

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**  
Instituto de Física e Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA SIMULTÂNEA À LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES  
EM ESTRUTURAS**

**Lucas dos Santos Fernandez**

Pelotas, 2015

**Lucas dos Santos Fernandez**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA SIMULTÂNEA À LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES  
EM ESTRUTURAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Molter  
Coorientador: Prof. Dr. Fabio Silva Botelho

Pelotas, 2015

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas  
Catalogação na Publicação

F364o Fernandez, Lucas dos Santos

Otimização topológica simultânea à localização de atuadores em estruturas / Lucas dos Santos Fernandez ; Alexandre Molter, orientador ; Fabio Silva Botelho, coorientador. — Pelotas, 2015.

130 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2015.

1. Projeto simultâneo. 2. Otimização topológica. 3. Atuadores proporcionais. 4. Atuadores piezoelétricos. 5. Localização de atuadores. I. Molter, Alexandre, orient. II. Botelho, Fabio Silva, coorient. III. Título.

CDD : 003.3

**Banca examinadora:**

---

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca (PROMEC - UFRGS)

---

Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández (PPGMMat - UFPel)

---

Prof. Dr. Valdecir Bottega (PPGMMat - UFPel)

**Aos meus pais.**

## **AGRADECIMENTOS**

Aos que compartilharam deste sonho comigo; a vocês familiares, amigos, professores, colegas e conhecidos que me acompanharam durante este percurso, o meu muitíssimo obrigado. A minha sincera gratidão a você que se fez presente em algum momento da minha caminhada e que, inserido nela, incentivou-me e ensinou-me, compartilhando comigo a sua experiência pessoal e/ou profissional. O sonho que se concretiza e a realidade que se vislumbra com a conclusão desta etapa levam-me a agradecimentos particulares, dirigidos a algumas pessoas especiais:

Aos meus pais, Juan e Elenaura, e ao meu irmão, Matheus, por compreenderem minha ausência física e os desafios que impus a mim mesmo. Em especial, aos meus pais, pelo amor incondicional e imensurável, pelo incentivo e pela primazia à educação de seus filhos.

Aos meus orientadores, professores Alexandre Molter e Fabio Botelho, pela intensa dedicação e disponibilidade na realização deste trabalho, pelo incentivo à continuidade dos meus estudos, pelo conhecimento e pela conduta profissional exemplar demonstrada durante estes quase dois anos que trilhamos juntos.

Aos professores Leslie Darien Pérez Fernández e Valdecir Bottega da área de otimização e controle do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat), desta universidade, pelas contribuições a este trabalho e pela minuciosa revisão de uma das primeiras versões deste texto.

Ao professor Jun Sérgio Ono Fonseca do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em virtude de suas contribuições relativas aos aspectos físicos dos problemas de otimização topológica simultânea à localização de atuadores em estruturas.

Aos colegas do PPGMMat pelo companheirismo e pela cooperação acadêmica. Em especial, à Fernanda Tumelero e ao Marcos Carraro, pelas horas de estudos e também de descontração durante o primeiro ano de mestrado.

Ao Diony Alves Reis, por todos os ensinamentos, pelo seu tempo, pela sua dedicação e sua valiosa contribuição em meu crescimento pessoal.

À Adalgisa Maura Carvalho Rezende, tia Seneca, pela acolhida durante meus primeiros dois anos em solo pelotense. Muito obrigado pela sua generosidade e

paciência.

Agradeço também:

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos.

Ao grupo de professores do PPGMMat que tornou este curso uma realidade na Universidade Federal de Pelotas (UFPel).

À UFPel e seu Instituto de Física e Matemática pela oportunidade da realização de meus estudos em nível de especialização e mestrado.

**Um sonho que se sonha só é apenas um sonho.  
Um sonho que se sonha juntos é o começo da realidade.**  
— MIGUEL DE CERVANTES Y SAAVEDRA (1547-1616)

## RESUMO

FERNANDEZ, Lucas dos Santos. **OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA SIMULTÂNEA À LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES EM ESTRUTURAS**. 2015. 130 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2015.

Este trabalho consiste no desenvolvimento de uma metodologia geral e integradora para o projeto simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores em estruturas. Dois problemas são abordados: um que considera atuadores proporcionais e outro que considera atuadores piezoelétricos. A otimização topológica considera três fases materiais: duas referentes a materiais sólidos e uma sem material. Uma variável de projeto é considerada para cada fase material referente aos materiais sólidos. Um destes materiais sólidos é reservado para a parte puramente estrutural enquanto o outro é destinado a representar as regiões da estrutura mais propícias para a alocação de atuadores. Em ambos os problemas, o controle é estático e a otimização topológica é feita pela minimização da flexibilidade. A análise de sensibilidades para a obtenção das equações de equilíbrio e das derivadas da função objetivo com relação às variáveis de projeto é desenvolvida para cada problema. Para obter os resultados numéricos, os modelos estruturais foram discretizados em elementos finitos e um algoritmo apropriado foi implementado em Matlab<sup>®</sup>. As simulações numéricas mostram que a metodologia utilizada neste trabalho pode produzir uma topologia estrutural bem definida indicando o melhor posicionamento para atuadores. Finalmente, vale ressaltar que os resultados obtidos concordam perfeitamente com outros obtidos por meio de procedimentos mais simples, que realizam otimização topológica e controle em processos não simultâneos.

**Palavras-chave:** Projeto simultâneo, otimização topológica, atuadores proporcionais, atuadores piezoelétricos, localização de atuadores.

## ABSTRACT

FERNANDEZ, Lucas dos Santos. **SIMULTANEOUS TOPOLOGY OPTIMIZATION AND ACTUATORS PLACEMENT IN STRUCTURES**. 2015. 130 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2015.

This work develops a general and integrative methodology to the simultaneous project for topology optimization and actuators placement in structures. Two problems are addressed: one considers proportional actuators and the other considers piezoelectric actuators. The topology optimization considers three material phases: two made of solid materials while the other is empty. A project variable is considered for each solid phase. One of these solid materials is reserved for the purely structural part while the other is intended to represent the most favorable regions of the structure for actuators placement. In both problems, the control is static and the topology optimization is intended to minimize the compliance. The sensitivity analysis is developed to obtain the equilibrium equations and the derivatives of the objective function with respect to the project variables to each problem. To obtain numerical results, the structural models were discretized in finite elements and an appropriate algorithm was implemented in Matlab<sup>®</sup>. The numerical simulations show that the methodology used in this work can produce a well-defined structural topology indicating the best position for actuators. Finally, it is worth emphasizing the results obtained perfectly agree with other ones obtained through simpler procedures, which perform topology optimization and control in a non-simultaneous process.

**Keywords:** simultaneous design, topology optimization, proportional actuators, piezoelectric actuators, actuators placement.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplos de estruturas obtidas por Michell: (a) flexão simples para uma viga em balanço; (b) torção em casca esférica. Fonte: Adaptado de Silva, 2003, p. 3. . . . .	28
Figura 2	Primeiros resultados obtidos com a aplicação do método de distribuição ótima de material. Fonte: Adaptado de Bendsøe e Kikuchi, 1988, p. 214 e 216. . . . .	30
Figura 3	Projeto tridimensional integrado de otimização topológica e otimização da forma. Fonte: Adaptado de Tang e Chang, 2001, p. 79 e 81. . . . .	33
Figura 4	Esquema ilustrativo para o processo de polarização de cerâmicas. Fonte: Adaptado de Moheimani e Fleming, 2006, p. 12. . . . .	42
Figura 5	Reação de uma cerâmica piezoelétrica a diferentes estímulos. Fonte: Adaptado de Moheimani e Fleming, 2006, p. 13. . . . .	43
Figura 6	Exemplos de otimização estrutural: (a) otimização paramétrica; (b) otimização de forma e (c) otimização topológica. Fonte: Bendsøe e Sigmund, 2003, p. 2. . . . .	49
Figura 7	Representação de um domínio desconhecido contido no domínio fixo estendido. Fonte: Silveira, 2012, p. 27. . . . .	50
Figura 8	Esquema ilustrativo para um corpo bidimensional sujeito a cargas aplicadas e condições de contorno. Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund, 2003, p. 3. . . . .	53
Figura 9	Fluxograma para o projeto topológico ótimo utilizando o método de distribuição de material. . . . .	59
Figura 10	Topologia com instabilidade de tabuleiro. Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund, 2003, p. 39. . . . .	62
Figura 11	Esquemas ilustrativos para sistemas viga-mola relativos ao problema simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores proporcionais. . . . .	67
Figura 12	Malha $3 \times 3$ para uma viga em balanço sujeita ao próprio peso. . . . .	67
Figura 13	Elemento isoparamétrico bilinear. Fonte: Adaptado de Cook, Malkus e Plesha, 1989, p. 166. . . . .	75
Figura 14	(a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade $\rho_1$ para $\eta_1 = 0,5$ . Distribuição do material de densidade $\rho_2$ , referente aos atuadores, para (c) $\eta_2 = 0,002$ , (d) $\eta_2 = 0,005$ , (e) $\eta_2 = 0,01$ e (f) $\eta_2 = 0,05$ . . . . .	81

