathbb{B}}}(y)) | \tilde{y} \in Y\},$$

tais que, $\forall x \in X, y \in Y$, tem-se:

$$M_{\tilde{\mathbb{A}}}(x) + N_{\tilde{\mathbb{A}}}(x) \leq \mathbf{1}; M_{\tilde{\mathbb{B}}}(x) + N_{\tilde{\mathbb{B}}}(x) \leq \mathbf{1}.$$

Para quaisquer $\tilde{X} = (X_1, X_2)$, $\tilde{Y} = (Y_1, Y_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$, $X_1 + X_2 \geq \mathbf{1}$ e $Y_1 + Y_2 \geq \mathbf{1}$, consideremos as seguintes relações binárias (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003):

$$(i)\ \tilde{X} \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{Y} \text{ se, e somente se, } X_1 \leq Y_1 \text{ e } X_2 \geq Y_2; \quad (61)$$

$$(ii) \tilde{X} \preceq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{Y} \text{ se, e somente se, } X_1 \leq Y_1 \text{ e } X_2 \leq Y_2. \quad (62)$$

A cada conjunto fuzzy intuicionista intervalar tem-se duas projeções associadas, $l_{\tilde{\mathbb{U}}}, r_{\tilde{\mathbb{U}}} : \tilde{\mathbb{U}} \to \mathbb{U}$, definidas pelas expressões:

$$l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\tilde{X}) = l_{\tilde{\mathbb{U}}}(X_1, X_2) = X_1, \tag{63}$$

$$r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\tilde{X}) = r_{\tilde{\mathbb{U}}}(X_1, X_2) = X_2 \tag{64}$$

Considera-se também o subconjunto de $\tilde{\mathbb{D}} \subset \tilde{\mathbb{U}}$ denominado conjunto diagonal de $\tilde{\mathbb{U}}$ e dado por:

$$\tilde{\mathbb{D}} = \{\tilde{X} : l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\tilde{X}) + r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\tilde{X}) = \mathbf{1}\}.$$

Assim, um elemento da diagonal (ou seja $X \in \tilde{\mathbb{D}}$ é da forma $([x, x], [1 - x, 1 - x])$. Portanto, se $(X, \mathbf{1} - X)$ é um elemento diagonal de $\tilde{\mathbb{U}}$, $X$ e $\mathbb{N}_S(X)$ são intervalos degenerados, ou ainda, $X, \mathbb{N}_S(X) \in \mathbb{D}[\mathbb{U}]$.

Na sequência, as principais operações e conceitos relacionados para os conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares são estudados. Ampliando alguns dos conceitos como o índice fuzzy intuicionista intervalar e realizando o estudo de alguns dos principais conectivos da lógica fuzzy intuicionista intervalar, tais como negação, implicação fuzzy intuicionista intervalar, algumas das propriedades e exemplificações são consideradas.

O presente trabalho tem foco no estudo das implicações fuzzy intuicionistas intervalares, por considerar as relevantes aplicações para modelagem da indecisão e incertezas em áreas como o processamento de imagens (XU; YAGER, 2009), entre outras tantas.

Logo, na próxima sessão descreve-se a principal contribuição deste trabalho, a extensão do trabalho de (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004) para a abordagem intervalar e, realiza-se a análise de algumas das propriedades presentes na literatura.

## 4.2 Conceitos de Lógica Fuzzy Intuicionista Intervalar

Esta seção estende o trabalho proposto em (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004) apresentando a definição para as implicações fuzzy intuicionistas intervalares e descrevendo as principais propriedades analisadas brevemente, pois os resultados são apresentados em (VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2011).

### 4.2.1 Negação Fuzzy Intuicionista Intervalar

A função $\tilde{\mathbb{N}} : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ é uma **negação fuzzy intuicionista intervalar** se

$\tilde{\mathbb{N}}\mathbf{1}$ : $\tilde{\mathbb{N}}(\tilde{\mathbf{0}}) = \tilde{\mathbb{N}}(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \tilde{\mathbf{1}}$ e $\tilde{\mathbb{N}}(\tilde{\mathbf{1}}) = \tilde{\mathbb{N}}(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{0}}$;

$\tilde{\mathbb{N}}\mathbf{2}$ : Se $\tilde{X} \geq \tilde{Y}$ então $\tilde{\mathbb{N}}(\tilde{X}) \leq \tilde{\mathbb{N}}(\tilde{Y})$, $\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\mathbb{U}}$.

Negações fuzzy intuicionistas intervalares que satisfazem a propriedade involutiva:

$\tilde{\mathbb{N}}\mathbf{3}$ : $\tilde{\mathbb{N}}(\tilde{\mathbb{N}}(\tilde{X})) = \tilde{X}$, $\forall \tilde{X} \in \tilde{\mathbb{U}}$.

são chamadas **negações fuzzy intuicionistas intervalares fortes** (SIvIFN).

A extensão intuicionista intervalar da negação padrão é uma SIvIFN expressa por:

$$\tilde{\mathbb{N}}_S(\tilde{X}) = \tilde{\mathbb{N}}_S(X_1, X_2) = (X_2, X_1). \tag{65}$$

### 4.2.2 Índice Fuzzy Intuicionista Intervalar

O índice fuzzy intuicionista é considerado do grau de hesitação de $x$ em $\mathbf{A}$, ou seja, é a medida de indeterminação obtido através da negação da soma dos graus de pertinência e de não-pertinência. Que este cálculo, só faz sentido quando estes graus não são complementares, ou seja, são intuicionistas.

O cálculo que mede a magnitude do grau de fuzzicação de um conjunto intuicionista é chamado de entropia intuicionista, sendo que este cálculo faz uso do índice intuicionista, veja (BUSTINCE; BURILLO, 1995; HONG, 1998).

**Definição 8.** *Sejam $M_{\mathbf{A}}(x)$ e $N_{\mathbf{A}}(x)$ graus intervalares de pertinência e de não-pertinência do elemento $x \in \mathcal{X}$ em um conjunto fuzzy intuicionista intervalar $\mathbf{A}$, respectivamente. A função $\Pi : \tilde{\mathbb{U}} \longrightarrow \mathbb{U}$, define o **índice fuzzy intuicionista intervalar** de um elemento $x$ em um conjunto fuzzy intuicionista intervalar $\mathbf{A}$, pela expressão:*

$$\Pi_{\mathbf{A}}(x) = \mathbb{N}_S(M_{\mathbf{A}}(x) + N_{\mathbf{A}}(x)) \tag{66}$$

Baseado na Def. 8, segue-se que $\Pi_{\mathbf{A}}(x) \leq \mathbb{N}_S(M_{\mathbf{A}}(x)) = \bigvee(\mathbb{N}_S(M_{\mathbf{A}}(x)), N_{\mathbf{A}}(x))$. E, quando $\tilde{X} = (M_A(x), N_A(x)) = (X_1, X_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$, denota-se $\Pi_{\mathbf{A}}(x)$ por $\Pi_{\tilde{X}}$. Assim, a Eq. (66) pode ser expressa por $\Pi_{\tilde{X}} = \mathbb{N}_S(X_1 + X_2)$, com $\mathbf{0} \leq_{\mathbf{U}} \Pi_{\tilde{X}} \leq_{\mathbf{U}} \mathbf{1}$.

**Proposição 17.** *Uma IvIFI de $\tilde{X} = (X_1, X_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$ pode ser caracterizada por:*

$$\Pi_{\tilde{X}} = [N_S(\overline{X_1 + X_2}), N_S(\underline{X_1 + X_2})]. \tag{67}$$

**Prova.** *Quando $\tilde{X} = X_1 + X_2$, pela Def. 8 e Eq. (65), considera-se que $\Pi_{\tilde{X}} = \mathbb{N}_S(X_1 + X_2)$. Então, $\mathbb{N}_S(X) = \mathbb{N}_S[(\underline{X_1 + X_2}, \overline{X_1 + X_2})] = [N_S(\overline{X_1 + X_2}), N_S(\underline{X_1 + X_2})]$. Assim, Eq. (67) é verificada.* □

**Proposição 18.** *Considere $\tilde{U} = \{(x_1, x_2) \in U^2 | x_1 \leq N_S(x_2)\}$ e $\pi_{\tilde{x}}$ é o índice fuzzy intuicionista de $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$, dado por $\pi_{\tilde{x}} = N_S(x_1 + x_2)$ (veja (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Section 1.2)). Então, considera-se para todo $\tilde{X} = (X_1, X_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$.*

$$\Pi_{\tilde{X}} = [\pi_{(\overline{X_1}, \overline{X_2})}, \pi_{(\underline{X_1}, \underline{X_2})}].$$

**Prova.** *Uma vez que $X_1 + X_2 \leq_{\mathbf{U}} \mathbf{1}, \underline{X_1} + \underline{X_2} \leq 1$ e $\overline{X_1} + \overline{X_2} \leq 1$; o que significa $(\overline{X}_1, \overline{X}_2)$ $(\underline{X}_1, \underline{X}_2) \in \tilde{U}$. Assim, afirma-se que $\Pi_{(X_1, X_2)} = \mathbb{N}_S(X_1 + X_2) = [N_S(\overline{X_1 + X_2}); N_S(\underline{X_1 + X_2})]$. Portanto, tem-se que $\Pi_{(X_1, X_2)} = [N_S(\overline{X_1} + \overline{X_2}), N_S(\underline{X_1} + \underline{X_2})] = [\pi_{(\overline{X_1}, \overline{X_2})}, \pi_{(\underline{X_1}, \underline{X_2})}]$.* □

## 4.3 Automorfismos Intuicionistas Intervalares

Para todo $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{U}$, seja $\leq_{\tilde{\mathbb{U}}}$ sendo a relação em ordem $\tilde{\mathbb{U}}$, definida pela Eq. (61), o que significa $X_1 \leq_{\mathbb{U}} Y_1$ e $X_2 \geq_{\mathbb{U}} Y_2$. Portanto, segue-se que:

$$\tilde{X} \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{Y} \text{ implica que } \underline{X_1} \leq \underline{Y_1},\ \overline{X_1} \leq \overline{Y_1},\ \underline{X_2} \geq \underline{Y_2} \text{ e } \overline{X_2} \leq \overline{Y_2}. \tag{68}$$

Adicionalmente, $\tilde{\mathbf{0}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{X} \leq_{\tilde{U}} \tilde{Y} \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$, para todo $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\mathbb{U}}$.

**Definição 9.** *A função $\Phi : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ é um **automorfismo intuicionista intervalar** (IvIA) em $\tilde{\mathbb{U}}$ se ele é bijetivo e $\tilde{X} \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{Y}$, se e somente se $X_1 \leq_{\mathbb{U}} X_2$ e $Y_1 \geq_{\mathbb{U}} Y_2$. O conjunto de todos os IvIAs em $\tilde{\mathbb{U}}$ é denotado por $Aut(\tilde{\mathbb{U}})$.*

Seja $Aut(\tilde{U})$ o conjunto de todos os automorfismos em $\tilde{U}$. Assim, $(Aut(\tilde{U}), \circ)$ é um grupo, ele é fechado sob a composição; e para todo $\phi \in Aut(\tilde{U})$ existe o inverso $\phi^{-1} \in \tilde{U}$ com a função identidade em $\tilde{U}$ sendo o elemento neutro.

A ação de um IvIA $\Phi : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ numa função fuzzy intuicionista $\mathbb{F} : \tilde{\mathbb{U}}^n \to \tilde{\mathbb{U}}$ é também uma função fuzzy intuicionista $\mathbb{F}^{\Phi} : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ chamada **conjugado intuicionista intervalar de** $\mathbb{F}$, definida para todo $\widetilde{X_1}, \ldots, \widetilde{X_n} \in \tilde{\mathbb{U}}$ a seguir

$$\mathbb{F}^{\Phi}(\widetilde{X_1}, \ldots, \widetilde{X_n}) = \Phi^{-1}(\mathbb{F}(\Phi(\widetilde{X_1}), \ldots, \Phi(\widetilde{X_n}))). \tag{69}$$

Concluindo, a Proposição 19 garante que, para todo $\tilde{X} = (X, \mathbf{1} - X) \in \tilde{D}$, $\Phi$ preserva elementos diagonais em $\tilde{\mathbb{U}}$, isto é $l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(\tilde{X})) + r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(\tilde{X})) = \mathbf{1}$:

**Proposição 19.** *Seja $\Phi$ um automorfismo intuicionista intervalar em $\tilde{\mathbb{U}}$. Então, $\Phi(\tilde{\mathbb{D}}) = \tilde{\mathbb{D}}$.*

**Prova.** *Segue diretamente pela Definição 9, restrita ao subconjunto $\tilde{\mathbb{D}}$.* □

### 4.3.1 Relação entre $Aut(\mathbb{U})$ e $Aut(\widetilde{\mathbb{U}})$

Primeiramente, considera-se que $\phi_{\mathbb{U}}$-representável é um automorfismo em $\widetilde{\mathbb{U}}$ na ordem obtêm-se IvIAs a partir de automorfismos intervalares.