Figura 15	Convergência da função objetivo para o Caso 1. . . . .	81
Figura 16	(a) Esquema para viga biengastada sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade $\rho_1$ para $\eta_1 = 0,5$ . Distribuição do material de densidade $\rho_2$ , referente aos atuadores, para (c) $\eta_2 = 0,002$ , (d) $\eta_2 = 0,005$ , (e) $\eta_2 = 0,01$ e (f) $\eta_2 = 0,05$ . . . .	83
Figura 17	Convergência da função objetivo para o Caso 2. . . . .	83
Figura 18	(a), (c) e (e): Esquemas ilustrativos para viga em balanço sujeita à ação das forças $f_{p1}$ e $f_{p2}$ . (b.1) Sobreposição das distribuições de material de densidade $\rho_1$ encontradas em (d) e (f) com $\eta_1 = 0,5$ . (b.2) Distribuição do material de densidade $\rho_1$ considerando a atuação simultânea das forças $f_{p1}$ e $f_{p2}$ para $\eta_1 = 0,5$ . (d) Distribuição do material de densidade $\rho_1$ para (c) com $\eta_1 = 0,5$ . (f) Distribuição do material de densidade $\rho_1$ para (e) com $\eta_1 = 0,5$ . (g) Distribuição do material de densidade $\rho_2$ referente a (b.1) com $\eta_2 = 0,01$ . (h) Distribuição do material de densidade $\rho_2$ referente a (b.2) com $\eta_2 = 0,01$ . . . . .	85
Figura 19	(a), (c) e (e): Esquemas ilustrativos para viga em balanço sujeita à ação das forças $f_{p1}$ e $f_{p2}$ . (b.1) Sobreposição das distribuições de material de densidade $\rho_1$ encontradas em (d) e (f) com $\eta_1 = 0,5$ . (b.2) Distribuição do material de densidade $\rho_1$ considerando a atuação simultânea das forças $f_{p1}$ e $f_{p2}$ para $\eta_1 = 0,5$ . (d) Distribuição do material de densidade $\rho_1$ para (c) com $\eta_1 = 0,5$ . (f) Distribuição do material de densidade $\rho_1$ para (e) com $\eta_1 = 0,5$ . (g) Distribuição do material de densidade $\rho_2$ referente a (b.1) com $\eta_2 = 0,01$ . (h) Distribuição do material de densidade $\rho_2$ referente a (b.1) com $\eta_2 = 0,05$ . . . . .	87
Figura 20	(a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade $\rho_u$ para $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade $\rho_\phi$ (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c) $\eta_\phi = 0,02$ , (d) $\eta_\phi = 0,05$ e (e) $\eta_\phi = 0,1$ . . . . .	115
Figura 21	Convergência da função objetivo para o Caso 5. . . . .	115
Figura 22	(a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade $\rho_u$ para $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade $\rho_\phi$ (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c) $\eta_\phi = 0,02$ , (d) $\eta_\phi = 0,05$ e (e) $\eta_\phi = 0,1$ . . . . .	117
Figura 23	Convergência da função objetivo para o Caso 6. . . . .	117
Figura 24	(a) Esquema para viga biengastada sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade $\rho_u$ para $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade $\rho_\phi$ (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c) $\eta_\phi = 0,02$ , (d) $\eta_\phi = 0,05$ e (e) $\eta_\phi = 0,1$ . . . . .	119
Figura 25	Convergência da função objetivo para o Caso 7. . . . .	119

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Equivalência entre as notações tensorial e reduzida. . . . .	45
Tabela 2	Propriedades materiais do alumínio. . . . .	79
Tabela 3	Propriedades materiais do PZT5A. . . . .	110

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MAM	Método das Assíntotas Móveis
MEF	Método dos Elementos Finitos
OC	Optimality Criteria
PLS	Programação Linear Sequencial
PZT	Titanato-Zirconato de Chumbo
RQL	Regulador Quadrático Linear
SIMP	Simple Isotropic Material with Penalization

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Caracteres latinos

$a, b$	grandezas físicas vetoriais
$a_c, a_c(u, v)$	forma bilinear de energia definida pelo funcional dado pelo trabalho virtual das forças internas de um corpo elástico
$a(u, v, \rho_1, \rho_2)$	funcional dado pela soma do trabalho virtual das forças internas e da energia de controle de um corpo elástico relacionado ao problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores proporcionais
$a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi)$	funcional dado pela soma do trabalho virtual das forças internas de um corpo elástico relacionado ao problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$A, B$	grandezas físicas tensoriais
$B_K$	variável real utilizada no esquema de ponto fixo para atualização das densidades no passo de iteração $K$
$B_u$	derivadas das funções de interpolação com relação ao deslocamento mecânico
$B_\phi$	derivadas das funções de interpolação com relação ao potencial elétrico
$\mathcal{B}_1$	conjunto das variáveis de projeto $\rho_1(x)$ admissíveis
$\mathcal{B}_2$	conjunto das variáveis de projeto $\rho_2(x)$ admissíveis
$\mathcal{B}_u$	conjunto das variáveis de projeto $\rho_u(x)$ admissíveis
$\mathcal{B}_\phi$	conjunto das variáveis de projeto $\rho_\phi(x)$ admissíveis
$c$	tensor de rigidez elástica
$c_e$	rigidez elástica de um elemento finito
$c_{ijkl}^E$	componentes do tensor de rigidez elástica medidas sob campo elétrico constante
$c^E$	tensor de quarta ordem de propriedades elásticas com as suas componentes medidas sob campo elétrico constante
$c_u^E$	matriz das propriedades elásticas de um material puramente estrutural

$c_{\phi}^E$	matriz das propriedades elásticas do material piezoelétrico
$c^0$	tensor de rigidez elástica do material base isotrópico
$c(x)$	tensor de rigidez elástica de um material avaliado em um ponto do domínio fixo estendido
$c(\rho_1), c^E(\rho_u, \rho_{\phi})$	modelos SIMP para a rigidez elástica
$C_{ad}$	conjunto dos tensores de rigidez elástica admissíveis
$\text{dist}(k, i)$	distância entre o centro do elemento $k$ e o centro de um elemento $i$
$D$	vetor de deslocamento elétrico
$D_i$	componentes do vetor de deslocamento elétrico
$D_u$	operador diferencial para funções de interpolação relativas ao deslocamento mecânico
$D_{\phi}$	operador diferencial para funções de interpolação relativas aos potencial elétrico
$e$	tensor de terceira ordem de propriedades piezoelétricas
$e_{ikl}$	componentes do tensor de propriedades piezoelétricas
$e_{kij}$	componentes do tensor de propriedades piezoelétricas proveniente da transposição dos índices mecânicos com o índice elétrico no tensor $e_{ikl}$
$e^T$	tensor de terceira ordem proveniente da transposição do tensor $e$
$e_{\phi}$	matriz das propriedades piezoelétricas
$e(\rho_u, \rho_{\phi})$	modelo SIMP para as propriedades piezoelétricas
<b>est</b>	problema de otimização cuja solução é dada pela obtenção de um ponto estacionário da função (ou do funcional) de custo
$E$	vetor de campo elétrico
$E_k$	componentes do vetor de campo elétrico
$\mathbf{E}^e$	campo elétrico de um elemento finito
$\mathcal{E}^0$	módulo de Young do material base isotrópico
$f$	vetor das forças de corpo
$f_{\phi}$	vetor das cargas elétricas de superfície
$f_p$	vetor de forças concentradas
$f_{p_j}$	componentes do vetor de forças concentradas
$f_p(u)$	operador linear representativo do trabalho das forças concentradas $f_{p_j}$
$f(\rho)$	função objetivo qualquer a ser minimizada
$\mathbf{f}^e$	vetor de forças de corpo de um elemento finito

$\mathbf{f}_p^e$	vetor de forças concentradas de um elemento finito
$\mathbf{f}_\phi^e$	vetor de cargas elétricas de superfície de um elemento finito
$\mathbf{F}_u$	vetor global de forças
$\mathbf{F}_u^e$	vetor de forças de um elemento finito
$g(\boldsymbol{\rho})$	função qualquer na restrição de desigualdade de um problema de otimização
$G$	grandeza física qualquer
$\mathbf{G}_{uu}$	matriz global de localização
$\mathbf{G}_{uu}^e$	matriz de localização de um elemento finito
$h^0$	matriz de localização indicadora do aumento ou da diminuição da rigidez dos elementos nas direções $x_1$ ou $x_2$
$h_{ij}^0$	componentes da matriz de localização $h^0$
$h(\boldsymbol{\rho})$	função qualquer na restrição de igualdade de um problema de otimização
$h(\rho_1, \rho_2)$	modelo SIMP para função de localização
$\mathcal{H}$	entalpia elétrica
$\hat{H}_i$	fator de peso para o filtro de sensibilidades
$i, j, k, l, p, q$	índices diversos
$\mathbf{i}, \mathbf{j}$	vetores canônicos do espaço $\mathbb{R}^2$
$J(u, \rho_1, \rho_2)$	função objetivo discretizada do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores proporcionais
$J(u, \phi, \rho_u, \rho_\phi)$	função objetivo discretizada do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\mathbf{k}_{uuu}^e$	matriz de rigidez do material elástico estrutural do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos de um elemento finito
$\mathbf{k}_{u\phi u}^e$	matriz de rigidez do material piezoelétrico do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos de um elemento finito
$K$	índice para o passo de iteração do esquema de atualização do tipo ponto fixo para a densidade $\rho$
$\mathbf{K}_{uu}$	matriz global de rigidez
$\mathbf{K}_{uu}^e$	matriz de rigidez de um elemento finito
$\mathbf{K}_{u\phi} = \mathbf{K}_{\phi u} = \mathbf{K}_{u\phi}^T$	matriz global de acoplamento piezoelétrico
$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \mathbf{K}_{\phi u}^e = \mathbf{K}_{u\phi}^{eT}$	matriz de acoplamento piezoelétrico de um elemento finito
$\mathbf{K}_{\phi\phi}$	matriz global de capacitância elétrica
$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e$	matriz de capacitância elétrica de um elemento finito

$l(u), l(v)$	forma linear de carga e função objetivo dos problemas de minimização da flexibilidade e de otimização topológica simultânea à localização de atuadores proporcionais
$l(u, \phi), l(u_v, \phi_v)$	forma linear de carga e função objetivo do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\mathcal{L}$	Lagrangeano dos problemas de otimização topológica simultânea à localização de atuadores em estruturas
$\mathcal{L}_H$	Lagrangeano relativo ao Princípio de Hamilton
$L^2(\Omega)$	espaço das funções reais cujo domínio é $\Omega$ e cujo quadrado é finito-integrável
$L^2(\Gamma_t)$	espaço das funções reais cujo domínio é $\Gamma_t$ e cujo quadrado é finito-integrável
$L^2(\Gamma_\phi)$	espaço das funções reais cujo domínio é $\Gamma_\phi$ e cujo quadrado é finito-integrável
$L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$	espaço $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$
$L^2(\Gamma_t; \mathbb{R}^3)$	espaço $L^2(\Gamma_t) \times L^2(\Gamma_t) \times L^2(\Gamma_t)$
$n$	vetor normal a uma superfície
$N$	número total de elementos finitos em uma malha
$N_1, N_2, N_3, N_4$	funções de interpolação de Lagrange e funções de forma
$\mathbf{N}_u$	matriz das funções de interpolação para os deslocamentos mecânicos
$\mathbf{N}_\phi$	matriz das funções de interpolação para os potenciais elétricos
$p, p_1, p_2, p_3$	expoentes de penalização
$\tilde{p}$	número inteiro positivo utilizado para tratar o mal condicionamento de problemas eletromecânicos
$\mathcal{P}$	energia potencial de um sistema mecânico
$q_p$	vetor de cargas elétricas concentradas
$q_{p_i}$	componentes do vetor de cargas elétricas concentradas
$q_p(\phi)$	operador linear representativo do trabalho das cargas elétricas concentradas $q_{p_i}$
$\mathbf{q}_p^e$	vetor de cargas elétricas concentradas de um elemento finito
$\mathbf{Q}_\phi$	vetor global de cargas elétricas
$\mathbf{Q}_\phi^e$	vetor de cargas elétricas de um elemento finito
$r$	constante de proporcionalidade de valor real atuando como a rigidez de uma mola
$r_{min}$	raio de filtragem para o filtro de sensibilidades

$\mathcal{R}$	resíduo da expansão em série de Taylor
$S$	tensor de deformações mecânicas
$S_{kl}$	componentes do tensor de deformações mecânicas
$\mathbf{S}^e$	campo de deformações mecânicas de um elemento finito
$t$	vetor das forças de superfície
$\mathbf{t}^e$	vetor das forças de superfície de um elemento finito
$t$	tempo
$t_0, t_f$	instantes de tempo distintos
$T$	tensor de tensões mecânicas
$T_{ij}$	componentes do tensor de tensões mecânicas
$u$	vetor de deslocamentos mecânicos
$u_l$	componentes do vetor de deslocamentos mecânicos
$u_K$	vetor de deslocamentos mecânicos no passo de iteração $K$
$u(x_j)$	deslocamento no ponto $x_j$
$\bar{u}$	vetor de deslocamentos mecânicos que atua como multiplicador de Lagrange
$\mathbf{u}^e$	vetor de deslocamentos mecânicos de um elemento finito
$\mathbf{u}_i^e$	vetor de deslocamentos mecânicos nodais de um elemento finito
$\mathbf{U}$	vetor global de deslocamentos mecânicos também chamado de vetor global de deflexão
$\mathcal{U}$	espaço dos campos de deslocamento cineticamente admissíveis
$v, u_v$	vetor de deslocamentos mecânicos virtuais
$V$	volume do domínio fixo estendido
$V^e$	volume da região do domínio fixo estendido correspondente a um elemento finito
$\mathcal{W}$	trabalho virtual das forças mecânicas externas e cargas elétricas aplicadas
$W^{1,2}(\Omega)$	espaço das funções em $L^2(\Omega)$ tais que as derivadas de primeira ordem em sentido de distribuições também estão em $L^2(\Omega)$
$W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$	espaço $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$
$x$	ponto do domínio fixo estendido
$x_l$	eixo $l$ do sistema de coordenadas retangulares
$\mathbf{x}^e$	vetor das coordenadas cartesianas de um elemento finito considerando as dimensões do domínio fixo estendido
$\mathbf{x}_i^e$	vetor das coordenadas cartesianas de um elemento finito sem considerar as dimensões do domínio fixo estendido

$y$	campo vetorial qualquer
$Y^0$	propriedade do material base
$Y(x)$	função propriedade material constitutiva
$z$	campo escalar qualquer

### Caracteres gregos

$\alpha_i$	direções admissíveis para a análise de sensibilidades dos problemas de otimização topológica simultânea à localização de atuadores em estruturas
$\alpha_\Psi$	conjunto de direções admissíveis para a análise de sensibilidades do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores proporcionais
$\alpha_\Upsilon$	conjunto de direções admissíveis para a análise de sensibilidades do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\Gamma$	fronteira ou contorno do domínio fixo estendido
$\Gamma^e$	região da fronteira do domínio fixo estendido correspondente a um elemento finito
$\Gamma_q$	fronteira do domínio fixo estendido onde são aplicadas as cargas elétricas
$\Gamma_t$	fronteira do domínio fixo estendido onde são aplicadas as forças de superfície
$\Gamma_t^e$	região de aplicação das forças de superfície na fronteira do domínio fixo estendido correspondente a um elemento finito
$\Gamma_u$	fronteira do domínio fixo estendido onde são definidos os deslocamentos
$\Gamma_\phi$	fronteira do domínio fixo estendido onde são especificados os potenciais elétricos
$\Gamma_\phi^e$	região de especificação dos potenciais elétricos na fronteira do domínio fixo estendido correspondente a um elemento finito
$\delta$	operador de variação
$\hat{\delta}$	função delta de Dirac
$\epsilon^S$	tensor de segunda ordem de propriedades dielétricas medidas sob deformação constante
$\epsilon_{ik}^S$	componentes do tensor de propriedades dielétricas medidas sob deformação constante
$\epsilon_\phi^S$	matriz das propriedades dielétricas
$\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)$	modelo SIMP para as propriedades dielétricas

$\zeta$	limite móvel no esquema de atualização de ponto fixo para a densidade $\rho$
$\eta$	fração do volume $V$ a ser considerada no processo de otimização topológica
$\eta_1$	fração do volume $V$ a ser considerada para a parte puramente estrutural do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores proporcionais
$\eta_2$	fração do volume $V$ a ser considerada para o material relativo aos atuadores do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores proporcionais
$\eta_u$	fração do volume $V$ a ser considerada para a parte puramente estrutural do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\eta_\phi$	fração do volume $V$ a ser considerada para o material relativo aos atuadores do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\lambda$	conjunto das funções escalares em $L^2(\Omega)$ que atuam como multiplicadores de Lagrange
$\lambda^-, \lambda^+, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$	funções escalares que atuam como multiplicadores de Lagrange
$\Lambda$	conjunto das constantes reais que atuam como multiplicadores de Lagrange
$\bar{\Lambda}, \Lambda_1, \Lambda_2$	constantes reais que atuam como multiplicadores de Lagrange
$\bar{\Lambda}_K$	multiplicador de Lagrange $\bar{\Lambda}$ no passo de iteração $K$
$\mu$	valor real atuando como calibrador no método PLS
$\nu^0$	coeficiente de Poisson do material base isotrópico
$\xi$	variável real auxiliar utilizada na análise de sensibilidades dos problemas de otimização topológica simultânea à localização de atuadores em estruturas
$\rho$	pseudodensidade e variável de projeto
$\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}^*$	vetores de variáveis de projeto
$\rho_K$	pseudodensidade no passo de iteração $K$
$\rho_{min}$	pseudodensidade mínima de um material isotrópico
$\rho(x)$	função pseudodensidade qualquer
$\rho_1, \rho_1(x)$	variável de projeto e função pseudodensidade relacionada à parte puramente estrutural do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores proporcionais
$\rho_{1min}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto estrutural $\rho_1$
$\rho_{1e}$	pseudodensidade relativa à variável de projeto estrutural $\rho_1$ de um elemento finito

$\rho_{1e_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto estrutural $\rho_1$ de um elemento finito
$\rho_2, \rho_2(x)$	variável de projeto de controle e função pseudodensidade para o material relativo aos atuadores proporcionais
$\rho_{2_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto de controle $\rho_2$
$\rho_{2e}$	pseudodensidade relativa à variável de projeto de controle $\rho_2$ de um elemento finito
$\rho_{2e_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto de controle $\rho_2$ de um elemento finito
$\rho_u, \rho_u(x)$	variável de projeto e função pseudodensidade relacionada à parte puramente estrutural do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\rho_{u_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto estrutural $\rho_u$
$\rho_{ue}$	pseudodensidade relativa à variável de projeto estrutural $\rho_u$ de um elemento finito
$\rho_{ue_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto estrutural $\rho_u$ de um elemento finito
$\rho_\phi, \rho_\phi(x)$	variável de projeto de controle e função pseudodensidade para o material relativo aos atuadores piezoelétricos
$\rho_{\phi_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto de controle $\rho_\phi$
$\rho_{\phi e}$	pseudodensidade relativa à variável de projeto de controle $\rho_\phi$ de um elemento finito
$\rho_{\phi e_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto de controle $\rho_\phi$ de um elemento finito
$\rho_i^L$	limite móvel inferior no passo de iteração $i$ utilizado no método PLS
$\rho_i^U$	limite móvel superior no passo de iteração $i$ utilizado no método PLS
$\bar{\rho}$	densidade de um material
$\Upsilon$	conjunto dos deslocamentos, potenciais elétricos e valores das variáveis de projeto admissíveis do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\phi$	potencial elétrico
$\phi_v$	potencial elétrico virtual
$\phi^e$	potencial elétrico de um elemento finito
$\phi(x_l)$	potencial elétrico no ponto $x_l$