**Proposição 20.** *Seja $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ um automorfismo intervalar em $\mathbb{U}$. A função $\lceil \phi \rceil : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ dada por*

$$\lceil \phi \rceil(\tilde{X}) = (\phi(X_1), \mathbf{1} - \phi(\mathbf{1} - X_2)), \tag{70}$$

*para todo $\tilde{X} = (X_1, X_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$, é um IvIA chamado de **automorfismo** $\lceil \phi \rceil$-**representável** em $\tilde{\mathbb{U}}$.*

**Prova.** *Primeiramente, para todo $\tilde{X} = (X_1, X_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$, $X_1 \leq_{\mathbb{U}} \mathbf{1} - X_2$. Pela monotonicidade de $\phi$ segue-se que $\phi(X_1) \leq_{\mathbb{U}} \phi(\mathbf{1} - X_2)$. Assim, $\phi(X_1) + \mathbf{1} - \phi(\mathbf{1} - X_2) \leq_{\mathbb{U}} \mathbf{1}$. Portanto, $\lceil \phi \rceil[\tilde{\mathbb{U}}] \subseteq \tilde{\mathbb{U}}$ implica que $\lceil \phi \rceil$ é bem definida. Agora, $\lceil \phi \rceil(\tilde{\mathbf{0}}) = (\phi(\mathbf{0}), \mathbf{1} - \phi(\mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{0}}$ e analogamente, $\lceil \phi \rceil(\tilde{\mathbf{1}}) = (\phi(\mathbf{1}), \mathbf{1} - \phi(\mathbf{1}) = \tilde{\mathbf{1}}$. Além disso, seja $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\mathbb{U}}$ tais que $\tilde{X} = (X_1, X_2) \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{Y} = (Y_1, Y_2)$. Então, pela Eq. (68), considera-se que $X_1 \leq_{\mathbb{U}} Y_1$ e $X_2 \geq_{\mathbb{U}} Y_2$. Pela monotonicidade da função $\phi$, tem-se que $\phi(X_1) \leq_{\mathbb{U}} \phi(Y_1)$ e $\mathbf{1} - \phi(\mathbf{1} - X_2) \geq_{\mathbb{U}} \mathbf{1} - \phi(\mathbf{1} - Y_2)$. Assim, se $\tilde{X} \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{Y}$ então $\lceil \phi \rceil(\tilde{X}) \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \lceil \phi \rceil \tilde{Y})$. Portanto, pode-se concluir que $\lceil \phi \rceil$ é uma função monotonica em $\tilde{\mathbb{U}}$. Na construção inversa, quando $\lceil \phi \rceil(\tilde{X}) \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \lceil \phi \rceil(\tilde{Y})$, pela Eq. (70), assume-se que $(\phi(X_1), \mathbf{1} - \phi(\mathbf{1} - X_2)) \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} (\phi(Y_1), \mathbf{1} - \phi(\mathbf{1} - Y_2))$, ou equivalentemente, $\phi(X_1) \leq_{\mathbb{U}} \phi(Y_1)$ e $\phi(\mathbf{1} - X_2) \leq_{\mathbb{U}} \phi(\mathbf{1} - Y_2)$. Uma vez que $\phi$ é um automorfismo em $\mathbb{U}$, segue que $X_1 \leq_{\mathbb{U}} Y_1$ e $X_2 \leq_{\mathbb{U}} Y_2$. E, ambas inequações anteriores demandam $X \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} Y$. A bijeção de $\lceil \phi \rceil$, segue-se de forma direta a partir da bijetividade da função $\phi$ e pela Eq. (70).* □

**Proposição 21.** *Para todo $\phi \in Aut(\mathbb{U})$ e $X \in \mathbb{U}$, o operador $\lceil\ \rceil : Aut(\mathbb{U}) \to Aut(\tilde{\mathbb{U}})$, definido pela Eq. (70), é uma bijeção que preserva a relação de ordem.*

**Prova.** *Direta pela Proposição 20.* □

Pela restrição do subconjunto dos diagonais $\tilde{\mathbb{D}}$ em $\tilde{\mathbb{U}}$, considera-se as funções de projeção, para todo $\tilde{X} = (X, \mathbf{1} - X) \in \tilde{\mathbb{D}}$, é possível obter um automorfismo intervalar a partir de um automorfismo intuicionista intervalar, como mostrado abaixo, na Proposição 22:

**Proposição 22.** *Seja $\Phi : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ um automorfismo intuicionista intervalar em $\tilde{\mathbb{U}}$. Então $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}, \Phi_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ são automorfismo em $\mathbb{U}$ respectivamente obtidos pelas funções de projeção apresentadas nas Eqs. (63) e (64) dada pela seguinte expressão:*

$$\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X) = l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(X, \mathbf{1} - X)); \tag{71}$$
$$\Phi_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X) = \mathbf{1} - r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(X, \mathbf{1} - X)). \tag{72}$$

**Prova.** *Apresenta-se a prova da Eq. (71). A outra prova pode ser feita analogamente. Primeiramente, uma vez que $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(\mathbf{0}) = l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(\tilde{\mathbf{0}})) = l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\tilde{\mathbf{0}}) = l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{0}$ e $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(\tilde{\mathbf{1}}) = l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(\tilde{\mathbf{1}})) = l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\tilde{\mathbf{1}}) = l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{1}$, as condições de contorno são preservadas pelas funções $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}$. Agora, supõe-se que, $\tilde{X}[(X, \mathbf{1} - X) = ([x, x], [1 - x, 1 - x])$, $\tilde{Y} = (Y, \mathbf{1} - Y) = ([y, y], [1 - y, 1 - y]]) \in \tilde{\mathbb{U}}$ tais que $\tilde{X} \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{Y}$. Então, pela Eq. (68), segue que $X \leq_{\mathbb{U}} Y$ e $\mathbf{1} - X \geq_{\mathbb{U}} \mathbf{1} - Y$. Adicionalmente, baseada na monotonicidade de $\Phi$ e das funções de projeção em $\tilde{\mathbb{U}}$, tem-se que:*

$$\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X) = l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(X, \mathbf{1} - X)) \leq_{\mathbb{U}} l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(Y, \mathbf{1} - Y)) = \Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(Y).$$

*Portanto, $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}$ é uma função não-decrescente. Com base na especificidade do complemento $\mathbf{1} - X$ de cada $X \in \mathbb{U}$, segue que:*

$$\begin{aligned}\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X_1) = \Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X_2) &\Leftrightarrow l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(X_1, \mathbf{1} - X_1)) = l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(X_2, \mathbf{1} - X_2)) \\ &\Leftrightarrow \Phi(X_1, \mathbf{1} - X_1) = \Phi(X_2, \mathbf{1} - X_2).\end{aligned}$$

*Adicionalemnte, pela monotonicidade de $\Phi$, também podemos concluir que $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X_1) = \Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X_2) \Leftrightarrow X_1 = X_2$. Assim, $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}$ é uma função injetiva em $\mathbb{U}$. Além disso, uma vez que $\Phi$ é um automorfismo, para todo $Y = l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \Phi(X, \mathbf{1} - X) \in \mathbb{U}$ existe $X \in \mathbb{U}$ tais que $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X) = Y$. Portanto, $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}} \in Aut(\mathbb{U})$.* □

**Proposição 23.** *Quando $\Phi : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ é um automorfismo intuicionista intervalar, $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}} = \Phi_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}}$.*

**Prova.** *Para todo $X \in \mathbb{U}$, segue-se que:*

$$\begin{aligned}\Phi_{r_{\mathbb{U}}}(X) &= \mathbf{1} - r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(X, \mathbf{1} - X)) \ pela\ Eq.\ (72) \\ &= \mathbf{1} - r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\widetilde{\Phi_{l_{\mathbb{U}}}}(X, \mathbf{1} - X)) \ pela\ Eq.\ (73) \\ &= \mathbf{1} - r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X), \mathbf{1} - \Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X)) = \mathbf{1} - \mathbf{1} + \Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X) = \Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X) \ pela\ Eq.\ (70)\end{aligned}$$

*Portanto, $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}} = \Phi_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}}$.* □

**Proposição 24.** *Seja $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ um automorfismo intervalar $\Phi : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ é um automorfismo $\Phi$-representável. Então, segue que $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}} = \Phi = \Phi_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}}$.*

**Prova.** *Para todo $X \in \tilde{\mathbb{U}}$, tem-se que:*

$$\begin{aligned}\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X) &= l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(X, \mathbf{1} - X)) \ pela\ Eq.\ (71) \\ &= l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(X), \mathbf{1} - \Phi(X)) = \Phi(X) \ pela\ Eq.\ (70) \\ \Phi_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X) &= \mathbf{1} - r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi(X, \mathbf{1} - X)) \ pela\ Eq.\ (72) \\ &= \mathbf{1} - r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\Phi_(X), \mathbf{1} - \Phi(X)) = \mathbf{1} - \mathbf{1} + \Phi(X) = \Phi(X) \ pela\ Eq.\ (70)\end{aligned}$$

*Logo, conclui-se que $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}} = \Phi = \Phi_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}}$.* □

Na próxima proposição, mostra-se que IvIAs em $\tilde{\mathbb{U}}$ são preservados pela composição entre o operador $\lceil\ \rceil : Aut(\tilde{\mathbb{U}}) \to Aut(\mathbb{U})$, definido na Eq. (70), e automorfismos intervalares $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}, \Phi_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ obtidos pelas Eqs. (71) e (72), respectivamente.

**Proposição 25.** *Quando $\Phi : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ é um automorfismo intuicionista intervalar e considerando $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}, \Phi_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ obtido pelas Eqs. (71) e (72), respectivamente. Então, segue-se que:*

$$\lceil \Phi_{l_{\mathbb{U}}} \rceil = \Phi \quad e \quad \lceil \phi \rceil_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}} = \phi. \tag{73}$$

*Analogamente, pode ser obtida para a projeção à direita.*

### 4.3.2 Relação entre $Aut(U)$ e $Aut(\tilde{\mathbb{U}})$

**Proposição 26.** *Para todo $\tilde{X} = (X_1, X_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$ e $\phi \in Aut(U)$, seja $[\phi] : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ uma função definida por:*

$$[\phi](\tilde{X}) = ([\phi(\underline{X_1}), \phi(\overline{X_1})], [1 - \phi(1 - \underline{X_2}), 1 - \phi(1 - \overline{X_2})]), \tag{74}$$

*é chamado um **automorfismo $\phi$-representável** em $\tilde{\mathbb{U}}$. Então, para todo $\tilde{X} \in \tilde{\mathbb{U}}$, $\phi, \pi, \delta \in Aut(U)$, tem-se o seguinte:*

**(i)** *$[\phi]$ é uma função bem definida em $\tilde{\mathbb{U}}$;*

**(ii)** *$[\phi]$ preserva as condições de borda: $[\phi](\tilde{\mathbf{0}}) = \tilde{\mathbf{1}}$ e $[\phi](\tilde{\mathbf{1}}) = \tilde{\mathbf{0}}$.*

**(iii)** *$\tilde{X} \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{Y}$, se e somente se, $[\phi](\tilde{X}) \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} [\phi](\tilde{Y})$.*

**(iv)** *$[\phi] \in Aut(\tilde{\mathbb{U}})$;*

**(v)** *$[\phi] = id_{\tilde{\mathbb{U}}}$ sempre que $\phi = id_U$;*

**(vi)** *$[\phi] \circ [\pi] = [\phi \circ \pi]$;*

**(vii)** *$[\phi^{-1}] = [\phi]^{-1}$;*

**(viii)** *$([\phi] \circ [\pi]) \circ [\delta] = [\phi] \circ ([\pi] \circ [\delta])$;*

**Prova.** *Considere $[\phi]$ tal como definido na Eq. (74).*

**(i)** *Por hipótese, se $\tilde{X} = (X_1, X_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$ então $X_1 + X_2 \leq_{\mathbb{U}} \mathbf{1}$ isso implica que $\underline{X_1} + \underline{X_2} \leq 1$ e $\overline{X_1} + \overline{X_2} \leq 1$. Uma vez que $\phi$ é uma função não-decrescente, tem-se que $\phi(\underline{X_1}) \leq \phi(1 - \underline{X_2})$ e $\phi(\overline{X_1}) \leq \phi(1 - \overline{X_2})$, ou equivalente, $\phi(\underline{X_1}) + 1 - \phi(1 - \underline{X_2}) \leq 1$ e $\phi(\overline{X_1}) + 1 - \phi(1 - \overline{X_2}) \leq 1$. Assim, $[\phi(\underline{X_1}) + \phi(\overline{X_1})] + [\phi(1 - \underline{X_2}), \phi(1 - \overline{X_2})] \leq \mathbf{1}_{\mathbb{U}}$, conclui-se que $[\phi]$ é bem definida.*

**(ii)** $[\phi](\tilde{\mathbf{0}}) = [\phi](\mathbf{0}, \mathbf{1}) = ([\phi(0), \phi(0)], [1 - \phi(0), 1 - \phi(0)]) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \tilde{\mathbf{0}}$ e $[\phi](\tilde{\mathbf{1}}) = [\phi](\mathbf{1}, \mathbf{0}) = ([\phi(1), \phi(1)], [1 - \phi(1), 1 - \phi(1)]) = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{1}}$.

**(ii)** *Quando $\tilde{X} \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{Y}$ então $X_1 \leq_{\mathbb{U}} Y_1$ e $X_2 \geq_{\mathbb{U}} Y_2$. Assim, $\phi(X_1) \leq_{\mathbb{U}} \phi(Y_1)$ e $[\phi(\underline{X_1}), \phi(\overline{X_1})] \leq_{\mathbb{U}} [\phi(\underline{Y_1}), \phi(\overline{Y_1})]$. Analogamente, $\phi(X_2) \geq_{\mathbb{U}} \phi(Y_2)$ e $[1 - \phi(1 - \underline{X_2}), 1 - \phi(1 - \overline{X_2})] \geq [1 - \phi(1 - \underline{Y_2}), 1 - \phi(1 - \overline{Y_2})$. Portanto, considera-se que $[\phi](\tilde{X}) \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} [\phi](\tilde{Y})$. Agora, considerando que $[\phi](X) \leq_{\mathbb{U}} [\phi](Y)$, tem-se duas situações: (1) $[\phi(\underline{X_1}), \phi(\overline{X_1}] \leq_{\mathbb{U}} [\phi(\underline{Y_1}), \phi(\overline{Y_1}]$, que significa $\phi(\underline{X_1}) \leq \phi(\underline{Y_1})$ e*

*$\phi(\overline{X_1}) \leq \phi(\overline{Y_1})$. Uma vez que $\phi$ é um automorfismo em $U$, $X_1 \leq_{\mathbb{U}} Y_1$. (2) $[1-\phi(1-\underline{X_2}), 1-\phi(1-\overline{X_2})] \geq_{\mathbb{U}} [1-\phi(1-\underline{Y_2}), 1-\phi(1-\overline{Y_2})]$ e então, $\phi(1-\underline{X_2}) \leq \phi(1-\underline{X_2})$ e $\phi(1-\overline{X_2}) \leq \phi(1-\overline{X_2})$ considera-se que $\overline{X_2} \geq \underline{Y_2}$ e $\overline{X_2} \geq \overline{Y_2}$. Portanto, basedo em (1) e (2) tem-se que $X \leq_{\mathbb{U}} Y$. Assim, conclui-se que $\tilde{X} \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} \tilde{Y}$, se e somente se, $[\phi](\tilde{X}) \leq_{\tilde{\mathbb{U}}} [\phi](\tilde{Y})$.*

**(iv)** *Direta a partir da (**ii**) e (**iii**) e da bijeção de um automorfismo $\phi$ em $U$.*

**(v)** *Direta pela Definição apresentada na Eq.( 74).*

**(vi)** *Baseado na monotonicidade de $\pi$ e $\phi$ segue-se que:*

$$\begin{aligned} [\pi \circ \phi](\tilde{X}) &= ([\pi \circ \phi(\underline{X_1}), \pi \circ \phi(\overline{X_1})], [1-(\pi \circ \phi)(1-\underline{X_2}), 1-(\pi \circ \phi)(1-\overline{X_2})]) \\ &= [\tilde{\pi}]([\phi(\underline{X_1}), \phi(\overline{X_1})], [1-\phi(1-\underline{X_2}), 1-\phi(1-\overline{X_2})]) \\ &= [\tilde{\pi}] \circ [\phi](X_1, X_2) = [\tilde{\pi}] \circ [\phi](\tilde{X}). \end{aligned}$$

**(vii)** *Baseado na bijeção de $\phi$, segue-se que:*

$$\begin{aligned} [\phi] \circ [\phi^{-1}](\tilde{X}) &= [\phi]([\phi^{-1}(\underline{X_1}), \phi^{-1}(\overline{X_1})], [1-\phi^{-1}(1-\underline{X_2}), 1-\phi^{-1}(1-\overline{X_2})]) \\ &= ([(\phi \circ \phi^{-1}(\underline{X_1}), (\phi \circ \phi^{-1}(\overline{X_1})], [(\phi \circ \phi^{-1}(\underline{X_2}), (\phi \circ \phi^{-1}(\overline{X_2})]) \\ &= ([\underline{X_1}, \overline{X_1}], [\underline{X_2}, \overline{X_2}]) = (X_1, X_2) = \tilde{X}. \end{aligned}$$