$\phi$	vetor global de potenciais elétricos
$\phi_i^e$	vetor de potenciais elétricos nodais de um elemento finito
$\Phi$	espaço dos potenciais elétricos cineticamente admissíveis
$\varphi$	parâmetro de ajuste no esquema de atualização do tipo ponto fixo para a densidade $\rho$
$\chi(x)$	função característica indicadora da fase sólida e da fase sem material
$\Psi$	conjunto dos deslocamentos e valores das variáveis de projeto admissíveis do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores proporcionais
$\Omega$	domínio fixo estendido de projeto também chamado de domínio viável
$\Omega_d$	região onde há presença de material em um domínio fixo estendido
$\Omega^e$	região do domínio fixo estendido correspondente a um elemento finito
$\widehat{\Omega}^e$	elemento mestre

### Outros caracteres

$\nabla$	operador gradiente
$\partial$	operador de derivação parcial
$\partial G / \partial \rho_i$	sensibilidade da grandeza $G$ em relação à pseudodensidade $\rho_i$
$\widehat{\partial G} / \partial \rho_k$	sensibilidade obtida pelo filtro de sensibilidades

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	25
1.1	Motivação	25
1.2	Revisão bibliográfica	27
1.3	Apresentação da proposta e objetivos	37
1.4	Organização da dissertação	38
<b>2</b>	<b>PIEZOELETRICIDADE</b>	40
2.1	Introdução	40
2.2	Cerâmicas piezoelétricas	42
2.3	Equações constitutivas	43
2.4	Descrição dos tensores de material	45
2.5	Estado plano de tensões mecânicas	47
<b>3</b>	<b>MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA</b>	48
3.1	Introdução	48
3.2	Conceitos básicos	50
3.2.1	Domínio fixo estendido	50
3.2.2	Modelo material	50
3.3	Método das densidades	51
3.4	Problema de minimização da flexibilidade	53
3.5	Condições de otimalidade	55
3.6	Procedimento computacional	58
3.7	Aspectos numéricos e complicações	60
3.7.1	Refinamento da malha e existência de soluções	60
3.7.2	Instabilidade do tabuleiro	62
3.7.3	Mínimos locais e dependência de dados	63
<b>4</b>	<b>PROJETOS SIMULTÂNEOS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES</b>	64
4.1	Localização de atuadores proporcionais	65

4.1.1	Modelagem matemática do problema de otimização . . . . .	65
4.1.2	Análise de sensibilidades . . . . .	68
4.1.3	Discretização do problema de otimização via MEF . . . . .	74
4.1.4	Simulações e resultados . . . . .	79
<b>4.2</b>	<b>Localização de atuadores piezoelétricos . . . . .</b>	<b>88</b>
4.2.1	Modelagem matemática do problema de otimização . . . . .	88
4.2.2	Análise de sensibilidades . . . . .	90
4.2.3	Formulação variacional para problemas piezoelétricos . . . . .	102
4.2.4	Discretização do problema de otimização via MEF . . . . .	105
4.2.5	Simulações e resultados . . . . .	109
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS PARA FUTUROS TRABALHOS . . . . .</b>	<b>121</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>123</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

O uso integrado de componentes ativos como sensores, atuadores e controladores em estruturas caracteriza as chamadas estruturas inteligentes. Os materiais inteligentes são aqueles que apresentam comportamentos incomuns devido à sensibilidade à variação de temperatura, de pressão ou de deformação; que podem diagnosticar um problema, memorizar processos repetitivos ou iniciar uma ação apropriada para preservar a integridade estrutural enquanto continua a realizar suas funções básicas. A combinação de sensores, atuadores e controladores piezoelétricos, por exemplo, constitui um material inteligente que, por sua vez, é parte de uma estrutura inteligente. Os materiais piezoelétricos têm sido largamente empregados para o controle de vibrações e supressão de ruídos em aeronaves e robôs. São exemplos de estruturas inteligentes: veículos aeroespaciais, terrestres e aquáticos; estruturas de construção civil; máquinas e equipamentos industriais; e eletrodomésticos; aos quais são incorporados materiais inteligentes com o objetivo de conferir uma gama de funcionalidades desejadas, tais como: controle de forma e posicionamento, atenuação de vibrações e ruído, monitoramento de integridade estrutural, geração de energia, entre outras. Assim, o projeto mecânico de estruturas inteligentes e os materiais inteligentes definem uma recente e promissora área de pesquisa para o desenvolvimento e aprimoramento de estruturas mecânicas.

Presentes nas linhas de montagem e produção de diversos outros tipos de indústrias, as estruturas inteligentes acompanharam o avanço tecnológico, a produção em larga escala e a competitividade mercantil que são característicos do sistema capitalista globalizado vigente e, neste sistema já visivelmente desenvolvido, melhoraram os processos de produção e otimizaram os produtos gerados através de equipamentos mais bem estruturados e da automação industrial.

No projeto estrutural e automatizado, as estruturas (máquinas, robôs ou corpos rígidos e estáticos, simplesmente) podem ser idealizadas de forma a suportar carregamentos e possuir a capacidade de automonitoramento e autocontrole como acon-

tece, por exemplo, nas máquinas automáticas em linhas de montagem que não só substituem a força muscular do homem como possuem a capacidade de corrigir erros que possam surgir durante os processos de produção. Nestes projetos, pode-se buscar a redução da massa e o controle das vibrações a fim de melhorar o desempenho da estrutura e tornar o projeto mecânico otimizado o que evidencia a necessidade de métodos avançados de otimização estrutural e de controle.

Através de uma distribuição eficiente de sensores e atuadores altamente integrados, um sistema controlador pode detectar modos de vibração e gerar forças de controle para reduzir as vibrações estruturais (SILVEIRA, 2012), atuando de forma a compensar os efeitos que levariam a resposta do sistema a se afastar de patamares aceitáveis. Por isso, componentes ativos são cada vez mais presentes em projetos de mecanismos flexíveis. Já no âmbito do projeto estrutural, métodos como o de otimização topológica e otimização da forma vêm sendo amplamente aplicados para obtenção de estruturas mais leves. Citam-se os exemplos apontados em Bendsøe e Sigmund (2003), onde afirmam que as indústrias aeroespacial e automotiva aplicam dimensionamento e otimização da forma ao projeto de estruturas e elementos mecânicos e que estes métodos também são utilizados no projeto de dispositivos eletromagnéticos, eletroquímicos e acústicos. Nas últimas décadas, em consequência de suas aplicações, tem-se observado uma quantidade significativa de trabalhos na área de otimização estrutural o que foi estimulado principalmente pelo sucesso do método de distribuição de material para a geração de topologias ótimas de estruturas.

O projeto destas estruturas considera, dentre vários fatores, a interação entre as forças aplicadas, a distribuição ótima de material e a localização dos atuadores. Para o controle de estruturas maiores, atuadores pneumáticos, hidráulicos e magnéticos podem ser apropriados. Atuadores piezoelétricos podem representar uma melhor escolha para estruturas menores, pois geram uma força de acionamento maior e apresentam tempos de resposta rápidos, o que é ideal para deslocamentos pequenos (SUN et al., 2004; MOLTER et al., 2013). Apesar da escolha do tipo de material para os atuadores estar bem definida e justificada, a melhor localização para estes atuadores na estrutura não é óbvia e tem uma influência significativa no desempenho do sistema de controle (OU; KIKUCHI, 1996b; KUMAR; NARAYANAN, 2008; DONOSO; SIGMUND, 2009; SILVEIRA; FONSECA; SANTOS, 2014).

Alguns cristais, cerâmicas e polímeros geram um diferencial de potencial elétrico quando são submetidos à tensão mecânica ou se deformam quando um campo elétrico atua sobre eles. Tais comportamentos caracterizam o efeito piezoelétrico e, em virtude disto, estes materiais recebem esta mesma denominação (HEYWANG; LUBITZ; WERSING, 2008). A inserção ou acoplamento destes materiais em projetos mecânicos já é conhecida e visa utilizar seus efeitos no controle das vibrações uma vez que podem gerar forças mecânicas quando acionadas eletricamente, exer-

cendo o papel de atuador e sensor (MOHEIMANI; FLEMING, 2006). Os materiais piezoelétricos podem também ser utilizados como atuadores para o bombeamento de líquidos a fim de se obter maiores vazões ou pressões para escoamento de fluídos (BURGREEN et al., 2001; WU et al., 2003) e em posicionamento de precisão onde atuadores em um sistema de controle garantem o posicionamento correto de mecanismos (DEVASIA; ELEFTHERIOU; MOHEIMANI, 2007). De acordo com Silveira (2012), em aplicações utilizam-se peças de tamanho e forma padrões; ainda, em projetos de otimização topológica, esses materiais podem ter a posição pré-definida.

Estruturas espaciais, aviões e similares necessitam ter peso reduzido devido ao alto custo do transporte. Além disso, estes também são levemente amortecidos por causa do baixo amortecimento interno dos materiais utilizados na sua construção, o que pode causar vibrações de grandes amplitudes (WANG; CHEN; HAN, 1999). No funcionamento de mecanismos precisos, como acontece em algumas aplicações espaciais, o aparecimento de vibrações de grandes amplitudes é um comportamento notoriamente indesejado, pois pode comprometer a funcionalidade das estruturas, gerando falhas mecânicas. Por isso, o controle de vibrações e o posicionamento de precisão são partes essenciais no projeto mecânico de estruturas. Assim, a utilização de um sistema de controle ativo constituído por atuadores e sensores leves e com baixo amortecimento é de grande valia. Neste contexto, materiais piezoelétricos são ideais para uso em sensoriamento e controle de estruturas flexíveis, pois os sistemas de controle constituídos por estes materiais têm vantagens como baixo peso, alta precisão e eficiência (MOLTER, 2008).