*Analogamente, pode ser provado que $[\phi^{-1}] \circ [\phi](\tilde{X}) = \tilde{X}$. Portanto, $[\Phi^{-1}] = ([\Phi])^{-1}$.*

**(viii)** *Direta pela associatividade de um automorfismo $\phi$ em $U$.*

□

**Proposição 27.** *Se $\phi \circ \pi$ é um mapeamento comutativo, então $[\phi] \circ [\pi]$ é também um mapeamento comutativo.*

$$\begin{aligned} ([\pi] \circ [\Phi])(\tilde{X}) &= ([\pi] \circ [\Phi])(X_1, X_2) \\ &= [\pi]([\phi(\underline{X_1}), \phi(\overline{X_1})], [(1-\phi(1-\underline{X_2})), 1-(\phi(1-\overline{X_2})]) \\ &= ([\pi \circ \phi(\underline{X_1}), \pi \circ \phi(\overline{X_1})], [(1-(\pi \circ \phi)(1-\underline{X_2}), (1-(\pi \circ \phi)(1-\overline{X_2}))]) \\ &= ([\phi \circ \pi(\underline{X_1}), \phi \circ \pi(\overline{X_1})], [(1-(\phi \circ \pi)(1-\underline{X_2}), (1-(\phi \circ \pi)(1-\overline{X_2}))]) \\ &= ([\Phi]([\pi(\underline{X_1}), \pi(\overline{X_1})]), [(1-\pi(1-\underline{X_2}), (1-\pi(1-\overline{X_2}))]) \\ &= ([\Phi] \circ [\pi])(X_1, X_2). \end{aligned}$$

*Portanto, conclui-se que $[\pi] \circ [\Phi] = [\Phi] \circ [\pi]$.*

**Proposição 28.** *$Aut([\Phi](\tilde{\mathbb{U}}), \circ)$ é um grupo (abeliano) sempre que $Aut(\tilde{\mathbb{U}}, \circ)$ é um grupo (abeliano) .*

**Prova.** *Direto pela Proposição 26, e por $(iv), (v), (vi)$ e $(vii)$.* □

Seja $\phi \in Aut(U)$ e $[\phi] \in Aut(\tilde{\mathbb{U}})$ é um IvIA obtido por $\phi$ em $U$ de acordo com a Eq. (74), a Proposição 29 afirma que $[\phi]$ preserva elementos diagonais em $\tilde{\mathbb{U}}$. Analogamente, a Proposição (30) mostra que a correspondente projeção em $\mathbb{U}$ também preserva intervalos degenerados.

**Proposição 29.** *Seja* $\phi \in Aut(U)$. $[\phi](\bar{\mathbb{D}}) = \bar{\mathbb{D}}$.

**Prova.** *Para todo* $[x_1, x_1], [x_2, x_2] \in \bar{\mathbb{D}}$, *segue-se que* $[\Phi]([x_1, x_1][x_2, x_2]) = ([\phi]([x_1, x_1]), 1 - [\phi]([1 - x_2, 1 - x_2]))$ *o que significa que* $[\Phi]([x_1, x_1][x_2, x_2]) = ([\phi(x_1), \phi(x_1)], [1 - \phi(1 - x_2), 1 - \phi(1 - x_2)])$. *Uma vez que* $[\phi(x_1), \phi(x_1)]$ *e* $[1 - \phi(1 - x_2), 1 - \phi(1 - x_2)]$ *são intervalos degenerados, um automorfismo* $[\Phi]$ *em* $\tilde{\mathbb{U}}$ *preserva intervalos degenerados.* □

**Proposição 30.** *Seja* $\tilde{X} \in \mathbb{D}$. *Então* $[\phi]_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

**Prova.** *Se* $\tilde{X} \in \mathbb{D}$, $l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\tilde{X}) + r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\tilde{X}) = \mathbf{1}$ *tais que* $[\phi](X) = [\phi](X, \mathbf{1} - X))$. *Pela Eq. (74) isso também significa que* $[\phi](X) = [\phi(\underline{X}), \phi(\overline{X})], [1 - \phi(\underline{1 - X}), 1 - \phi(1 - \overline{X})])$. *Portanto,* $[\phi(\underline{X}), \phi(\overline{X})] + [1 - \phi(\underline{X}), 1 - \phi(\overline{X})] = [\phi(\underline{X}) + 1 - \phi(\underline{X}), \phi(\overline{X}) + 1 - \phi(\overline{X})] = \mathbf{1}$. *Assim, conclui-se que* $[\phi](X) \in \mathbb{D}$. □

### 4.3.3 Relação entre $Aut(\tilde{U})$ e $Aut(\tilde{\mathbb{U}})$

Seguindo a mesma construção de seções anteriores, um automorfismo $\ulcorner\Phi\urcorner$-representável em $\tilde{\mathbb{U}}$ a fim de obter a partir de IvIAs automorfismos intuicionistas.

**Proposição 31.** *Quando* $\Phi \in Aut(\tilde{U})$, *para todo* $\tilde{X} = (X_1, X_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$, *uma função* $\bar{\Phi} : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}$ *dada por*

$$\ulcorner\Phi\urcorner(\tilde{X}) = ([l_{\tilde{U}}(\Phi(\underline{X_1}, 1 - \overline{X_1})), 1 - r_{\tilde{U}}(\Phi(\underline{X_1}, 1 - \overline{X_1}))], [1 - l_{\tilde{U}}(\Phi(1 - \underline{X_2}, \overline{X_2})), r_{\tilde{U}}(\Phi(1 - \underline{X_2}, \overline{X_2}))] \quad (75)$$

*é um IvIA chamado* ***automorfismo*** $\ulcorner\Phi\urcorner$***-representável*** *em* $\tilde{\mathbb{U}}$.

**Prova.** *Desde que* $\tilde{X} = (X_1, X_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$, *tem-se que* $(\underline{X_1}, 1 - \overline{X_1}) \leq_{\tilde{U}} (1 - \underline{X_2}, \overline{X_2})$. *Pela monotonicidade de* $\Phi$ *e das projecões* $l_{\tilde{U}}$ *e* $r_{\tilde{U}}$, *ambas condições mantém:*

$$((l_{\tilde{U}} \circ \Phi)(\underline{X_1}, 1 - \overline{X_1}), r_{\tilde{U}} \circ \Phi)(1 - \underline{X_1}, \overline{X_1})) \in \tilde{U} \text{ e}$$
$$((l_{\tilde{U}} \circ \Phi)(1 - \underline{X_2}, \overline{X_2}), (r_{\tilde{U}} \circ \Phi)(1 - \underline{X_2}, \overline{X_2})) \in \tilde{U}.$$

*Portanto, pode-se garantir que*

$$[(l_{\tilde{U}} \circ \Phi)(\underline{X_1}, 1 - \overline{X_1}), 1 - r_{\tilde{U}} \circ \Phi)(1 - \underline{X_1}, \overline{X_1})] \in \mathbb{U} \text{ e}$$
$$[(l_{\tilde{U}} \circ \Phi)(1 - \underline{X_2}, \overline{X_2}), (1 - r_{\tilde{U}} \circ \Phi)(1 - \underline{X_2}, \overline{X_2})] \in \mathbb{U}.$$

*Além disso, também verificam-se as próximas condições:*

$$\begin{aligned} (l_{\tilde{U}} \circ \Phi)(\underline{X_1}, 1 - \overline{X_1}) + (l_{\tilde{U}} \circ \Phi)(1 - \underline{X_2}, \overline{X_2}) &\leq 1 \\ (1 - r_{\tilde{U}} \circ \Phi)(1 - \underline{X_1}, \overline{X_1}) + (1 - r_{\tilde{U}} \circ \Phi)(1 - \underline{X_2}, \overline{X_2}) &\leq 1 \end{aligned}$$

*Assim, pode-se concluir que* $\ulcorner\Phi\urcorner(\tilde{X}) \in \tilde{\mathbb{U}}$, *para todo* $\tilde{X} \in \tilde{\mathbb{U}}$, *significando que* $\ulcorner\ \urcorner$ *é um operador bem definido. A monotonicidade e bijetividade de* $\ulcorner\ \urcorner$*-operador segue a partir da monotonicidade e bijetividade do* $\Phi$*automorfismo e projeções em* $\tilde{U}$. □

**Proposição 32.** *O operador* $\ulcorner\ \urcorner : Aut(\tilde{U}) \to Aut(\tilde{\mathbb{U}})$, *na Eq. (75), é uma bijeção preservando a ordem.*

**Prova.** *Segue direta, a partir da Proposição 31.* □

**Proposição 33.** *Seja $\Phi : \tilde{\mathbb{U}} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ um automorfismo intuicionista intervalar e $\Phi_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}, \Phi_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ são automorfismos intervalares, respectivamente definidos pelas Eqs. (72) e (71). Então, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$, a função $\Phi_{L_{\tilde{U}}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ definida por*

$$\Phi_{L_{\tilde{U}}}(\tilde{x}) = (l_{\mathbb{U}} \circ l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \Phi([x_1, x_1], [x_2, x_2]), l_{\mathbb{U}} \circ r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \Phi([x_1, x_1], [x_2, x_2])) \quad (76)$$

$$\Phi_{R_{\tilde{U}}}(\tilde{x}) = (r_{\mathbb{U}} \circ l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \Phi([x_1, x_1], [x_2, x_2]), r_{\mathbb{U}} \circ r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbf{1}_{\mathbb{U}} - \Phi([x_1, x_1], [x_2, x_2])) \quad (77)$$

*é um automorfismo intuicionista.*

**Prova.** *Direta a partir da composição de automorfismos e suas funções de projeção.* □

Resumindo os estudos referentes a automorfismos, o diagrama da figura a seguir apresenta alguns dos principais resultados obtidos. Veja que as Eqs. (43a) e (43b) juntas com as Eqs. (11)a e (11)b estão relacionados ao isomorfismo da Proposição 11 e 3, respectivamente. Analogamente, nas Eqs. (71) e (72) e Eqs. (76) e (77) são análisadas na Proposição 22 e 33, respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
& (Aut(\tilde{\mathbb{U}}),\circ) \arrow[dl, leftrightarrow, "Eqs.(71)(72)"', "Eq.(70)"] \arrow[dr, leftrightarrow, "Eqs.(76)(77)", "Eq.(75)"'] & \\
(Aut(\mathbb{U}),\circ) \arrow[dr, leftrightarrow, "Eqs.(43a)(43b)"', "Eq.(42)"] & & (Aut(\tilde{U}),\circ) \arrow[dl, leftrightarrow, "Eqs.(11)a(11)b", "Eq.(10)"'] \\
& (Aut(U),\circ) &
\end{tikzcd}$$

Figura 8: Comutatividade entre classes de automorfismos.

Para todo $\widetilde{X}$, o conjugados da negação intuicionista intervalar de $\mathbb{N}_I : \tilde{\mathbb{U}} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ é também uma negação intuicionista intervalar $\mathbb{N}_I^{\Phi} : \tilde{\mathbb{U}} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ definida por

$$\mathbb{N}_I^{\Phi}(\widetilde{X}) = \Phi^{-1}(\mathbb{N}_I(\Phi(\widetilde{X}). \quad (78)$$

Seja $\mathbb{N}_I$ uma negação fuzzy intuicionista. A função $\mathbb{N}_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}, N_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ são ambas negações fuzzy intervalares definidas por

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X) &= l_{\tilde{\mathbb{U}}}(\mathbb{N}_I(X, \mathbf{1} - X)); && (79)\\
\mathbb{N}_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}}(X) &= \mathbf{1} - r_{\tilde{\mathbb{U}}}(\mathbb{N}_I(X, \mathbf{1} - X)). && (80)
\end{aligned}$$

Denotando por $\mathcal{C}(\mathbb{N}_I)$ a classe de negações fuzzy intuicionistas intervalares,alguns dos principais resultados obtidos pelo conjugado da negação fuzzy intervalar e estudos relacionados, estão resumidos no diagrama da Fig 9.

**Proposição 34.** *Seja $\mathbb{N}_I$ uma negação fuzzy intuicionista intervalar. As funções $N_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}, l_{\mathbb{U}}}, N_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}, r_{\mathbb{U}}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ são ambas negações fuzzy intuicionistas definidas por*

$$\begin{aligned}
N_{l_{\tilde{\mathbb{U}}}, l_{\mathbb{U}}}(x_1, x_2) &= l_{\mathbb{U}} \circ l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{N}_I([x_1, x_1], [x_2, x_2]); && (81)\\
N_{r_{\tilde{\mathbb{U}}}, r_{\mathbb{U}}}(x_1, x_2) &= r_{\mathbb{U}} \circ r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{N}_I([x_1, x_1], [x_2, x_2]). && (82)
\end{aligned}$$

Analogamente, os resultados já apresentados relacionados ao conjugado da negação fuzzy intuicionista juntamente com a Proposição 34 é apresentado no diagrama comutativo da Fig. 10.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathbb{N}_I) \times Aut(\tilde{\mathbb{U}}) \arrow[r, "Eq.(78)"] \arrow[d, shift right, "Eqs.(79)(80)"'] & \mathcal{C}(\mathbb{N}_I) \arrow[d, shift left, "Eqs.(79)(80)"] \\
\mathcal{C}(\mathbb{N}) \times Aut(\mathbb{U}) \arrow[r, "Eq.(45)"] \arrow[u, shift right, "Eqs.(71)(72)"'] & \mathcal{C}(\mathbb{N}) \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
$$

Figura 9: Relações entre classes do conjugado da negação fuzzy $\mathcal{C}(\mathbb{N}_I)$ e $\mathcal{C}(\mathbb{N})$ relacionando com as familias de automorfismos $Aut(\widetilde{\mathbb{U}})$ e $Aut(\mathbb{U})$, respectivamente.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathbb{N}_I) \times Aut(\tilde{\mathbb{U}}) \arrow[r, "Eq.(78)"] \arrow[d, shift right, "Eqs.(81)(82)"'] & \mathcal{C}(\mathbb{N}_I) \arrow[d, shift left, "Eqs.(81)(82)"] \\
\mathcal{C}(N_I) \times Aut(\tilde{U}) \arrow[r, "Eq.(14)"] \arrow[u, shift right, "Eq.(75)"'] & \mathcal{C}(N_I) \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
$$

Figura 10: Relacionamento entre classes do conjugado da negação fuzzy $\mathcal{C}(N_I)$ e $\mathcal{C}(N)$ relacionando famílias de automorfismos $Aut(\tilde{U})$ e $Aut(U)$, respectivamente.

## 4.4 Implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares

Um operador de implicação intuicionista intervalar é uma função binária respeitando as condições de contorno referentes às implicações clássicas:

**Definição 10.** *Uma função intuicionista intervalar $\mathbb{I}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ é uma implicação fuzzy intuicionista intervalar se satisfaz as seguintes condições:*

**$\mathbb{I}_I 1$:** $\mathbb{I}_I(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{1}}) = \mathbb{I}_I(\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{1}}) = \mathbb{I}_I(\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{0}}) = \tilde{\mathbf{1}}$ *e* $\mathbb{I}_I(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{0}}) = \tilde{\mathbf{0}}$*;*

**Definição 11.** *Uma implicação fuzzy intuicionista intervalar (IvIFI) $(\mathbb{J}_I)\mathbb{I}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ e satisfazendo, para todo $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathbb{U}$, as propriedades:*

$\mathbb{I}_I 2$ : $\tilde{X} \leq \tilde{Z} \Rightarrow \mathbb{I}_I(\tilde{X}, \tilde{Y}) \geq \mathbb{I}_I(\tilde{Z}, \tilde{Y})$*;*

$\mathbb{I}_I 3$ : $\tilde{Y} \leq \tilde{Z} \Rightarrow \mathbb{I}_I(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leq \mathbb{I}_I(\tilde{X}, \tilde{Z})$*;*

$\mathbb{I}_I 4$ : $\mathbb{I}_I(\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{Y}) = \tilde{\mathbf{1}}$*;*

$\mathbb{I}_I 5$ : $\mathbb{I}_I(\tilde{X}, \tilde{\mathbf{1}}) = \tilde{\mathbf{1}}$*;*

Estendendo a definição de implicação apresentada em (FODOR; ROUBENS, 1994), uma implicação fuzzy intuicionista intervalar é apresentada a seguir:

**Definição 12.** *Uma implicação fuzzy intuicionista intervalar $\mathbb{I}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ é uma função satisfazendo a condição de borda $\mathbb{I}_I(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{0}}) = \tilde{\mathbf{0}}$ e, para todo $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \tilde{\mathbb{U}}$, as propriedades $\mathbb{I}_I 2, \mathbb{I}_I 3, \mathbb{I}_I 4$ e $\mathbb{I}_I 5$:*

Em (VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2011) apresenta-se a definição de implicações fuzzy, mostrando que uma implicação fuzzy intuicionista intervalar $\mathbb{I}_I$ pode ser gerada por um conjunto finito de funções de agregação $\mathcal{M}$ e por pares de funções mutuamente duais $(\mathbb{I}, \mathbb{I}_N)$, no caso, a implicação intervalar $\mathbb{I}$ e sua correspondente coimplicação intervalar $\mathbb{I}_N$, obtida a partir da negação intervalar forte $\mathbb{N}$. Esta classe de IvIFIs está baseado no trabalho de apresentado em (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004) .

**Teorema 1.** *(VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2011, Teorema 1) Sejam $\mathbb{I}$ uma implicação intervalar (Def.15), $\mathbb{I}_{\mathbb{N}}$ a coimplicação intervalar associada a $\mathbb{I}$. Considere $\mathcal{M}_{Ii} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$, $i \in \{1,2,3,4\}$ como um conjunto de funções de agregação intervalares idempotentes tais que, para todo $X, Y \in \mathbb{U}$,*

$$\mathbb{M}_1(X,Y)+\mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(X),\mathbb{N}_S(Y)) \geq [1,1];\ e\, \mathbb{M}_2((X,Y)+\mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(X),\mathbb{N}_S(Y)) \leq [1,1]. \tag{83}$$

*Então, para todo $\tilde{X} = (X_1, X_2), \tilde{Y} = (Y_1, Y_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$, a função binária $\mathbb{I}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ é uma **implicação fuzzy intuicionista intervalar** definida por:*

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y}) \ = \ & (\mathbb{I}(\mathbb{M}_1(X_1,\mathbb{N}_S(X_2),\mathbb{M}_2(Y_1,\mathbb{N}_S(Y_2)))), \\ & \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(X_1),X_2),\mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(Y_1),Y_2))). \end{aligned} \tag{84}$$

*Eq. (84) pode ser expressa pelas projeções a seguir:*

$$(l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{I}_I) = \mathbb{I}(\mathbb{M}_1(X_1,\mathbb{N}_S(X_2),\mathbb{M}_2(Y_1,\mathbb{N}_S(Y_2)))) \tag{85}$$

$$(r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{I}_I) = \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(X_1),X_2),\mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(Y_1),Y_2))) \tag{86}$$

As propriedades listadas na Def. 15, são analisada em (VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2011). A seguir, descreve-se as propriedades inerentes as implicações fuzzy intuicionistas, de acordo com (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004), considera-se as IvIFIs.

### 4.4.1 Análise de Propriedades das Implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares

Um operador de IvIFI pode exigir a verificação de algumas propriedades inerentes as implicações fuzzy intuicionistas, veja (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2006) e (CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2004). Neste contexto, considera-se a seguir as propriedades verdadeiramente fuzzy intuicionistas (VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2013):

$\mathbb{I}_I$**6** $\Pi_{\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y})} \leq \Pi_{(\mathbb{I}(\mathbb{N}_S(X_2),Y_1),\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}_S(X_1),Y_2))}$;

$\mathbb{I}_I$**7** $\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y}) \succeq_{\tilde{\mathbb{U}}} (\mathbb{I}(\mathbb{N}_S(X_2),Y_1),\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}_S(X_1),Y_2))$;

$\mathbb{I}_I$**8** $\Pi_{\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y})} \leq \bigvee(\mathbb{N}_S(X_1),\mathbb{N}_S(Y_1))$;

$\mathbb{I}_I$**9** Se $\tilde{X} = \tilde{Y}$ então $\Pi_{\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y})} = \Pi_{\tilde{X}}$;

$\mathbb{I}_I$**10** Se $\Pi_{\tilde{X}} = \Pi_{\tilde{Y}}$ então $\Pi_{\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y})} = \Pi_{\tilde{X}}$.

$\mathbb{I}_I\mathbf{11}$ $\Pi_{\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y})} = \mathbf{0}$

**Proposição 35.** *Seja $\mathbb{I}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ um operados de IvIFI cujas projeções são dadas pelas Eqs. (85) e (86). $\mathbb{I}_I$ verifica $\mathbb{I}_I$6 e $\mathbb{I}_I$7.*

**Prova.** *Seja $\mathbb{M}_{i\in\{1,2,3,4\}}$ operadores de agregação intervalares idempotentes. Então, tem-se que:*

$$X_1 \leq \mathbb{M}_1(X_1,\mathbb{N}_S(X_2)) \leq \mathbb{N}_S(X_2); \quad e \quad Y_1 \leq \mathbb{M}_2(Y_1,\mathbb{N}_S(Y_2)) \leq \mathbb{N}_S(Y_2);$$
$$X_2 \leq \mathbb{M}_3(X_2,\mathbb{N}_S(X_1)) \leq \mathbb{N}_S(X_1); \quad e \quad Y_2 \leq \mathbb{M}_4(Y_2,\mathbb{N}_S(Y_1)) \leq \mathbb{N}_S(Y_1).$$

*Por $\mathbb{I}_I1$ e $\mathbb{I}_I2$, tem-se que: (i) $\mathbb{I}(\mathbb{M}_1(X_1,\mathbb{N}_S(X_2)),\mathbb{M}_2(Y_1,\mathbb{N}_S(Y_2)) \geq \mathbb{I}(\mathbb{N}_S(X_2),Y_1)$; e (ii) $\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{M}_3(X_2,\mathbb{N}_S(X_1)),\mathbb{M}_4(Y_2,\mathbb{N}_S(Y_1)) \geq \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}_S(X_1),Y_2)$.*

$\mathbb{I}_I$**6** *Por (i) e (ii),* $\underline{\mathbb{I}_I}(\tilde{X},\tilde{Y}) + \overline{\mathbb{I}_I}(\tilde{X},\tilde{Y}) \geq \mathbb{I}(\mathbb{N}_S(X_2), Y_1) + \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}_S(X_1), Y_2)$. *Assim, tem-se que* $\Pi_{\mathbb{I}_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2))} \leq \Pi_{(\mathbb{I}(\mathbb{N}_S(X_2),Y_1),\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}_S(X_1),Y_2))}$. *Assim, verifica* $\mathbb{I}_I$*6.*

$\mathbb{I}_I$**7** *Baseado em (i) e (ii), mostra-se que* $\mathbb{I}_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) \succeq (\mathbb{I}(\mathbb{N}_S(X_2),Y_1), \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}_S(X_1),Y_2))$ *o que significa que,* $\mathbb{I}_I$ *satisfaz* $\mathbb{I}_I 7$*;*

□

**Proposição 36.** *Seja* $\mathbb{I}_I$ *um operador de IvIFI cujas projeções são dadas pelas Eqs. (85), (86).* $\mathbb{I}_I$ *verifica* $\mathbb{I}_I 8$ *se* $\mathbb{I}(X,Y) \geq \bigwedge(X,Y)$.

**Prova.** $\underline{\mathbb{I}_I}(\tilde{X},\tilde{Y}) + \overline{\mathbb{I}_I}(\tilde{X},\tilde{Y}) \geq \underline{\mathbb{I}_I}(\tilde{X},\tilde{Y}) \geq \bigwedge(X_1,Y_1)$. *Se* $\mathbb{I}(X,Y) \geq \bigwedge(X,Y)$, *então* $\Pi_{\mathbb{I}_I}(\tilde{X},\tilde{Y} \leq \mathbb{N}_S(\bigwedge(X_1,Y_1)) = \bigvee(\mathbb{N}_S(X_1),\mathbb{N}_S(Y_1))$. □

**Proposição 37.** *Seja* $\mathbb{I}_I$ *um operador de IvIFI, considerando as funções de projeção apresentadas nas Eqs. (85), (86). Se* $\mathbb{I}_I$ *verifica* $\mathbb{I}_I 9$ *então também verifica* $\mathbb{I}_I 10$.

**Prova.** *Direta.* □

**Definição 13.** *Uma IvIFI* $\mathbb{I}_I\colon \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ *satisfazendo, para todo* $\tilde{X},\tilde{Y} \in \tilde{\mathbb{D}}$, *a propriedade adicional*

$\mathbb{I}_I$**11** $\Pi_{\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y})} = \mathbf{0}$;

*é chamada uma* ***IvIFI que preserva os elementos diagonais****.*

**Lema 2.** $\Pi_{\tilde{X}} = \mathbf{0}_{\mathbb{U}}$, *se e somente se,* $\tilde{X} \in \tilde{\mathbb{D}}$.

**Prova.** $\Pi_{\tilde{X}} = \mathbf{0}_{\mathbb{U}} \Leftrightarrow \mathbb{N}_S(X_1 + X_2) = \mathbf{0}_{\mathbb{U}}$. *Assim, tem-se* $\Pi_{\tilde{X}} = \mathbf{1}_{\mathbb{U}} - (X_1 + X_2) = \mathbf{0}_{\mathbb{U}} \Leftrightarrow [1 - \overline{X_1 + X_2}; 1 - \underline{X_1 + X_2}] = \mathbf{0}_{\mathbb{U}}$. *Além disso, isto também significa que* $\Pi_{\tilde{X}} = \overline{X_1 + X_2} = 1$ *and* $\underline{X_1 + X_2} = 1 \Leftrightarrow \overline{X_1} = N_S(\overline{X_2})$ *and* $\underline{X_1} = N_S(\underline{X_2})$. *Portanto,* $\Pi_{\tilde{X}} = \tilde{X} \Leftrightarrow \tilde{X} \in \tilde{\mathbb{D}}$. □

**Proposição 38.** *Um operador de IvIFI* $\mathbb{I}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ *é um operador preservando os elementos diagonais, se e somente se,* $\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y}) \in \tilde{\mathbb{D}}$, *implica em* $\tilde{X},\tilde{Y} \in \tilde{\mathbb{D}} \subseteq \tilde{\mathbb{U}}$.

**Prova.** *(⇒) Se* $\mathbb{I}_I$ *preserva elementos diagonais então pela Def. 13,* $\Pi_{\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y})} = \mathbf{0}$ *quando* $\tilde{X},\tilde{Y} \in \tilde{\mathbb{D}}$. *Portanto, pelo Lema 2,* $\underline{\mathbb{I}_I}(\tilde{X},\tilde{Y}) \in \tilde{\mathbb{D}}$. *(⇐) Seja* $\tilde{X},\tilde{Y} \in \tilde{\mathbb{D}}$. *Se* $\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y}) \in \tilde{\mathbb{D}}$, *então existe* $\tilde{\mathbf{Z}} = (\mathbf{z_1},\mathbf{z_2}) \in \tilde{\mathbb{D}}$, *o que significa que* $\mathbf{z}_2 = \mathbf{1} - \mathbf{z}_1$, *tal que* $\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y}) = \tilde{\mathbf{Z}}$. *Portanto,* $\Pi_{\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y})} = \Pi_{\tilde{Z}} = \mathbb{N}_S(\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}) = \mathbb{N}_S(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$. *Por isso,* $\Pi_{\mathbb{I}_I(\tilde{X},\tilde{Y})} = \mathbf{0}$ *e, conclui-se, pelo Lema 2,* $\mathbb{I}_I$ *uma IvIFI preserva elementos diagonais.* □

#### 4.4.1.1 Exemplos de Implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares

Considerando as implicações da lógica fuzzy apresentadas em (LIN; XIA, 2006), exemplifica-se às seguintes implicações fuzzy intuicionistas intervalares das mesmas.