A proposta deste trabalho de desenvolver uma metodologia de projeto simultâneo de otimização topológica e localização ótima para atuadores fica bem justificada por meio dos diversos argumentos acima expostos. Ademais, fica evidente o caráter interdisciplinar da pesquisa, pois envolve conhecimentos que permeiam as áreas de mecânica estrutural, controle e ciência dos materiais, além de matemática aplicada e computacional, propiciando um aprendizado amplo e diversificado.

## **1.2 Revisão bibliográfica**

A revisão bibliográfica aqui sintetizada tem início nos problemas pioneiros de otimização topológica e avança para problemas mais complexos na medida em que termos matemáticos que possibilitam a descrição de sistemas de controle e a busca pela localização ótima de atuadores na estrutura são acrescentados ao problema de otimização topológica original, o que pode ser feito, por exemplo, tomando como base o problema de máxima rigidez global (BENDSØE; SIGMUND, 2003). O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos métodos possíveis para a discretização dos problemas de otimização topológica sendo adotado nesta dissertação para a implementação

computacional e resolução dos problemas apresentados. Em virtude disso, o MEF é abordado nesta seção e frequentemente citado em outros capítulos. Considera-se também nesta revisão a discussão e apresentação de estudos e problemáticas voltados ao uso de materiais piezoelétricos como atuadores e sensores e à localização ótima dos atuadores e sensores nas estruturas topologicamente otimizadas.

A otimização topológica tem sua origem nas otimizações paramétrica e de forma e busca projetar a topologia ótima de estruturas segundo algum critério de custo como, por exemplo, máxima rigidez e menor peso. Deste modo, o projeto topológico estrutural baseado neste critério consiste em utilizar menos material de modo a maximizar a rigidez da estrutura, mantendo ou melhorando a sua eficiência mecânica. A questão central que surge com a aplicação destes métodos é como distribuir o material na estrutura satisfazendo os critérios de projeto mecânico.

Em 1904, Michell, com base em Maxwell (1872), calculou, utilizando a teoria da elasticidade, o campo de tensão mecânica de uma força aplicada num ponto de um domínio que está sujeito a restrições de deslocamento em outros pontos, obtendo as linhas de isotensão principais para o campo de tensões. Partindo destas linhas, propôs nesse domínio uma estrutura formada por barras (treliça) onde cada barra (elemento de treliça) estivesse alinhada com as direções principais de tensão calculadas no domínio (MICHELL, 1904). Este critério fornece o mesmo resultado que o critério de máxima rigidez com mínimo volume de material e atualmente já se provou que, partindo de um meio contínuo, a configuração com melhor aproveitamento de material, segundo o critério anteriormente exposto, é uma estrutura de barras de treliça. Alguns dos resultados de Michell podem ser visualizados na figura abaixo.

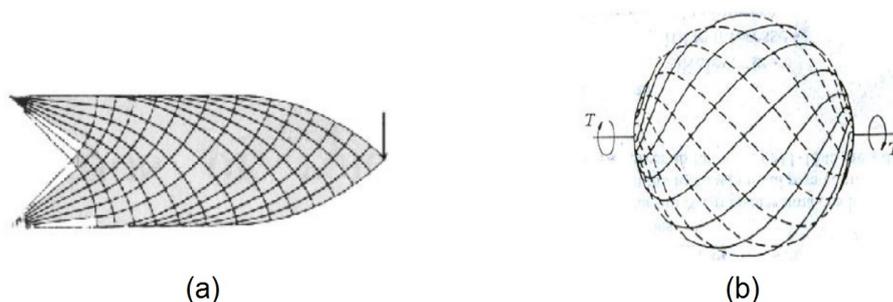


Figura 1: Exemplos de estruturas obtidas por Michell: (a) flexão simples para uma viga em balanço; (b) torção em casca esférica. Fonte: Adaptado de Silva, 2003, p. 3.

Avanços significativos em otimização estrutural não foram observados até a década de 60 quando, em virtude do surgimento dos computadores e da implementação de métodos numéricos, problemas práticos de otimização estrutural puderam ser estudados utilizando otimização paramétrica; e o método Simplex para a solução de problemas de programação linear pôde logo ser desenvolvido (SILVA, 2003). Na década de 70 são implementados vários algoritmos de otimização para problemas não-lineares

de otimização. Segundo Silva (2003), a formulação teórica de alguns algoritmos já havia sido desenvolvida anteriormente, no entanto somente com o desenvolvimento das linguagens de programação eles foram implementados.

O MEF alcançou maior solidez e espaço como método para a representação e geração de domínios em problemas de engenharia a partir da década de 60. Na década de 80, problemas com restrições internas passaram a ser resolvidos com este método, e na de 90, devido à ampla disponibilidade de computadores e programas comerciais de baixo custo, este método se popularizou com eficientes ferramentas de pré e pós-processamento, o que facilitou o seu uso em modelos com mais de um grau de liberdade. Os problemas de otimização estrutural passaram a ser resolvidos através da implementação conjunta de algoritmos de otimização e do MEF. Simonetti (2009) cita alguns trabalhos (CHENG; OLHOFF, 1981; KOHN; STRANG, 1986) onde o MEF é utilizado a fim de investigar a natureza do problema correspondente à maximização da rigidez de placas delgadas considerando a espessura como variável de projeto o que possibilitou concluir que para este problema de otimização existem várias soluções ótimas locais.

Computacionalmente, as otimizações de forma e paramétrica apresentavam problemas quando se desejava alterar a topologia de uma estrutura iterativamente, pois, para estes métodos, a mudança da topologia durante um determinado processo de otimização estrutural implica na alteração do modelo de elementos finitos associado à estrutura do início do processo. Para isso, a cada iteração o problema físico deve ser modificado e o algoritmo deve prever a atualização da malha de elementos finitos. Isto se mostrou significativamente complexo na década de 80 e levou a um questionamento dos resultados das otimizações de forma e paramétrica (SIMONETTI, 2009).

Assim, a fim de superar as limitações das técnicas de otimização de forma e otimização paramétrica, Bendsøe e Kikuchi (1988) reformulam o problema de otimização de forma transformando-o em um problema de distribuição de material utilizando materiais compósitos. A ideia do processo é considerar duas fases materiais constituintes para formar a topologia, material e vazio (ausência de material), de modo que uma distribuição ótima do material seja considerada em vez da otimização de forma que se concentra em variações dos contornos a partir de equações paramétricas. Uma importante característica do procedimento de distribuição de material é que o método de homogeneização é aplicado para determinar as equações constitutivas macroscópicas para o material com constituintes materiais microscópicas (BENDSØE; KIKUCHI, 1988).

O trabalho inovador de Bendsøe e Kikuchi (1988) foi inspirado em trabalhos que tratavam da otimização de espessuras de chapas e placas (CHENG; OLHOFF, 1981, 1982); que estudaram a otimização para projetos de barras de torção construídas com dois materiais com diferentes proporções volumétricas e placas (LURIE; FEDOROV;

CHERKAEV, 1982a,b; GOODMAN; KOHN; REYNA, 1986); e também em trabalhos que investigaram o problema de máxima rigidez (com restrição de volume) de placas delgadas (ROZVANY et al., 1987a,b). Conforme comentado anteriormente, alguns destes trabalhos mostraram a existência de vários ótimos locais como soluções do problema de otimização. Contudo, demonstrou-se que a introdução de microestruturas na formulação do problema de projeto estrutural implica em relaxação do problema variacional que pode ser formulado para a otimização do projeto. Deste modo, tem-se a vantagem de diminuir o número de mínimos locais do problema original, tornando-se mais fácil atingir o ótimo global do problema de otimização (KOHN; STRANG, 1986). Tal artifício também foi utilizado por Bendsøe e Kikuchi (1988).

A Figura 2 ilustra alguns dos primeiros resultados obtidos pela aplicação deste novo método, mais tarde chamado otimização topológica. O domínio de projeto é mostrado em (a). Devido a simetria do domínio, somente a parte superior da estrutura é considerada para as simulações computacionais e foi discretizada em uma malha de  $32 \times 20$  elementos. A distribuição ótima de material é mostrada em (b), (c) e (d) cujas topologias apresentam 91%, 64% e 36% do volume da estrutura original, respectivamente.

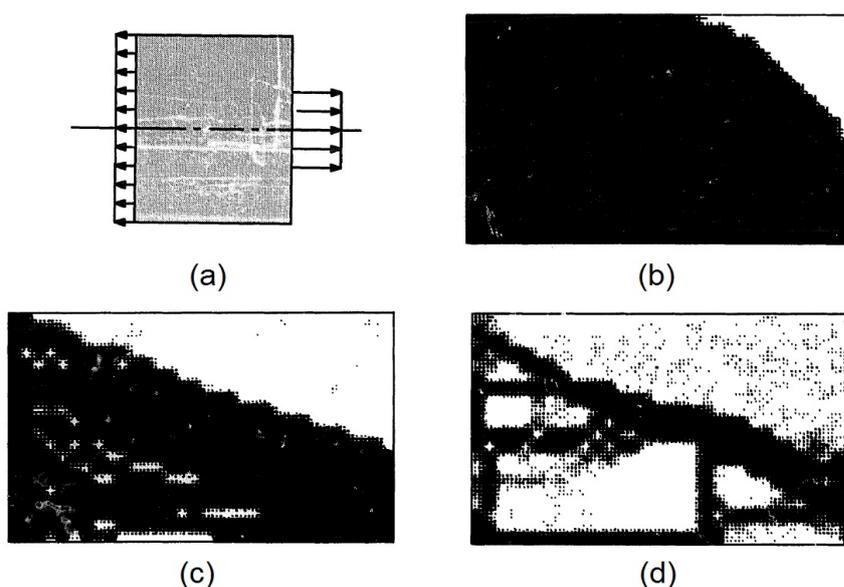


Figura 2: Primeiros resultados obtidos com a aplicação do método de distribuição ótima de material. Fonte: Adaptado de Bendsøe e Kikuchi, 1988, p. 214 e 216.