**Exemplo 3.** *Sejam as funções de agregação em* $\mathcal{M}_{Ii} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *definidas por:*

$$\mathbb{M}_1(X,Y) = \mathbb{M}_3(X,Y) = \bigvee(X,Y) = [\vee(\underline{X},\underline{Y}), \vee(\overline{X},\overline{Y})]; \quad (87)$$

$$\mathbb{M}_2(X,Y) = \mathbb{M}_4(X,Y) = \bigwedge(X,Y) = [\wedge(\underline{X},\underline{Y}), \wedge(\overline{X},\overline{Y})]. \quad (88)$$

*Considere também a versão intervalar para a implicação de -Łukasiewicz's e sua correspondente coimplicação, obtida a partir da negação forte* $\mathbb{N}_S(X) = [N_S(\overline{X}), N_S(\underline{X})]$*:*

$$\mathbb{I}(X,Y) = [\wedge(1, N_S(\overline{X}) + \underline{Y}), \wedge(1, N_S(\underline{X}) + \overline{Y})];$$
$$\mathbb{I}_{\mathbb{N}_S}(X,Y) = [\vee(0, \underline{Y} - \overline{X}), \vee(0, \overline{Y} - \underline{X})].$$

*A versão intervalar para a implicação fuzzy intuicionista introduzida por K. Atanassov e G. Gargov em (ATANASSOV; GARGOV, 1998) pode ser gerada pelas funções de agregações em $\mathcal{M}_{Ii}$ e pelo par de funções mutuamente duais $(\mathbb{I}, \mathbb{I}_{\mathbb{N}_S})$ definidas por - Łukasiewicz's e indicadas nas Eqs. (87) e (88), respectivamente. Aplicando o Teorema 1, pelas projeções definidas nas Eqs. (63) e (64) tem-se:*

$$
\begin{aligned}
(l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{I}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \mathbb{I}(\bigvee(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)), \bigwedge(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2))) \\
&= \bigwedge(\mathbb{N}_S(X_2), Y_1) = \bigwedge(\mathbf{1}, X_2 + Y_1); \\
(r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{I}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \mathbb{I}_{\mathbb{N}_S}(\bigvee(\mathbb{N}_S(X_1), X_2), \bigwedge(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2)) \\
&= \bigvee(\mathbb{N}_S(X_1), Y_2) = \bigvee(\mathbf{0}, Y_2 - \mathbb{N}_S(X_1))
\end{aligned}
$$

De forma análoga à exemplificação acima, obteve-se as demais implicações fuzzy intuicionistas intervalares abaixo e na sequência são apresentadas na Tabela 7 as propriedades satisfeitas pelas respectivas implicações apresentadas na Tabela 6 .

| | Implicação Fuzzy Intuicionista Intervalar |
|---|---|
| KD | $\tilde{\mathbb{I}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = ((X_2 \bigvee Y_1), (X_1 \bigwedge Y_2))$ |
| RC: | $\tilde{\mathbb{I}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (X_2 + (\mathbf{1} - X_2)Y_1, Y_2 - (\mathbf{1} - X_1)Y_2)$ |
| LZ: | $\tilde{\mathbb{I}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (\mathbf{1} \bigwedge X_2 + Y_1, \mathbf{0} \bigvee Y_2 - (\mathbf{1} - X_1))$ |
| Zadeh: | $\tilde{\mathbb{I}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (X_2 \bigvee((\mathbf{1} - X_2) \bigwedge Y_1), (X_1 \bigwedge(\mathbf{1} - X_1)) \bigvee Y_2)$ |
| P.C.: | $\tilde{\mathbb{I}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = ((\mathbf{1} - X_2)Y_1, (\mathbf{1} - X_1) + Y_2 - (\mathbf{1} - X_1)Y_2)$ |
| B.C.: | $\tilde{\mathbb{I}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (\mathbf{0} \bigvee(\mathbf{1} - X_2) + Y_1 - \mathbf{1}), \mathbf{1} \bigwedge X_1 + Y_2)$ |
| P.D.: | $\tilde{\mathbb{I}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (\mathbf{1} - X_2) + Y_1 - (\mathbf{1} - X_2)Y_1, (\mathbf{1} - X_1)Y_2)$ |
| B.D.: | $\tilde{\mathbb{I}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (\mathbf{1} \bigwedge(\mathbf{1} - X_2) + Y_1, \mathbf{0} \bigvee(\mathbf{1} - X_1) + Y_2 - \mathbf{1})$ |

Tabela 6: Implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares.

| | $\mathbb{I}_I1$ | $\mathbb{I}_I2$ | $\mathbb{I}_I3$ | $\mathbb{I}_I4$ | $\mathbb{I}_I5$ | $\mathbb{I}_I6$ | $\mathbb{I}_I7$ | $\mathbb{I}_I8$ | $\mathbb{I}_I9$ | $\mathbb{I}_I10$ | $\mathbb{I}_I11$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| KD: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | x | ✓ | ✓ | ✓ |
| RC: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| LZ: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| ZH: | ✓ | x | x | ✓ | ✓ | x | x | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| P.C.: | ✓ | x | ✓ | x | x | x | x | ✓ | x | x | ✓ |
| B.C.: | ✓ | x | ✓ | x | x | x | x | ✓ | x | x | ✓ |
| P.D.: | x | x | ✓ | ✓ | x | x | x | ✓ | x | x | ✓ |
| B.D.: | x | x | ✓ | ✓ | x | x | x | ✓ | x | x | ✓ |

Tabela 7: Propriedades Analisadas para as IvIFI

## 4.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram apresentados alguns dos principais conceitos da IvIFL, como o estudo do índice intuicionista intervalar e de automorfismos intuicionistas intervalares.

A extensão do trabalho proposto por (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004) é considerada, analisando a interpretação da regra condicional baseado em IvIFL e introduz a definição para as implicações fuzzy intuicionistas intervalares, fazendo uso de operadores de agregação intervalares e funções intervalares duais (no caso implicações intervalares e coimplicações intervalares), e também analisando algumas das principais propriedade estendidas da FL e propriedades inerentes às implicações intuicionistas.

# 5 CONSTRUÇÃO DUAL DE IMPLICAÇÕES FUZZY INTUICIONISTAS INTERVALARES

Em (OH; KANDEL, 1991a,b), o conceito de coimplicação fuzzy foi introduzido como uma nova abordagem para o raciocínio aproximado de sistemas especialistas. Neste trabalho, verifica-se a utilização da relação de equivalência Modus Ponens para construção das regras de inferência de sistemas especialistas fuzzy, em substituição à implicação fuzzy, fazendo uso para tal, das coimplicações fuzzy.

Neste capítulo também considera-se a interpretação para coimplicações intuicionistas intervalares, mostrando que elas podem ser geradas a partir um conjunto finito de funções de agregação e por funções duais intervalares, no caso uma coimplicação fuzzy intervalar $\mathbb{J}$ e uma implicação fuzzy intervalar $\mathbb{J}_N$ . Portanto, sempre que $\tilde{\mathbb{A}}$ é um IvIFS, com $M_A$ e $N_A$ representando os respectivos grau de pertinência e o grau de não-pertinência, tais que satisfazem a condição $M_A(x) + N_A(x) \leq \tilde{\mathbf{1}}$, dois valores intervalares podem ser associados ao grau de verdade da proposição "$x$ é $A$". Pelo uso de funções de agregação intervalares, podemos considerar os dois valores (o que significa não apenas uma média) nas regras de inferência relacionados de um sistema baseado em IvIFL (DESCHRIJVER; KERRE, 2005c).

**Definição 14.** *Uma função intuicionista intervalar $\mathbb{J}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ é uma coimplicação fuzzy intuicionista intervalar se satisfaz as seguintes condições de contorno:*

$\mathbb{J}_I1$ $\mathbb{J}_I(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{1}}) = \mathbb{J}_I(\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{1}}) = \mathbb{J}_I(\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{0}}) = \tilde{\mathbf{0}}$ *e* $\mathbb{J}_I(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{0}}) = \tilde{\mathbf{1}}$;

Estendendo a definição de implicação apresentada em (FODOR; ROUBENS, 1994), uma coimplicação fuzzy intuicionista intervalar é apresentada a seguir:

**Definição 15.** *Uma coimplicação fuzzy intuicionista intervalar $\mathbb{J}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ é uma coimplicação que satisfaz, para todo $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \tilde{\mathbb{U}}$, as propriedades:*

**$\mathbb{J}_I2$:** $\tilde{X} \leq \tilde{Z} \Rightarrow \mathbb{J}_I(\tilde{X}, \tilde{Y}) \geq \mathbb{J}_I(\tilde{Z}, \tilde{Y})$;

**$\mathbb{J}_I3$:** $\tilde{Y} \leq \tilde{Z} \Rightarrow \mathbb{J}_I(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leq \mathbb{J}_I(\tilde{X}, \tilde{Z})$;

**$\mathbb{J}_I4$:** $\mathbb{I}_I(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{Y}) = \tilde{\mathbf{0}}$;

**$\mathbb{J}_I5$:** $\mathbb{I}_I(\tilde{X}, \tilde{\mathbf{0}}) = \tilde{\mathbf{0}}$;

## 5.1 Coimplicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares geradas por funções de agregação e funções intervalares de (co)implicações

Estendendo o trabalho de (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Prop.3), em (VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2011, Teorema1) é apresentada uma expressão para IvIFI $\mathbb{I}_I$, sendo geradas por um conjunto finito de funções de agregação intervalares $\mathcal{M}_I$ incluindo nesta expressão o uso de pares de funções intervalares duais $(\mathbb{I}, \mathbb{I}_N)$. Tais pares consistem em uma implicação intervalar $\mathbb{I}$ e sua correspondente coimplicação intervalar $\mathbb{I}_N$, obtida através da SIvFN $\mathbb{N}$.

Na construção dual de (VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2011, Teorema.1), a próxima expressão introduz a correspondente coimplicação fuzzy intuicionista intervalar $\mathbb{J}_I$.

**Proposição 39.** *Seja $\mathbb{J}$ uma coimplicação fuzzy intervalar, e $\mathbb{J}_N$ uma implicação associada a coimplicação $\mathbb{J}$ obtida através da negação padrão $\mathbb{N}$ e $\mathcal{M} = \{M_i : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U} | i \in \{1,2,3,4\}\}$ o conjunto de IvAFs satisfazendo, para todo $X, Y \in \tilde{\mathbb{U}}$, as condições apresentadas nas Eqs (83)a e (83)b. Então, para todo $\tilde{X} = (X_1, X_2), \tilde{Y} = (Y_1, Y_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$, a função binária $\mathbb{J}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ é uma **coimplicação fuzzy intuicionista intervalar** (de acordo com a Def. 12) dada pela expressão a seguir:*

$$\mathbb{J}_I = (\mathbb{J}(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)), \mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2))), \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(X_1), X_2), \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2))) \tag{89}$$

*Ou, pode ser representada pelas funções de projeção a seguir:*

$$(l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathbb{J}(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)), \mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2))); \tag{90}$$
$$(r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(X_1), X_2), \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2)). \tag{91}$$

**Prova.** *Primeiramente, prova-se que $\mathbb{J}_I$ está bem definida para todo $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \tilde{\mathbb{U}}$. Seja $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \mathbb{M}_3, \mathbb{M}_4$ são IAFs satisfazendo as condições:*

$$\begin{cases} \mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(X_1), X_2) \geq \mathbb{N}_S(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2))) \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2) \leq \mathbb{N}_S(\mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2))) \end{cases}$$

*Considerando a propriedade $\mathbb{A}2$ e a Def. 15 satisfazendo $\mathbb{I}2$ e $\mathbb{I}3$ tem-se:*

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_I(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \mathbb{J}_N(\mathbb{N}_S(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2))), \mathbb{N}_S(\mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2)))) \\ &\geq \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(X_1), X_2), \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2)) \end{aligned}$$

*Pela construção dual na Eqs. (40), (83)a e (83)b, tem-se a seguinte inequação:*

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_I(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \mathbb{N}_S(\mathbb{J}_N(\mathbb{N}_S(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2))), \mathbb{N}_S\mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2)))) \\ &\leq \mathbb{N}_S(\mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(X_1), X_2)), \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2))) \end{aligned}$$

*Portanto, segue que:*

$$\begin{aligned} &\mathbb{J}(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)) \ , \ \mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2))) \\ &\qquad\qquad \leq \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(X_1), X_2), \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2))); \\ &\mathbb{J}(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)) \ , \ \mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2))) \\ &\qquad\qquad + \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(X_1), X_2), \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2))) \leq 1. \end{aligned}$$

*Portanto $\mathbb{J}_I$ está bem definida.*
*Abaixo são analisadas as propriedades $\mathbb{J}_I 2$ até $\mathbb{J}_I 5$ considerando $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \tilde{\mathbb{U}}$.*

$\mathbb{J}_I$**2** *Assume-se que* $\tilde{X} \leq \tilde{Z}$. *Uma vez que* $\mathbb{M}_1$ *e* $\mathbb{M}_3$ *são funções isotônicas, as duas inequações abaixo são verificadas:* $\mathbb{M}_1(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)) \leq \mathbb{M}_1(Z_1, \mathbb{N}_S(Z_2))$ *e* $\mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(X_1), X_2) \geq \mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2)$. *Adicionalmente, pela Def 15* $\mathbb{J}$ *e* $\mathbb{J}_N$ *verifica* $\mathbb{J}2$ *e* $\mathbb{I}2$*, respectivamente. Então, segue-se que:*

$$\begin{aligned}
(l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \mathbb{J}(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2), \mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2))))\\
&\geq \mathbb{J}(\mathbb{M}_3(Z_1, \mathbb{N}_S(Z_2)), \mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2)))\\
&= (l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{Z}, \tilde{Y}); e\\
(r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)), \mathbb{M}_2(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2)))\\
&\geq \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(Z_1), Z_2), \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2))\\
&= (r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{Z}, \tilde{Y}).
\end{aligned}$$

*Portanto,* $\mathbb{J}_I$ *verifica* $\mathbb{J}_I2$*, e é antimonotônica no primeiro argumento.*

$\mathbb{J}_I$**3** *Assumindo que* $\tilde{Y} \leq \tilde{Z}$. *Pela propriedade* $\mathbb{A}4$*, que indica a isotonicidade de* $\mathbb{M}_2$ *e* $\mathbb{M}_4$*, tem-se* $\mathbb{M}_2(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2)) \leq \mathbb{M}_2(Z_1, \mathbb{N}_S(Z_2))$ *e* $\mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2) \geq \mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(Z_1), Z_2)$. *E, uma vez que* $\mathbb{J}$ *e* $\mathbb{J}_N$ *verifica* $\mathbb{J}3$ *e* $\mathbb{I}3$*, respectivamente, pela Def.15, tem-se as seguintes inequações:*

$$\begin{aligned}
(l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I) &= \mathbb{J}(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)), \mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2)))\\
&\leq \mathbb{J}(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)), \mathbb{M}_4(Z_1, \mathbb{N}_S(Z_2))\\
&= (l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{X}, \tilde{Z}); e\\
(r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I) &= \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(X_1), X_2), \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2))\\
&\leq \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2), \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Z_1), Z_2)))\\
&= (r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{X}, \tilde{Z}).
\end{aligned}$$

*Portanto,* $\mathbb{J}_I$ *verifica* $\mathbb{J}_I3$*, isotonicidade no segundo argumento.*

$\mathbb{J}_I$**4** *Uma vez que* $\mathbb{J}$ *e* $\mathbb{J}_N$ *verifica* $\mathbb{J}4$ *e* $\mathbb{I}4$*, respectivamente, pela Def.15, obtêm-se que:*

$$\begin{aligned}
(l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{Y}) &= \mathbb{J}(\mathbb{M}_3(\mathbf{1}, \mathbf{1}), \mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2)))\\
&= \mathbb{J}(\mathbf{1}, \mathbb{M}_4(Y_1, \mathbb{N}_S(Y_2)); e\\
(r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{\mathbf{1}}, \tilde{Y}) &= \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2))\\
&= \mathbb{J}_N(\mathbf{0}, \mathbb{M}_2(\mathbb{N}_S(Y_1), Y_2)).
\end{aligned}$$

*Portanto,* $\mathbb{J}_I$ *verifica* $\mathbb{J}_I4$.

$\mathbb{J}_I$**5** *Pela propriedade* $\mathbb{I}5$ *e* $\mathbb{J}5$ *considerando a Def.15, tem-se que*

$$\begin{aligned}
(l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(X, \tilde{\mathbf{0}}) &= \mathbb{J}(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)), \mathbb{M}_4(\mathbf{0}, \mathbf{0})))\\
&= \mathbb{J}(\mathbb{M}_3(X_1, \mathbb{N}_S(X_2)), \mathbf{0}); e\\
(r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(X, \tilde{\mathbf{0}}) &= (\mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(X_1), X_2), \mathbb{M}_2(\mathbf{1}, \mathbf{1}))\\
&= \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(\mathbb{N}_S(X_1), X_2), \mathbf{1}).
\end{aligned}$$

*Assim,* $\mathbb{J}_I(X, \tilde{\mathbf{0}}) = \tilde{\mathbf{0}}$.

$\mathbb{J}_I$**5** $\mathbf{J}_I$ *também satisfaz a condição de contorno:*

$$\mathbb{J}_I(\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{1}}) = (\mathbb{J}(\mathbf{0}, \mathbf{1}), \mathbb{J}_N(\mathbf{1}, \mathbf{0})) = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{1}}. \tag{92}$$

*Pela Def. 12 pode-se concluir que $\mathbb{J}_I$ é uma IvIFC.* □

**Proposição 40.** *Seja $\mathbb{N}_I$ uma IvIFN e $\mathbb{I}_I(\mathbb{J}_I) : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ uma (co)implicação fuzzy intuicionista intervalar. Então, a coimplicação de $\mathbb{I}_I$ (implicação de $\mathbb{J}_I$) $\mathbb{N}_I-$dual é denotada por $(\mathbb{I}_{I_N})(\mathbb{J}_{I_N}) : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ são definidas por:*

$$(\mathbb{I}_I)_{\mathbb{N}_I}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathbb{N}_I(I(\mathbb{N}_I(x), \mathbb{N}_I(Y))); \tag{93}$$
$$(\mathbb{J}_I)_{\mathbb{N}_I}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathbb{N}_I(J(\mathbb{N}_I(x), \mathbb{N}_I(Y))). \tag{94}$$

**Prova.** *Tomando $\mathbb{N} = \mathbb{N}_S$ e basedo nas Eqs. (90) e (91) na Prop. 39, e Eq. (93), tem-se que:*

$$\begin{aligned}
(\mathbb{I}_I)_{\mathbb{N}_I}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \mathbb{N}_{I_S}(\mathbb{I}_I(N_{I_S}(\tilde{X}), N_{IS}(\tilde{Y}))) \\
&= \mathbb{N}_{I_S}(\mathbb{I}_I((X_2, X_1), (Y_2, Y_1)) \\
&= \mathbb{N}_{I_S}(\mathbb{I}(\mathbb{M}_1(X_2, \mathbb{N}_S(X_1)), \mathbb{M}_2(Y_2, \mathbb{N}_S(Y_1))), \\
&\quad \mathbb{I}_N(\mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(X_2), X_1), \mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(Y_2), Y_1)))) \\
&= \mathbb{J}(\mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(X_2), X_1), \mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(Y_2), Y_1)))), \\
&\quad \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(X_2, \mathbb{N}_S(X_1)), \mathbb{M}_2(Y_2, \mathbb{N}_S(Y_1)))
\end{aligned}$$

*O outro caso, Eq.(94), pode ser analogamente provada.* □

Então, para todo $\tilde{X} = (X_1, X_2), \tilde{Y} = (Y_1, Y_2) \in \tilde{\mathbb{U}}$, a função binária $\mathbb{I}_{I_N} : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ é a correspondente IvIFC de uma IvIFI $\mathbb{I}_I$, cujas propriedades podem ser definidas como:

$$(l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ (\mathbb{I}_I)_{\mathbb{N}_I}) = \mathbb{J}(\mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(X_2), X_1), \mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(Y_2), Y_1))); \tag{95}$$
$$(r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ (\mathbb{I}_I)_{\mathbb{N}_I}) = \mathbb{J}_N(\mathbb{M}_1(X_2, \mathbb{N}_S(X_1)), \mathbb{M}_2(Y_2, \mathbb{N}_S(Y_1)); \tag{96}$$

O diagrama 11 resume o relacionamento sobre IvFIs, IvFCs e IvAs juntamente com, IvIFI e IvIFCs, apresentadas anteriormente. Considerando que $\mathcal{C}(\mathbb{M})$ denota a classe de IvAs. Adicionalmente, também é aplicada as notações $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ e $\mathcal{C}(\mathbb{J})$ para identificar a classe de IvFIs e IvFCs e e suas construções $\mathbb{N}$-duais são denotadas por $\mathcal{C}(\mathbb{I}_{\mathbb{N}})$ e $\mathcal{C}(\mathbb{J}_{\mathbb{N}})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathbb{I}) \times \mathcal{C}(\mathbb{I}_N) \times \mathcal{C}(\mathbb{M}) \arrow[r, "Eqs.\ (83)a\ (83)b"] \arrow[d, "Eq.(40)"'] & \mathcal{C}(\mathbb{I}_I) \arrow[d, "Eqs.(93)(94)"] \\
\mathcal{C}(\mathbb{J}) \times \mathcal{C}(\mathbb{J}_N) \times \mathcal{C}(\mathbb{M}) \arrow[r, "Eqs.\ (90)(91)"] & \mathcal{C}(\mathbb{J}_I)
\end{tikzcd}$$

Figura 11: Diagrama comutativo das classes de IvIFCs e IvIFIs.

#### *5.1.0.2 Exemplos de Coimplicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares*

Concluindo, apresenta-se exemplos de IvIFC obtidos por IvFI, e suas respectivas construções $\mathbb{N}-$dual, juntamento com agregadores intervalares de máximo e mínimo.

**Exemplo 4.** *Considere um IAFs $\bigvee$ e $\bigwedge$ é definido pela Eq. (48) e (47). Seja $\mathbb{M}_i, i \in \{1, 2, 3, 4\} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ funções de agregação intervalares idempotentes definidas por:*

$$\mathbb{M}_1(X, Y) = \mathbb{M}_3(X, Y) = \bigvee(X, Y) = [\vee(\underline{X}, \underline{Y}), \vee(\overline{X}, \overline{Y})]; \tag{97}$$
$$\mathbb{M}_2(X, Y) = \mathbb{M}_4(X, Y) = \bigwedge(X, Y) = [\wedge(\underline{X}, \underline{Y}), \wedge(\overline{X}, \overline{Y})]. \tag{98}$$

*Considera-se a IvFI definida por Kleene-Dienes e sua correspondente coimplicação, obtida a partir da SIvFN $\mathbb{N}_S(X) = [N_S(\overline{X}), N_S(\underline{X})]$. Assim, obtêm-se a seguinte expressão:*

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{KD}(X,Y) &= \bigvee(\mathbb{N}_S(X),Y) = [\vee(N_S(\overline{X}),\underline{Y}),\vee(N_S(\underline{X}),\overline{Y})];\\ (\mathbb{I}_{KD})_{\mathbb{N}_S}(X,Y) &= \bigwedge(\mathbb{N}_S(X),Y) = [\wedge(N_S(\overline{X}),\underline{Y}),\wedge(N_S(\underline{X}),\overline{Y})].\end{aligned}$$

*A coimplicação fuzzy intuicionista intervalar $(\mathbb{J}_I)_{KD}$ pode ser gerada por funções de agregação $\mathcal{M}_I$ e por pares de funções mutuamente duais $(\mathbb{J},\mathbb{J}_N)$ definidas por Kleene-Dienes e apresentadas na Eqs.(97) e (98), respectivamente. Aplicando a Prop. 39, segue que:*

$$\begin{aligned}(l_{\tilde{\mathbb{U}}}\circ(\mathbb{J}_I)_{KD}) &= \mathbb{J}(\bigvee(X_1,\mathbb{N}_S(X_2)),\bigwedge(Y_1,\mathbb{N}_S(Y_2)))\\ &= \bigwedge(\bigwedge(\mathbb{N}_S(X_1),X_2),\bigwedge(Y_1,\mathbb{N}_S(Y_2)))\\ &= \bigwedge(X_2,Y_1); e\\ (r_{\tilde{\mathbb{U}}}\circ(\mathbb{J}_I)_{KD}) &= \mathbb{J}_N(\bigvee(\mathbb{N}_S(X_1),X_2),\bigwedge(\mathbb{N}_S(Y_1),Y_2))\\ &= \bigvee(\bigwedge(\mathbb{N}_S(X_1),X_2),\bigwedge(\mathbb{N}_S(Y_1),Y_2))\\ &= \bigvee(X_1,Y_2)\end{aligned}$$

De forma análoga à exemplificação acima, obteve-se as demais coimplicações fuzzy intuicionistas intervalares da Tabela 8 e com base nestas coimplicações obtidas foi realizada a analise das propriedades satisfeitas pelas mesmas e apresentado os resultados na Tabela 9 .

| | Coimplicação Fuzzy Intuicionista Intervalar |
|---|---|
| KD: | $\tilde{\mathbb{J}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = ((X_2\bigwedge Y_1),(X_1\bigvee Y_2))$ |
| RC: | $\tilde{\mathbb{J}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = (Y_1+(\mathbf{1}-X_2)Y_1, X_1-(\mathbf{1}-X_1)Y_2)$ |
| LZ: | $\tilde{\mathbb{J}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = (\mathbf{1}\bigvee X_2+Y_1, \mathbf{0}\bigwedge Y_2-(\mathbf{1}-X_1))$ |
| Zadeh: | $\tilde{\mathbb{J}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = (X_2\bigwedge((\mathbf{1}-X_2)\bigwedge Y_1),(X_1\bigvee(\mathbf{1}-X_1))\bigvee Y_2)$ |
| P.C.: | $\tilde{\mathbb{J}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = ((\mathbf{1}-X_2)+Y_1-((\mathbf{1}-X_2)Y_1),(\mathbf{1}-X_1)+Y_2)$ |
| B.C.: | $\tilde{\mathbb{J}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = (\mathbf{0}\bigwedge(\mathbf{1}-X_2)+Y_1-\mathbf{1}),\mathbf{1}\bigvee X_1+Y_2)$ |
| P.D.: | $\tilde{\mathbb{J}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = (\mathbf{1}-X_2)+Y_1,(\mathbf{1}-X_1)+Y_2-\mathbf{1}X_1))$ |
| B.D.: | $\tilde{\mathbb{J}}(\tilde{X},\tilde{Y}) = (\mathbf{1}\bigvee(\mathbf{1}-X_2)+Y_1,\mathbf{0}\bigwedge(\mathbf{1}-X_1)+Y_2-\mathbf{1})$ |

Tabela 8: Coimplicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares.

## 5.2 Interpretação da Regra Condicional Fuzzy Intuicionista Intervalar

Sejam $\tilde{\mathbb{U}} = \{\tilde{X} = (X_1,X_2) \in \mathbb{U}^2 \,|\, X_1 + X_2 \leq 1\}$ e $\tilde{\mathbb{A}} = \{(x, M_A(x), N_A(x))\,|\, x \in \mathcal{X}\}$, $\tilde{\mathbb{B}} = \{(y, M_B(y), N_B(y))\,|\, y \in \mathcal{Y}\} \in \tilde{\mathbb{U}}$ conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares, tais que, $\forall x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$, tem-se, respectivamente:

$$\overline{M_A}(x) + \overline{N_A}(x) \leq \mathbf{1}; \qquad (99) \qquad \overline{M_B}(y) + \overline{N_B}(y) \leq \mathbf{1}, \qquad (100)$$

| | $\mathbb{J}_I1$ | $\mathbb{J}_I2$ | $\mathbb{J}_I3$ | $\mathbb{J}_I4$ | $\mathbb{J}_I5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| KD: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| RC: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| LZ: | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| ZH: | ✓ | x | x | ✓ | ✓ |
| P.C.: | ✓ | x | ✓ | x | x |
| B.C.: | ✓ | x | ✓ | x | x |
| P.D.: | x | x | ✓ | ✓ | x |
| B.D.: | x | x | ✓ | ✓ | x |

Tabela 9: Propriedades Satisfeitas pelas IvIFC

onde as funções $M_A, N_A : \mathcal{X} \to \tilde{\mathbb{U}}$ são dadas nas Eqs. (57) e (58), respectivamente; e $M_B, N_B : \mathcal{Y} \to \tilde{\mathbb{U}}$ nas Eqs. (59) e (60), respectivamente.

Considerando $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2 : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ IvAFs tais que $\mathbb{M}_1(M_A(x), \mathbb{N}_S(N_A(x)))$ e $\mathbb{M}_2(M_B(Y), \mathbb{N}_S(\nu_B(y)))$ interpretam os graus de verdade da proposição "$x$ is $\mathbb{A}$" and "$y$ é $\mathbb{B}$", respectivamente. Em tais interpretações, as condições das Eqs. (99) e (100) são preservadas. Tomando $x$ e $y$ variáveis em $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, respectivamente, a condicional fuzzy em IvIFL é dada pela regra:

$$R : \text{Se } x \text{ é } \tilde{\mathbb{A}} \text{ então } y \text{ é } \tilde{\mathbb{B}}. \tag{101}$$

Assim, o grau de verdade da regra $R(101)$ é definida pela projeção à direita da IvIFI $\mathbb{I}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$, com uma implicação dada por:

$$(l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{I})(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathbb{I}(\mathbb{M}_1(M_A(x), \mathbb{N}_S(N_A(x))), \mathbb{M}_2(M_B(y), \mathbb{N}_S(N_B(y)))). \tag{102}$$

Dualmente, $\mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(M_A(x)), N_A(x))$ e $\mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(M_B(y), N_B(y))$ indicam o grau de não verdade da proposição "$x$ é $\tilde{\mathbb{A}}$" e "$y$ é $\tilde{\mathbb{B}}$", respectivamente. Portanto, o grau de não verdade da condicional apresentada na $R(101)$ é definida pela projeção à esquerda de $\mathbb{I}_I$, a coimplicação $\mathbb{I}_{\mathbb{N}} : \tilde{\mathbb{U}}^2 \to \tilde{\mathbb{U}}$ expressa por:

$$(r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{I})(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(M_A(x)), N_A(x)), \mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(M_B(y)), N_B(y))). \tag{103}$$

Assim, elementos pertencentes a $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $\tilde{\mathbb{U}} \times \tilde{\mathbb{U}}$ e $\tilde{\mathbb{U}}$ são relacionados por

$$(\tilde{X}, \tilde{Y}) \longrightarrow \mathbb{I}_I(\tilde{X}, \tilde{Y}) = ((l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{I}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}), (r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{I}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}))$$

O relacionamento descrito acima, interpretando a regra condicional baseada em IvIFI em IvFL está representado no diagrama comutativo da Figura 12.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{I}_I"'] \arrow[d, shift left, "r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{I}_I"] \arrow[dr] & \\
\tilde{\mathbb{U}} \times \tilde{\mathbb{U}} \arrow[r, "\mathbb{I}_N"] & \tilde{\mathbb{U}} & \tilde{U} \times \tilde{\mathbb{U}} \arrow[l, "\mathbb{I}"']
\end{tikzcd}$$

Figura 12: Interpretação da Regra Condicional em $\tilde{\mathbb{U}}$ baseada em uma IvIFI.