A nova metodologia apresentada por Bendsøe e Kikuchi (1988) é capaz de fornecer topologia e forma ótimas para a estrutura, onde a variação da forma é garantida sem ser preciso utilizar equações paramétricas ou superfícies auxiliares, mantendo-se fixa a malha do modelo de elementos finitos ao longo do processo de otimização (PORTO, 2006). Além disso, as propriedades macroscópicas dos materiais, tal como

a rigidez, são obtidas com o uso da teoria da homogeneização. Tal teoria é baseada na utilização de materiais compósitos como uma base para descrever propriedades materiais variantes no espaço (BENDSØE; KIKUCHI, 1988).

A partir dos resultados obtidos por Bendsøe e Kikuchi (1988), pesquisadores puderam utilizar o método de otimização topológica, de forma e paramétrica de modo integrado nos problemas de otimização estrutural. A ideia era então que a otimização topológica fosse utilizada inicialmente, sendo em seguida empregado um dos métodos clássicos de otimização de forma (PORTO, 2006). Em um dos trabalhos, a otimização topológica serve como pré-processador das otimizações de forma e paramétrica, conferindo a estas resultados finais muito melhores (OHLOFF; BENDSØE; RASMUSSEN, 1991). Outros trabalhos, por sua vez, integraram as otimizações topológica e de forma através da definição de módulos para cada ferramenta (SIENZ; HINTON, 1997; TANG; CHANG, 2001).

Com o desenvolvimento da otimização topológica, inúmeros trabalhos surgiram no meio acadêmico, tornando esta metodologia um campo de estudo promissor. Em Bendsøe e Sigmund (2003), capítulo 2, são apresentadas diversas áreas de pesquisa (extensões e aplicações) da otimização topológica. Dentre elas, cita-se: (i) o uso da otimização topológica como ferramenta para o projeto de estruturas; (ii) a solução ou melhoria das complicações provenientes do método tais como dependência da malha, existência de soluções e instabilidade de tabuleiro; (iii) o desenvolvimento de novas abordagens para a otimização topológica; (iv) problemas em dinâmica tais como aqueles voltados para vibrações livres ou forçadas e problemas de autovalores; (v) problemas de flambagem; (vi) a imposição de restrições de tensão no problema de otimização topológica; (vii) problemas dependentes de cargas de pressão; (viii) problemas geometricamente não lineares; (ix) problemas voltados ao projeto do material; (x) problemas de propagação de ondas; (xi) entre outros estudos voltados para aplicações diversas como nas áreas de proteção contra a colisão<sup>1</sup>, simulações biomecânicas, indústria automotiva e *software*, por exemplo.

No final da década de 90, apesar do método de otimização topológica para estruturas contínuas ter alcançado um nível de maturidade, sendo aplicado a muitos problemas industriais e com uso acadêmico generalizado não somente para problemas de otimização estrutural, mas também em problemas de materiais, mecanismos e eletromagnetismo, ainda se verificava significantes problemas relativos à convergência, instabilidade do tabuleiro e dependência da malha; tópicos de debate na comunidade de otimização topológica à época (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Em virtude de tais instabilidades numéricas provenientes do método apresentado por Bendsøe e Kikuchi, muitos estudos e abordagens diversas surgiram para contornar, resolver ou melhorar os códigos computacionais. Sigmund e Petersson (1998) fizeram uma re-

---

<sup>1</sup>Em inglês, *crashworthiness*. Também compreende a área de estudo de resistência ao choque.

visão dos problemas numéricos e discutiram os métodos com os quais eles podem ser evitados. Tais problemas numéricos serão posteriormente discutidos em seções específicas desta dissertação.

Devido a sua aplicabilidade e complexidade, pesquisadores têm publicado artigos educacionais explicando e disponibilizando os códigos de implementação numérica do método de otimização topológica. Os códigos resolvem o problema de maximização da rigidez com restrição de volume e são escritos em linguagem do Matlab<sup>®</sup>. O primeiro deles contém noventa e nove linhas, a estrutura (ou domínio viável) é tratada bidimensionalmente e as cargas consideradas são estáticas (SIGMUND, 2001). Sigmund, juntamente com Andreassen e outros pesquisadores, melhora o código escrito em seu trabalho anterior, reduzindo o número de linhas para oitenta e oito e aumentando a eficiência computacional de processamento dos cálculos (ANDREASSEN et al., 2011). Um eficiente e compacto código para resolver problemas de otimização topológica tridimensionais é apresentado em cento e oitenta e nove linhas que compreendem o cálculo estrutural via elementos finitos, a análise de sensibilidade, o otimizador de critério de otimalidade e a geração gráfica dos resultados (LIU; TOVAR, 2014). Nos três últimos trabalhos citados anteriormente, a definição dos suportes e cargas externas pode ser facilmente modificada; também há instruções para a definição de múltiplas cargas, elementos passivos e ativos bem como elementos teóricos e numéricos para implementar estratégias de programação não linear tais como programação quadrática sequencial e o método das assíntotas móveis.

A Figura 3 é um arranjo de ilustrações obtidas do projeto tridimensional de uma engrenagem que é fixa à carroceria e à roda de um veículo do tipo tanque (TANG; CHANG, 2001). O projeto trata-se de uma aplicação complexa que integra a otimização topológica e a otimização de forma para a obtenção de uma topologia ótima para a engrenagem, cuja principal função é proporcionar movimento para a roda do veículo. O modelo inicial da engrenagem em elementos finitos é apresentado em (a) de modo que as partes mais claras do modelo são aquelas que não sofrerão alteração com o processo de otimização. Em (b) é mostrada a topologia otimizada e em (c) esta mesma topologia é suavizada em um *software* (SolidWorks<sup>®</sup> ou AutoCAD<sup>®</sup>, por exemplo) para tornar a peça viável para fabricação. Até a obtenção da peça mostrada em (d), esta é novamente discretizada em uma malha de elementos finitos para o projeto de forma e passa pela análise de tensões de Von Mises. Em (d), o cinza mais claro representa o volume de material original e o cinza mais escuro o volume de material otimizado.

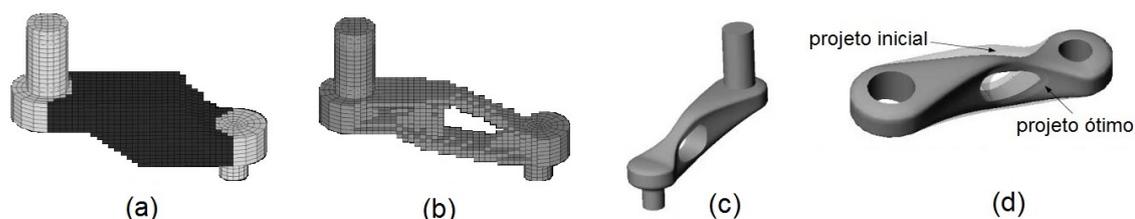


Figura 3: Projeto tridimensional integrado de otimização topológica e otimização da forma. Fonte: Adaptado de Tang e Chang, 2001, p. 79 e 81.

O exemplo acima representa tanto a evolução do método de otimização topológica, desde os seus primeiros resultados em 1988, quanto o seu uso de forma integrada a outras técnicas e *softwares*.

No projeto de sistemas mecânicos controlados, de forma geral, o projeto estrutural precede o projeto de controle, ou seja, engenheiros de estruturas definem um leiaute com a finalidade de suportar carregamentos estáticos e dinâmicos; após isso, os engenheiros de controle definem o sistema controlador utilizando a estrutura pré-definida. Entretanto, o projeto em sequência pode diminuir de forma significativa a eficácia do controle das vibrações da estrutura (OU; KIKUCHI, 1996a; SILVEIRA, 2012).

Segundo Silveira (2012), desde o início da década de 90, contrariando a prática comum, diversos trabalhos teóricos apontaram para a realização de projetos simultâneos de otimização estrutural e controle, os quais tinham o intuito de reduzir os custos e aumentar o desempenho dos projetos se comparados aos projetos feitos em sequência. Surgem, a partir desta problemática, novos enfoques para as pesquisas em projetos mecânicos. Dentre eles, destaca-se um que visa utilizar a otimização topológica de forma integrada aos sistemas de controle para, assim, obter estruturas otimizadas tanto do ponto de vista topológico quanto do ponto de vista do controle e outro que busca apontar qual a melhor localização para materiais ativos (responsáveis pelo controle da estrutura) em projetos mecânicos estruturalmente otimizados.