Neste contexto, por uma IvFC $\mathbb{J}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$, a não-verdade da regra $R$(30) é interpretada por:

$$(l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathbb{I}_N(\mathbb{M}_1(M_A(x), \mathbb{N}_S(N_A(x)), \mathbb{M}_2(M_B(y), \mathbb{N}_S(N_B(y)))). \quad (104)$$

Similarmente, o grau de não-verdade da regra condicional $R$(101) pode ser interpretado por uma IvIFC $\mathbb{J}_I : \tilde{\mathbb{U}}^2 \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$, definida pela expressão:

$$(r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathbb{I}(\mathbb{M}_3(\mathbb{N}_S(M_A(x)), N_A(x)), \mathbb{M}_4(\mathbb{N}_S(M_B(y)), N_B(y))). \quad (105)$$

Preservando as condições das Eqs. (99)(100), entre os correspondentes $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $\tilde{\mathbb{U}} \times \tilde{\mathbb{U}}$ e $\tilde{\mathbb{U}}$ é expresso por:

$$(\tilde{X}, \tilde{Y}) \longrightarrow \mathbb{J}_I(\tilde{X}, \tilde{Y}) = ((l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}), (r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I)(\tilde{X}, \tilde{Y}))$$

O relacionamento dual do diagrama apresentado na Figural 12 está representado em outro diagrama comutativo, veja Figura 13.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "l_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I"'] \arrow[d, shift left, "r_{\tilde{\mathbb{U}}} \circ \mathbb{J}_I"] \arrow[dr] & \\
\tilde{\mathbb{U}} \times \tilde{\mathbb{U}} \arrow[r, "\mathbb{J}_N"] & \tilde{\mathbb{U}} & \tilde{U} \times \tilde{\mathbb{U}} \arrow[l, "\mathbb{J}"']
\end{tikzcd}$$

Figura 13: Interpretação da Regra Condicional em $\tilde{\mathbb{U}}$ baseada em uma IvIFC.

## 5.3 Considerações Finais

Estendendo os conceitos introduzidos no Capítulo 4, apresentou-se nas sessões anteriores a extensão dual do trabalho proposto por (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004). Este estudo considerou a definição para as coimplicações fuzzy intuicionistas intervalares, fazendo uso de operadores de agregação intervalares e funções intervalares duais (no caso coimplicações intervalares e implicações intervalares), e também análise de algumas das principais propriedades e exemplificação.

# 6 CONCLUSÃO

Os conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares têm sido aplicados na modelagem de incertezas provenientes da necessidade de se utilizar não apenas as variáveis linguísticas capazes de distinguir qualificações por meio de predição mas também a indeterminação e a imprecisão das funções de pertinência e não-pertinência.

Estas variáveis descrevem qualidades, verdades parciais ou padrões, sendo que as relações de pertinência e não-pertinência de uma variável modelada em $\tilde{\mathbb{U}}$, não são necessariamente complementares. Assim, esta qualificação modela as propriedades subjetivas em atributos associados a conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares (BARROS; BASSANEZI, 2006).

Neste trabalho, realizou-se o estudo das principais teorias e extensões da lógica fuzzy. O estudo contribui mais estritamente com a IvIFL, resumindo-se as principais propriedades de operadores lógicos e algumas provas sobre os mesmos, seus principais conectivos e alguns conceitos relacionados.

O trabalho também apresenta um estudo sobre IFL, mostrando que os conjuntos fuzzy intuicionista generalizam os conjuntos fuzzy, quando a relação entre o grau de pertinência e de não pertinência não está restrita a relação complementar. A revisão sobre os principais conectivos da IFL esteve focada na extensão intervalar para as implicações fuzzy intuicionistas obtidas por operadores de agregação e por pares de funções duais. Consideram-se ainda as propriedades inerentes às implicações fuzzy intuicionistas, como o caso do índice fuzzy intuicionista.

Na sequência, este estudo considera a IvFI, uma abordagem lógica do tipo-2 fundamentada nos conjuntos fuzzy intervalares, com construções que modelam a incerteza através do grau intervalar de pertinência, tornando os sistemas que fazem uso desta abordagem mais precisos, com representação computacional mais abrangente, possibilitando modelagem do controle de erros de arredondamentos utilizados em técnicas intervalares e representabilidade de conectivos lógicos.

Na integração destas extensões, IFL e IvFL, os fundamentos da IvIFL, viabilizam uma interpretação para modelagem da imprecisão e da incerteza do grau intervalar de pertinência e de não pertinência. Devido à vasta aplicabilidade desta teoria em diversas áreas das ciências, este trabalho foi direcionado ao estudo das implicações e coimplicações fuzzy intuicionistas intervalares, considerando também o índice fuzzy intuicionista e as propriedades algébricas dos conectivos segundo esta abordagem.

Neste contexto, a principal contribuição deste trabalho foi introduzir a definição das classes de implicação e de coimplicação fuzzy intuicionista intervalar, as quais são obtidas por funções de agregação intervalares idempotentes e pares de funções intervalares duais, no caso implicações e correspondentes coimplicações intervalares. São consideradas as propriedades de antimonotonicidade no primeiro argumento, isotonicidade no segundo argumento, dominância da falsidade, dominância da verdade no consequente e o princípio da neutralidade à esquerda. E, além destas, foram analisadas as propriedades das implicações fuzzy intuicionistas intervalares que são definidas a partir do índice fuzzy intuicionista intervalar.

Pela ação de automorfismos atuando sobre cada uma das diferentes abordagens da FL, foram investigadas as construções das funções conjugadas, com exemplificação associada às negações fuzzy intuicionistas, negações fuzzy intervalares e negações fuzzy intuicionistas intervalares.

### 6.0.1 Trabalhos Futuros

Na continuidade do trabalho, destaca-se a possível contribuição para a análise das demais propriedades relacionadas às implicações fuzzy intuicionistas intervalares, ampliando os estudos relacionados à correlação e à entropia entre conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares. Esta análise pode ser extensível às classes introduzidas neste trabalho.

Busca-se também ampliar estes estudos a fim de obter uma representação fuzzy intuicionista intervalar para diferentes classes representativas de IvIFIs, escolhidas entre: S-implicações, R-implicações, XOR-implicações e QL-implicações, fazendo uso dos operadores de IvAs.

Busca-se a definição e análise de propriedades para as funções conjugadas intuicionistas intervalares das (co)implicações fuzzy intuicionistas intervalares, t-(co)normas intuicionistas intervalares e outros conectivos da IvIFL.

# REFERÊNCIAS

ALTROCK, C. V. **Fuzzy logic and NeuroFuzzy Applications in Business and Finance**. [S.l.]: USA, 1996.

ATANASSOV, K. **Intuitionistic fuzzy sets**: theory and applications. [S.l.]: Physica-Verlag, 1999. (Studies in fuzziness and soft computing).

ATANASSOV, K.; GARGOV, G. Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.31, n.3, p.343–349, 1989.

ATANASSOV, K.; GARGOV, G. Elements of Intuitionistic Fuzzy Logic. **Fuzzy Sets and Systs.**, [S.l.], v.9, n.1, p.39–52, 1998.

ATANASSOV, K. T. Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.20, p.87–96, 1986.

ATANASSOV, K. T. More on Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.33, p.37–45, 1989.

ATANASSOV, K. T. New Operations Defined Over the Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.61, n.2, p.137–142, 1994.

ATANASSOV, K. T. Intuitionistic fuzzy sets: past, present and future. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais. . .** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.12–19.

ATANASSOV, K. T. Intuitionistic Fuzzy Implications and Modus Ponens. **Academy of Sciences**, [S.l.], v.11, n.1, p.1–5, 2005.

ATANASSOV, K. T.; PASI, G.; YAGER, R. R.; ATANASSOVA, V. Intuitionistic fuzzy graph interpretations of multi-person multi-criteria decision making. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais. . .** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.177–182.

BACZYŃSKI, M. On some properties of intuitionistic fuzzy implications. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais. . .** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.168–171.

BACZYńSKI, M. Residual Implications Revisited. Notes on the Smets-Magrez. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.145, n.2, p.267–277, 2004.

BACZYŃSKI, M. On Some Properties of Intuitionistic Fuzzy Implications. **Katowice, ul. Bankowa**, [S.l.], n.14, p.1–4, 2007.

BACZYńSKI, M.; JAYARAM, B. On the characterization of (S,N)-implications. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.158, n.15, p.1713–1727, 2007.

BACZYŃSKI, M.; JAYARAM, B. **Fuzzy implications**. [S.l.]: Springer, Berlin, 2008. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.231).

BACZYŃSKI, M.; JAYARAM, B. (S,N)- and R-implications: A state-of-the-art survey. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.14, p.1836–1859, 2008.

BAETS, B. Coimplicators, The Forgotten Connectives. **Tatra Mountains Mathematical Publications**, [S.l.], p.229–240, 1997.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy com Aplicações em Biomatemática.** Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2006.

BEDREGAL, B. On Interval Fuzzy Negations. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.161, p.2290–2313, 2010.

BEDREGAL, B. C.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. Xor-Implications and E-Implications: Classes of Fuzzy Implications Based on Fuzzy Xor. **Electron. Notes Theor. Comput. Sci.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.247, p.5–18, Aug. 2009.

BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N.; DIMURO, G. P.; REISER, R. H. S. Interval Valued R-Implications and Automorphisms. In: **Pre-Proceedings of the 2nd Workshop on Logical and Semantic Frameworks, with Applications**. Ouro Preto: UFMG, 2007. p.82–97.

BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. The Best Interval Representation of Fuzzy S-Implications and Automorphisms. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, LONDRES, 2007, 2007, Los Alamitos. **Proceedings. . .** IEEE, 2007. p.3220–3230.

BEDREGAL, B. C.; TAKAHASHI, A. Interval Valued Versions of T-Conorms, Fuzzy Negations and Fuzzy Implications. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, VANCOUVER, 2006, 2006, Los Alamitos. **Proceedings. . .** IEEE, 2006. p.1981–1987.

BEDREGAL, B. C.; TAKAHASHI, A. The Best Interval Representation of T-Norms and Automorphisms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.157, n.24, p.3220–3230, 2006.

BEDREGAL, B.; DIMURO, G.; SANTIAGO, R.; REISER, R. On Interval Fuzzy S-Implications. **Information Science**, [S.l.], v.180, n.8, p.1373–1389, 2010.

BEDREGAL, B. R. C.; TAKAHASHI, A. T-normas, T-conormas, Complementos e Implicações Intervalares. **TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, [S.l.], v.7, n.1, p.139–148, 2006.

BEZDEK, J.; DUBOIS, D.; PRADE, H. (Ed.). **Fuzzy sets in Approximate Reasoning and Information Systems**. Boston, Mass., USA: Kluwer, 1999. (The Handbooks of Fuzzy Sets).

BUSTINCE, H.; BARRENECHEA, E.; MOHEDANO, V. Intuicionistic Fuzzy Implication Operators - An Expression and Main Properties. **Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.12, p.387–406, 2004.

BUSTINCE, H.; BARRENECHEA, E.; PAGOLA, M. Generation of Interval-valued Fuzzy and Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Connectives from Fuzzy Connectives and from $K_\alpha$ Operators: Law of Conjuntions and Disjuntions, Amplitute. **International Journal of Intelligent Systems**, [S.l.], v.23, p.680–714, 2008.

BUSTINCE, H.; BURILLO, P. Correlation of Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.74, n.2, p.237 – 244, 1995.

BUSTINCE, H.; BURILLO, P.; SORIA, F. Automorphisms, Negations and Implication Operators. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.134, n.2, p.209 – 229, 2003.

BUSTINCE, H.; PAGOLA, M.; JURIO, A.; BARRENECHEA, E.; FERNÃ¡NDEZ, J.; COUTO, P.; MELO-PINTO, P. A Survey of Applications of the Extensions of Fuzzy Sets to Image Processing. In: MELIN, P.; KACPRZYK, J.; PEDRYCZ, W. (Ed.). **Bio-inspired Hybrid Intelligent Systems for Image Analysis and Pattern Recognition**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p.3–32. (Studies in Computational Intelligence, v.256).

CAI, K. Robustness of Fuzzy Reasoning and $\delta$-Equalities of Fuzzy Sets. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.9, n.5, p.738 –750, oct 2001.

CARLSSON, C.; FULLER, R. **Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization**. Heidelberg: Physiva-Verlag Springer, 2002.

CORNELIS, C.; ATANASSOV, K. T.; KERRE, E. E. Intuitionistic Fuzzy Sets and Interval-Valued Fuzzy Sets: a Critical Comparison. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais...** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.159–163.

CORNELIS, C.; DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Classification Of Intuitionistic Fuzzy Implicators: An Algebraic Approach. In: JCIS, 2002. **Anais...** JCIS / Association for Intelligent Machinery: Inc, 2002. p.105–108.

CORNELIS, C.; DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Advances and Challenges in Interval-Valued Fuzzy Logic. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.157, n.5, p.622–627, 2006.

CORNELIS, G.; DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Implication in Intuitionistic Fuzzy and Interval-Valued Fuzzy Set Theory: Construction, Classification, Application. **International Journal of Approximate Reasoning**, [S.l.], v.35, n.1, p.55–95, 2004.

COSTA, C. G. da; BEDREGAL, B. C.; NETO, A. D. D. Relating De Morgan triples with Atanassov's Intuitionistic De Morgan Triples via Automorphisms. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.52, p.473–487, 2011.

COX, E. **The Fuzzy Systems Handbook**. [S.l.]: Academic Press, 1994.

DE, S. K.; BISWAS, R.; ROY, A. R. An Application of Intuitionistic Fuzzy Sets in Medical Diagnosis. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.117, n.2, p.209 – 213, 2001.

DENGFENG, L.; CHUNTIAN, C. New Similarity Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets and Application to Pattern Recognitions. **Pattern Recognition Letters**, [S.l.], v.23, n.1-3, p.221–225, Jan. 2002.

DESCHRIJVER, G. Arithmetic Operators in Interval-Valued Fuzzy Set Theory. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.14, p.2906–2924, 2007.

DESCHRIJVER, G.; CORNELIS, C.; KERRE, E. E. On the Representation of Intuitionistic Fuzzy $t$-Norms and $t$-Conorms. **IEEE-Fuzzy Systems**, [S.l.], v.12, p.45–61, 2004.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. On the Relationship Between Some Extensions of Fuzzy Set Theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.133, n.2, p.227–235, 2003.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.229–248, 2005.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.229–248, 2005.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Smets-magrez Axioms for R-implicators in Interval-Valued and Intuitionistic Fuzzy Set Theory. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.13, n.4, p.453–464, 2005.

DUBOIS, D.; PRADE, H. Random Sets and Fuzzy Interval Analysis. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.42, n.1, p.87–101, 1991.

DUBOIS, D.; PRADE, H. **Fundamentals of Fuzzy Sets**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.

DUBOIS, D.; PRADE, H. **Interval-valued Fuzzy Sets, Possibility Theory and Imprecise Probability**. Barcelona: Universidad Polytecnica de Catalunya, 2005. 314–319p.

FARMER, M. **Automatic Segmentation of Medical Images Using Fuzzy C-means Clustering, Oriented Edges, and a Recurrent Competitive Field Neural Network**. [S.l.]: University of Tennessee at Chattanooga, Computer Science, 1996.