A fim de exemplificar as abordagens adotadas para problemas envolvendo otimização da estrutura e do controle, pode-se citar um trabalho que considerou o projeto integrado como um problema de otimização multiobjetivo, onde a massa estrutural e um índice de desempenho quadrático constituíram a função objetivo vetorial (CANFIELD; MEIROVITCH, 1994). Foram demonstrados, ainda, os benefícios de resolver o problema de otimização estrutural e de controle de forma integrada gerando projetos ótimos de Pareto para uma viga simples. Já em outro trabalho, uma abordagem que combina a otimização estrutural controlada com o método de homogeneização foi apresentada visando projetar uma estrutura controlada ótima que possua uma melhor resposta que aquela sem o controle (OU; KIKUCHI, 1996a). Segundo Ou e Kikuchi (1996a), com esta abordagem, os engenheiros de controle podem considerar a localização de atuadores antes do projeto estrutural, enquanto os engenheiros estru-

turais tratam este requisito como uma restrição tornando o projeto simultâneo e com o sistema de controle não totalmente separado do projeto estrutural. Num segundo trabalho, Ou e Kikuchi (1996b) apresentam uma formulação para o projeto integrado de otimização estrutural e controle com os seguintes objetivos: projetar uma estrutura considerando os efeitos do controle, elaborar um algoritmo de controle para reduzir a vibração sem valores de tensão excessivos e encontrar localizações adequadas para os atuadores. Este trabalho mostra que a resposta dinâmica do projeto estrutural controlado é superior ao projeto estático tradicional. Assim, verificou-se que o controle ativo pode remover a energia da estrutura de forma eficaz se for realizado apropriadamente (OU; KIKUCHI, 1996b).

No trabalho de Wang, Chen e Han (1999), pode-se perceber que o problema de otimização, visando a integração entre a otimização estrutural e o controle, apresenta uma nova formulação. As variáveis de dimensionamento estrutural e da matriz de ganhos de realimentação foram tratadas como variáveis de projetos independentes; o índice de desempenho de controle é utilizado como função objetivo principal, enquanto a massa da estrutura inteligente é restringida pela massa disponível o que evidencia novas formas de tratar e resolver problemas simultâneos de otimização topológica com controle (WANG; CHEN; HAN, 1999).

Entre trabalhos que estudaram otimização multidisciplinar utilizando algoritmos genéticos discutindo o controle ótimo, a análise de sensibilidade e a otimização integrada, pode-se citar aqueles que assim fizeram para: estruturas de tensegridade<sup>2</sup> (RAJA; NARAYANAN, 2009), estruturas treliçadas (BEGG; LIU, 2000; LIU; BEGG, 2000) e placas inteligentes piezoelétricas (XU; OU; JIANG, 2013). Raja e Narayanan (2009) utilizaram uma estratégia aninhada na qual foram consideradas normas de controle robusto como funções objetivo do sistema de controle e os ângulos de torção e a localização dos atuadores foram tomados como variáveis de projeto. O trabalho de Xu, Ou e Jiang (2013), por sua vez, considerou como variáveis de projeto as densidades de material, o número e a posição dos atuadores bem como os parâmetros de controle. Além disso, em ambos os trabalhos, a força gerada pelo acoplamento eletromecânico do atuador piezoelétrico foi considerada na formulação.

De forma inovadora, uma metodologia para o projeto ótimo de atuadores para o controle de vibrações de estruturas flexíveis foi desenvolvida no trabalho de Silveira, Fonseca e Santos (2014). Nesta metodologia, a função objetivo foi tomada como o traço do Graminiano de controlabilidade de um sistema de controle *Regulador Quadrático Linear* (RQL) e uma restrição de volume foi imposta ao problema de otimização topológica que tem como variável de projeto a distribuição do material

---

<sup>2</sup>Em inglês, *tensegrity*. Trata-se de um neologismo da língua inglesa proveniente da contração da expressão *tensional integrity*. Em mecânica e em biomecânica, tensegridade ou integridade tensional é uma propriedade presente em objetos cujos componentes usam a tração e a compressão de forma combinada a fim de proporcionar-lhes estabilidade e resistência.

na estrutura. Uma Programação Linear Sequencial (PLS) foi utilizada para resolver o problema de otimização topológica, permitindo obter a estrutura topologicamente otimizada e a localização para os atuadores e sensores piezoelétricos.

Os trabalhos citados acima visam exemplificar uma diversidade de estudos que vêm tratando a otimização estrutural e o controle de vibrações de forma integrada ou simultânea. Contudo, dada a diversidade de sistemas de controle, as opções de métodos de otimização e os desafios inerentes às implementações numéricas para tratar tal integração de técnicas, uma síntese histórica que compreendesse toda essa diversidade de possibilidades de escolha seria um trabalho árduo e fugiria do escopo desta dissertação. Por isso, optou-se por evidenciar os estudos que investigaram ou utilizaram a otimização topológica e o controle piezoelétrico conjuntamente em projetos mecânicos.

Atuadores e sensores piezoelétricos são componentes mecânicos que alteram sua configuração geométrica, bem como características físicas, quando sujeitos a uma lei de controle. Contudo, são as cerâmicas piezoelétricas, presentes nestes componentes, que se comportam de acordo com os efeitos piezoelétricos. Ao exercer pressão mecânica contra as superfícies de uma cerâmica piezoelétrica ela gera um diferencial de potencial elétrico o que caracteriza o efeito piezoelétrico direto. Os sensores são os componentes que têm relação com o efeito piezoelétrico direto. Por outro lado, o efeito piezoelétrico inverso é observado ao se aplicar um diferencial de potencial elétrico contra as superfícies desta mesma cerâmica de modo que ela sofrerá expansão ou retração de seu volume, resultando na formação de uma onda mecânica que se propaga pelo meio. Os atuadores possuem relação com o efeito piezoelétrico inverso. Aplicados para o controle de vibrações e posição de estruturas flexíveis (como os elos e mancais de manipuladores industriais), tais efeitos podem ser obtidos com atuadores e sensores piezoelétricos embutidos ou fixos à superfície da estrutura e são ideais para uso em sensoriamento e controle de estruturas flexíveis (MOLTER, 2008). Devido a isto, muitas técnicas modernas de controle foram desenvolvidas recentemente com o desafio de projetar controladores, atuadores e sensores que se adaptem a estas estruturas. Segundo Molter (2008), sensores e atuadores discretamente distribuídos apresentam problemas de posicionamento, enquanto que os continuamente distribuídos oferecem maior flexibilidade, melhor resposta e características de monitoramento.

Se por um lado, transdutores piezoelétricos colados na superfície da estrutura são de fácil acesso, por outro lado, apresentam a desvantagem de serem facilmente danificados. Além disso, a presença destes materiais na superfície altera as propriedades do sistema, visto que os materiais ativo e não ativo possuem propriedades diferentes (módulo de Young, coeficiente de Poisson e fator de amortecimento). Já os transdutores piezoelétricos imersos na estrutura originam uma melhor distribuição das proprie-

dades mecânicas e elétricas. A desvantagem é a maior dificuldade de fabricação da estrutura composta e a isolamento elétrica necessária (LIMA JR., 1999).

O problema da localização de atuadores e sensores permeia as últimas três décadas e, até então, não há uma metodologia universalmente aceita para tratá-lo. Não se trata apenas de determinar se estes materiais devem estar fixos na superfície ou imersos na estrutura, mas de obter, principalmente, seus posicionamentos ótimos a fim de tornar o projeto mecânico mais preciso e eficiente.

O problema da localização ótima de sensores pode ser investigado, dentre outras possibilidades, a partir da detecção de falha com testes estatísticos discutindo, inclusive, como excitações podem influenciar nas localizações (BASSEVILLE et al., 1987). Kim e Junkins, por sua vez, introduziram uma nova medida para controlabilidade para a localização de atuadores. Esta nova medida de controlabilidade é baseada em uma análise de custos modais, isto é, levam em conta tanto o significado físico quanto o grau de controlabilidade de cada modo (KIM; JUNKINS, 1991) *apud* (SILVEIRA; FONSECA; SANTOS, 2014). Outras abordagens surgiram ao longo dos anos na tentativa de resolver tal problema. Dentre elas, apenas para citar algumas, há uma fundamentada em certas medidas quantitativas da controlabilidade e observabilidade baseadas em Graminianos (HAC; LIU, 1993) enquanto outra abordagem mostra que a decomposição de valores singulares de Hankel para sensores e atuadores permite avaliar cada sensor e atuador em termos de suas próprias controlabilidade e observabilidade (GAWRONSKI; LIM, 1996).

Mais recentemente, no trabalho de Silveira, Fonseca e Santos (2014), foi considerada a formulação do problema de otimização topológica de tal forma que em cada etapa de uma PLS, a localização do atuador foi realizada com base na maximização do traço do Graminiano de controlabilidade de um sistema de controle RQL. Com isso, mostrou-se num esquema bidimensional para uma viga com controladores piezoelétricos, a localização e a topologia para os atuadores na estrutura. A fim de fundamentar a pesquisa, outras abordagens são citadas ao longo do trabalho (HIRAMOTO; DOKI; OBINATA, 2000; LIU et al., 2008; DARIVANDI; MORRIS; KHAJEPOUR, 2013; ZORIĆ et al., 2013).

Hiramoto, Doki e Obinata (2000) desenvolveram duas soluções para a equação de Ricatti generalizada explicitamente para estruturas não amortecidas com sensores e atuadores instalados. Utilizando estas soluções explícitas, obtiveram um controle estabilizado  $H_\infty$ <sup>3,4</sup> baseado em uma abordagem de fatoração normalizada sem resolver

<sup>3</sup>O espaço de Hardy  $H_\infty$  consiste de todas as funções  $F$  analíticas de uma variável complexa limitadas na metade direita do plano aberto, onde a norma é dada por  $\|F\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}\{F(j\omega)\}$ ;  $\bar{\sigma}\{F(j\omega)\}$  denota o máximo valor singular de  $F(j\omega)$ ;  $\omega$  é a frequência de entrada do sistema a ser controlado e  $j = \sqrt{-1}$ .