FODOR, J.; ROUBENS, M. **Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994.

FONT, J.; HAJEK, P. On Łukasiewicz's Four-Valued Modal Logic. **Studia Logica**, [S.l.], v.70, n.2, p.157–182, 2002.

GASSE, B. V.; CORNELIS, G.; DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. On the Properties of a Generalized Class of t-Norms in Interval-Valued Fuzzy Logics. **New Mats. and Natural Computation**, [S.l.], v.2, p.29–42, 2006.

GEHRKE, M.; WALKER, C.; WALKER, E. Some Comments on Interval Valued Fuzzy Sets. **International Journal of Intelligent Systems**, [S.l.], v.11, n.10, p.751–759, 1996.

GERSTAENKORN, T.; MAńKO, J. Correlation of intuitionistic fuzzy sets. **Fuzzy Sets Syst.**, [S.l.], v.44, n.1, p.39–43, Nov. 1991.

GORZALCZANY, M. B. A Method of Inference in Approximate Reasoning Based on Interval-Valued Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.21, n.1, p.1–17, 1987.

HERRERA, F.; MARTÍNEZ, L.; SÁNCHEZ, P. J. Managing non-homogeneous Information in Group Decision Making. **European Journal of Operational Research**, [S.l.], v.166, n.1, p.115–132, 2005.

HICKEY, T.; JU, Q.; EMDEM, M. Interval Arithmetic: From Principles to Implementation. **Journal of the ACM**, [S.l.], v.48, n.5, p.1038–1068, 2001.

HONG, D. H. A note on correlation of interval-valued intuitionistic fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.95, n.1, p.113 – 117, 1998.

HUNG, W.-L.; WU, J.-W. Correlation of Intuitionistic Fuzzy Sets by Centroid Method. **Information Sciences**, [S.l.], v.144, n.1-4, p.219–225, 2002.

JAULIN, L.; KIEFFER, M.; DIDRIT, O.; WALTER, E. **Applied Interval Analisys**: with examples in parameter and state estimation, robust control and robotic. Heildelberg: Springer, 2001.

JIN, J.; LI, Y.; LI, C. Robustness of Fuzzy Reasoning via Logically Equivalence Measure. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.22, p.5103–5117, 2007.

KLIR, G. J.; FOLGER, T. A. **Fuzzy sets, uncertainty, and information**. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1987.

KLIR, G. J.; FOLGER, T. A. **Fuzzy sets, uncertainty, and information**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1988.

KREINOVICH, V. Interval Methods in Knowledge Representation. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.16, n.6, p.903–904, 2008.

KREINOVICH, V.; MUKAIDONO, M. Interval (pairs of fuzzy values), triples, etc.: Can we thus get an arbitrary ordering? In: **Proceedings of 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems,S an Antonio, TX, USA, 2000**. Los Alamitos: IEEE, 2000. v.1, p.234–238.

LI, D. Extension Principles for Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets and Algebraic Operations. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, [S.l.], v.10, n.1, p.45–58, 2011.

LI, D.-F.; WANG, L.-L.; CHEN, G.-H. Group Decision Making Methodology Based on the Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Set Generalized OWA Operator. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.18, n.6, p.801–817, 2010.

LI, D.; LI, Y.; XIE, Y. Robustness of Interval-Valued Fuzzy Inference. **Information Sciences**, [S.l.], v.181, p.4754–4764, 2011.

LI, Y. Approximation and Robustness of Fuzzy Finite automata. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.47, n.2, p.247–257, 2008.

LI, Y.; LI, D.; PEDRYCZ, W.; WU, J. An Approach to Measure the Robustness of Fuzzy Reasoning. **Int. J. Intell. Syst**, [S.l.], v.20, n.4, p.393–413, 2005.

LIN, L.; XIA, Z.-Q. Intuitionistic Fuzzy Implication Operators: Expressions and Properties. **Journal of Applied Mathematics and Computing**, [S.l.], v.22, p.325–338, 2006.

LIU, X.-d.; ZHENG, S.-h.; XIONG, F.-l. Entropy and subsethood for general interval-valued intuitionistic fuzzy sets. In: SECOND INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS AND KNOWLEDGE DISCOVERY - VOLUME PART I, 2005, Berlin, Heidelberg. **Proceedings...** Springer-Verlag, 2005. p.42–52. (FSKD'05).

MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J. On two types of discrete implications. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.40, n.3, p.262–279, 2005.

MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J. Modus ponens and modus tollens in discrete implications. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.49, n.2, p.422–435, 2008.

MCNEILL, F. M.; THRO, E. **Fuzzy logic**: a practical approach. San Diego, CA, USA: Academic Press Professional, Inc., 1994.

MITCHELL, H. B. Pattern recognition using type-II fuzzy sets. **Inf. Sci**, [S.l.], v.170, n.2-4, p.409–418, 2005.

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. New York: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963.

NGUYEN, H. T.; WALKER, E. A. **A First Course in Fuzzy Logic**. New York: CRC Press, 2006.

NGUYEN, H.; WALKER, E. **A First Course in Fuzzy Logic**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1999.

OH, K.-W.; KANDEL, A. Coimplication and its Application to Fuzzy Expert Systems. **Information Sciences**, New York, NY, USA, v.56, n.1-3, p.59–73, 1991.

OH, K.-W.; KANDEL, A. A General Purpose Fuzzy Inference Mechanism Based on Coimplication. **Fuzzy Sets Systems**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.39, n.3, p.247–260, 1991.

REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. Obtaining representable coimplications from aggregation operators and dual operators. In: ADVANCES IN INTELLIGENT SYSTEMS RESEARCH - PROCEEDINGS OF EUSFLAT 2011 AND LFA 2011, 2011, Aix-les-Bains. **Anais...** Atlantis Press. Amsterdam - Beijing - Paris: Atlantis Press, 2011. p.238–245.

REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. C.; REIS, G. A. A. dos. Interval-Valued Fuzzy Coimplications and Related Dual Interval-Valued Conjugate Functions. **Journal of Computer and System Sciences**, [S.l.], 2012. (accepted to journal).

REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. R. C. Robustness of N-Dual Fuzzy Connectives. In: MELO-PINTO, P.; COUTO, P.; SERÃ´DIO, C.; FODOR, J.; BAETS, B. (Ed.). **Eurofuse 2011**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p.79–90. (Advances in Intelligent and Soft Computing, v.107).

REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B.; SANTIAGO, R. Interval valued QL-implications. In: LEIVANT, D.; QUEIROZ, R. (Ed.). **Proceedings of the 14th International Workshop on Logic, Language, Information and Computation, WOLLIC 2007, Rio de Janeiro**. Berlin: Springer, 2007. n.4576, p.307–321. (LNCS).

RUIZ-AGUILERA, D.; TORRENS, J. Residual Implications and Co-implications from Idempotent Uninorms. **Kybernetika**, [S.l.], v.1, n.40, p.21–38, 2004.

RUIZ-AGUILERA, D.; TORRENS, J. S- and R-implications from Uninorms Continuous in $]0,1[^2$ and Their Distributivity Over Uninorms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.6, p.832–852, 2009.

SANTIAGO, R. H. N.; BEDREGAL, B.; ACIóLY, B. M. Formal Aspects of Correctness and Optimality in Interval Computations. **Formal Aspects of Computing**, [S.l.], v.18, n.2, p.231–243, 2006.

SANTIAGO, R. H. N.; BEDREGAL, B. C.; ACIóLY, B. M. Comparing continuity of interval function based on Moore and Scott continuity. **Electronic Journal on Mathematics of Computation**, [S.l.], v.2, n.1, p.1–14, 2005.

SHI, Y.; GASSE, B. V.; RUAN, D.; KERRE, E. E. On the First Place Antitonicity in QL-implications. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.22, p.2988–3013, 2008.

SZMIDT, E.; KACPRZYK, J. A Similarity Measure for Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Application in Supporting Medical Diagnostic Reasoning. In: ICAISC, 2004. **Anais...** Springer, 2004. p.388–393. (Lecture Notes in Computer Science, v.3070).

TIZHOOSH, H. R. Interval-Valued Versus Intuitionistic Fuzzy Sets: Isomorphism Versus Semantics. **Pattern Recognition**, [S.l.], v.41, n.5, p.1829–1830, 2008.

TSCHAN, F.; SEMMER, N. K.; GURTNER, A.; BIZZARI, L.; SPYCHIGER, M.; BREUER, M.; MARSCH, S. U. Explicit Reasoning, Confirmation Bias, and Illusory Transactive Memory: A Simulation Study of Group Medical Decision Making. **Small Group Research**, [S.l.], v.40, n.3, p.271–300, 2009.

TURKSEN, I. B. Four Methods of Approximate Reasoning with Interval-Valued Fuzzy Sets. **International Journal of Approximate Reasoning**, [S.l.], v.3, p.121–142, 1989.

VISINTIN, L.; REISER, R.; BEDREGAL, B. Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Implications. In: THEORETICAL COMPUTER SCIENCE (WEIT), 2011 WORKSHOP-SCHOOL ON, 2011. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2011. p.46 –52.

VISINTIN, L.; REISER, R.; BEDREGAL, B. R. C. Interval-valued intuitionistic fuzzy implications: index, expressions and properties. **TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, [S.l.], p.1–12, 2013. submited.

VISINTIN, L.; REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. R. C. Interval-valued intuitionistic fuzzy coimplications. In: INFORMATICA (CLEI), 2012 XXXVIII CONFERENCIA LATINOAMERICANA EN, 2012. **Anais. . .** [S.l.: s.n.], 2012. p.1 –10.

WANG, J.-Q.; LI, K.-J.; ZHANG, H.-Y. MULTI-CRITERIA DECISION-MAKING METHOD BASED ON INDUCED INTUITIONISTIC NORMAL FUZZY RELATED AGGREGATION OPERATORS. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.20, n.04, p.559–578, 2012.

WANG, W. Q.; XIN, X. L. Distance Measure Between Intuitionistic Fuzzy Sets. **Pattern Recognition Letters**, [S.l.], v.26, n.13, p.2063–2069, Oct. 2005.

WANG, Z.; LI, K. W.; WANG, W. An Approach to Multiattribute Decision Making with Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Assessments and Incomplete Weights. **Inf. Sci.**, [S.l.], v.179, n.17, p.3026–3040, 2009.

WU, L.; WANAN, C.; YAN, C.; YINGZI, F. A Group Decision-Making Model for Multi-Criteria Supplier Selection in the Presence of Ordinal Data. **2008 IEEE International Conference on Service Operations and Logistics and Informatics SOLI**, [S.l.], n.200712, p.1686–1690, 2008.

XU, Y.; WANG, H. The Induced Generalized Aggregation Operators for Intuitionistic Fuzzy Sets and Their Application in Group Decision Making. **Applied Soft Computing**, [S.l.], v.12, n.3, p.1168 – 1179, 2012.

XU, Z. Corrigendum to Dynamic Intuitionistic Fuzzy Multi-Attribute Decision Making. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.51, n.1, p.162–164, 2009.

XU, Z.; YAGER, R. Intuitionistic and Interval-Valued Intutionistic Fuzzy Preference Relations and Their Measures of Similarity for the Evaluation of Agreement Within a Group. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, [S.l.], v.8, p.123–139, 2009.

YE, J. Multicriteria Fuzzy Decision-Making Method Based on a Novel Accuracy Function Under Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Environment. **Expert Syst. Appl.**, [S.l.], v.36, n.3, Apr. 2009.

YE, J. Cosine Similarity Measures for Intuitionistic Fuzzy Sets and Their Applications. **Mathematical and Computer Modelling**, [S.l.], v.53, n.1-2, p.91–97, 2011.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, [S.l.], v.8, n.3, p.338–353, 1965.

ZADEH, L. A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning - I. **Information Sciences**, [S.l.], v.8, n.3, p.199–249, 1975.

ZADEH, L. A. Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing. **Communications of the ACM**, [S.l.], v.37, n.3, p.77–84, 1994.

ZARGHAMI, M.; ARDAKANIAN, R.; MEMARIANI, A.; SZIDAROVSZKY, F. Extended OWA Operator for Group Decision Making on Water Resources Projects. **Journal of Water Resources Planning and Management**, [S.l.], v.134, n.3, p.266–275, 2008.

ZENDEHDEL, K.; RADEMAKER, M.; BAETS, B. D.; HUYLENBROECK, G. V. Improving Tractability of Group Decision Making on Environmental Problems Through the Use of Social Intensities of Preferences. **Environmental Modelling and Software**, [S.l.], v.24, n.12, p.1457–1466, 2009.

ZHANG, X.; LIU, J.; LEI, J.; YANG, B. The weak consistency of an interval-valued intuitionistic fuzzy matrix. In: FUZZ-IEEE, 2008. **Anais. . .** IEEE, 2008. p.1124–1127.

# ANEXO A CONCEITOS DE LÓGICA FUZZY

A função $N : U \to U$ é uma **negação fuzzy** se satisfaz as duas seguintes propriedades, para todo $x, y \in U$:

**$N1$:** $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$;

**$N2$:** Se $x \geq y$ então $N(x) \leq N(y)$.

As negações fuzzy que satisfazem a propriedade involutiva:

**$N3$:** $N(N(x)) = x$, $\forall x \in U$,

são chamadas de **negação fuzzy forte**.

**Exemplo 5.** *Um exemplo típico de uma negação fuzzy forte é a **Negação Padrão** (Standard Negation - SFN), também conhecida como **Negação de Zadeh**, definida pela função $N_S : U \to U$, dada por*

$$N_S = 1 - x. \tag{106}$$

**Definição 16.** *Seja $N$ uma negação fuzzy e $f : U^n \longrightarrow U$ uma função real. A **função $N$-dual de** $f$ é denotada por $f_N : U^n \longrightarrow U$ e definida por:*

$$f_N(x_1, \ldots, x_n) = N(f(N(x_1), \ldots, N(x_n))). \tag{107}$$

Observando a Eq.(107), e pela Def. 16, $f$ e $f_N$ são funções duais. Observa-se também que, se $N$ é uma SFN , $(f_N)_N = f$, isto é, a função $N$-dual de $f_N$ coincide com $f$. Assim, nota-se que $f$ é uma função de auto-dual.

**Exemplo 6.** *Pela Def. (107), seja $N$ uma negação fuzzy e $I(J) : U^2 \to U$ é uma (co)implicação. A coimplicação $N-$dual de $I$(implicação de $J$) é denotada por $I_N(J_N) : U^2 \to U$ e definida a seguir:*

$$I_N(x, y) = N(I(N(x), N(Y))) \tag{108}$$
$$J_N(x, y) = N(J(N(x), N(Y))) \tag{109}$$

*Se $N$ é uma SFN, $(I, I_N)$ e $(J, J_N)$ são funções mutuamente $N$-duais.*

Implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares Obtidas por Funções Duais e Agregadores Intervalares. — Lidiane Visintin

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**
Centro de Desenvolvimento Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Computação

Dissertação

**Implicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares Obtidas por Funções Duais e Agregadores Intervalares.**

**LIDIANE VISINTIN**

Pelotas, 2013