<sup>4</sup>O controle  $H_\infty$  é uma técnica de controle robusto que possibilita expressar o problema de controle como um problema de otimização matemática cuja resposta que se quer obter é o controlador que otimiza o sistema. Tal controle utiliza a norma e os resultados matemáticos do espaço de Hardy  $H_\infty$ .

numericamente qualquer equação de Ricatti. Liu *et al.* (2008) consideraram o problema de posicionamento de sensores a fim de maximizar os dados de informação e caracterizar o comportamento dinâmico da estrutura. Para isto, um algoritmo genético foi utilizado para encontrar a localização ótima para os sensores. Darivandi, Morris e Khajepour (2013) reformularam o problema não convexo de localização de atuador para um problema de otimização convexo. Este trabalho tentou encontrar uma solução global utilizando um esquema de otimização baseado em subgradientes. Zorić *et al.* (2013), por sua vez, apresentaram um controle de vibração ótimo de uma viga utilizando a estratégia de otimização difusa baseada no algoritmo de otimização por enxame de partículas. O critério de otimização para o tamanho e a localização ótima para os pares de sensores e atuadores foi baseado nos autovalores do Graminiano de controlabilidade.

A diversidade de abordagens expostas para o tratamento de um projeto mecânico otimizado sob os pontos de vista estrutural e do controle aponta para a busca por estruturas, equipamentos e/ou mecanismos mais leves, estáveis e precisos nos mais diferentes campos tecnológicos, reafirmando a necessidade do desenvolvimento de metodologias teóricas e numéricas que respondam a estas problemáticas. O uso de materiais ativos nos projetos mecânicos é, de fato, uma área quase tão recente quanto a otimização topológica. Apesar disto, inúmeros estudos feitos principalmente nas áreas de engenharia civil, engenharia mecânica e ciência dos materiais remetem aos esforços cada vez mais visíveis para a aplicação dos materiais piezoelétricos em sistemas de controle e para a viabilização da fabricação de componentes compostos por estes materiais. Isto impulsionou estudos teóricos e experimentais de tal forma que o controle piezoelétrico é, ainda hoje, uma área de pesquisa promissora e em evidente crescimento. Conseqüentemente, a investigação relativa às formas e localizações para atuadores e sensores piezoelétricos se mostrou relevante a medida que se percebeu que estes fatores influenciam diretamente no desempenho do sistema de controle.

Portanto, o que se espera com este trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia que possibilite obter tanto a topologia ótima quanto a melhor localização para atuadores na estrutura otimizada. A formulação variacional, a análise de sensibilidade e o tratamento numérico do problema serão detalhadamente apresentados de modo que poderão servir como base para o tratamento de problemas futuros.

### **1.3 Apresentação da proposta e objetivos**

A proposta desta dissertação se concentra em desenvolver uma metodologia geral e integradora que reúna técnicas matemáticas e computacionais para o projeto simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores em estruturas. As

estruturas aqui consideradas são do tipo viga, com diferentes formas de engaste e carregamento. Assim, considerando este tipo de estrutura, a metodologia proposta visa obter a sua topologia ótima com indicação da melhor localização para os atuadores, sendo este o principal objetivo a ser alcançado na resolução dos problemas. Serão considerados dois problemas: um para atuadores proporcionais e outro para atuadores piezoelétricos.

Para o projeto simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores proporcionais, tais atuadores podem ser considerados como molas de modo que uma de suas extremidades deve estar fixa em um meio externo à viga e a outra extremidade deverá ser fixada na viga. Deseja-se, portanto, obter a melhor localização, na viga, para fixar a extremidade da mola, a fim de que ela possa exercer o papel de atuador quando o sistema estiver sujeito a cargas pontuais.

No segundo problema, há uma distribuição inicial uniforme dos materiais estrutural e piezoelétrico, considerados em meio contínuo. Pela otimização topológica, considerando um certo critério para a separação de materiais, objetiva-se que o processo de minimização leve a uma distribuição destes materiais, concentrando material piezoelétrico em determinadas regiões da estrutura. Deste modo, as regiões onde houver concentração de material piezoelétrico serão consideradas como as mais propícias para a alocação dos atuadores piezoelétricos.

Ao final, objetiva-se obter um código em Matlab<sup>®</sup> para efetuar simulações que indiquem a localização ótima para atuadores em estruturas topologicamente otimizadas.

Como objetivos específicos, pode-se citar o estudo de formulações variacionais inerentes a otimização topológica, de técnicas computacionais de otimização e controle e de métodos numéricos utilizados em soluções de equações diferenciais; além de utilizar técnicas de otimização topológica com atuadores inseridos ou acoplados na estrutura, modelados via elementos finitos.

## **1.4 Organização da dissertação**

As bases teóricas para a investigação dos problemas resumidamente descritos na seção anterior envolvem conhecimentos acerca do método de otimização topológica, MEF, piezoeletricidade, métodos de controle, métodos de otimização e familiaridade com alguma linguagem de programação que possibilite a implementação computacional dos problemas aqui propostos. Alguns destes tópicos estão em capítulos específicos neste trabalho e outros foram apresentados e discutidos no desenvolvimento da formulação e resolução dos problemas. Os problemas de otimização topológica simultânea à localização de atuadores são abordados em um único capítulo, mas cada um em sua seção de modo que, em cada uma delas, o problema é formulado, discretizado e os resultados são imediatamente apresentados e discutidos.

Este primeiro capítulo trouxe as ideias que motivam e justificam a realização deste trabalho, além da revisão bibliográfica que busca resgatar e apresentar os trabalhos que dão suporte à problemática investigada possibilitando, assim, um panorama geral dos desafios matemáticos e computacionais a serem abordados e de como enfrentá-los. A proposta e seus objetivos foram apresentados na sequência.

O segundo capítulo expõe os fundamentos da piezoelectricidade, abordando o seu conceito e o funcionamento das cerâmicas piezoelétricas, utilizadas como atuadores em um dos problemas propostos. Em seguida, as equações constitutivas do fenômeno da piezoelectricidade, a descrição dos tensores de materiais piezoelétricos e a hipótese do estado plano de tensões mecânicas são apresentados.

O método de otimização topológica é descrito no capítulo três. A ideia geral do método e sua relação com a otimização paramétrica e de forma abrem o capítulo para então, somente na segunda seção, os conceitos básicos de domínio fixo estendido e modelo material serem revisados. O método das densidades é então apresentado, uma vez que este é utilizado como um modelo de distribuição de material neste trabalho. Com isto, pode-se estruturar o problema de minimização da flexibilidade que servirá como base para a formulação dos problemas propostos no capítulo quatro. As condições de otimalidade para este problema, o esquema computacional, seus aspectos numéricos e complicações provenientes de sua implementação fecham o capítulo.

Os problemas propostos são finalmente formulados, discutidos e resolvidos no capítulo quatro. Este capítulo é dividido em duas grandes seções, uma para o problema simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores proporcionais e outra para o mesmo problema com atuadores de natureza piezoelétrica. Cada uma das seções traz a modelagem matemática do problema, sua análise de sensibilidades e discretização via MEF. Simulações computacionais são realizadas e os resultados são apresentados para cada um dos problemas.

A finalização do texto se dá no capítulo cinco com as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 PIEZOELETRICIDADE

Neste capítulo, os fundamentos da piezoelectricidade são apresentados de forma sucinta a fim de contemplar os aspectos da teoria realmente necessários para o desenvolvimento deste trabalho. A história da piezoelectricidade explica de forma clara e objetiva as origens e as primeiras aplicações deste fenômeno no meio científico e, por isso, abre este capítulo na seção 2.1. As cerâmicas piezoeletricas e suas propriedades constam na seção 2.2 seguidas das equações constitutivas para a piezoelectricidade e da descrição dos tensores de material nas seções 2.3 e 2.4, respectivamente. Na seção 2.4, obtém-se uma significativa diminuição da quantidade de parâmetros dos tensores através da consideração do efeito de simetria presente na estrutura de certas cerâmicas. Fechando o capítulo está a seção 2.5 onde assume-se a hipótese do estado plano de tensões mecânicas a fim de fazer a passagem do problema de três para duas dimensões.

### 2.1 Introdução

O termo piezoelectricidade é historicamente posterior às denominações de piroelectricidade e efeito eletrocalórico. Nativos da ilha de Ceylan (hoje o Sri Lanka, localizado na extremidade sul do subcontinente indiano) e da Índia observaram, séculos atrás, uma propriedade peculiar dos cristais de turmalina: estes, quando jogados em cinzas quentes, primeiro atraíam as cinzas para logo em seguida repeli-las. Porém, devido à demora na importação de turmalina, este experimento só chegou à Europa no início do século XVIII. Em 1756, a origem elétrica de tal comportamento foi demonstrada pelo físico alemão Aepinus<sup>1</sup>, mas somente em 1824 ele foi nomeado piroelectricidade pelo físico escocês D. Brewster. O efeito piroelétrico pode ser definido como a indução de polarização pela absorção de energia térmica; a polarização induzida é proporcional à variação da temperatura resultante. A propriedade inversa, de muito menor amplitude, é chamada de efeito eletrocalórico (PIEFORT, 2001).

A primeira publicação científica descrevendo o fenômeno, mais tarde denominado

---

<sup>1</sup>Fez a primeira observação experimental da polarização elétrica do cristal de turmalina, obtida por meio da mudança de temperatura do cristal. É considerado o inventor da capacitância elétrica.

como piezoelétrico, apareceu em 1880. Foi uma co-autoria de Pierre e Jacques Curie, que estavam conduzindo experimentos em uma variedade de cristais na época, levando-os a elaborar a teoria inicial da piezoeletricidade. Nestes experimentos, eles catalogaram um número de cristais, tais como a turmalina, o quartzo, o topaz, o açúcar de cana e o sal de Rochelle que exibiam cargas superficiais quando estavam mecanicamente tensionados (MOHEIMANI; FLEMING, 2006). De acordo com Piefort (2001), esta teoria foi então complementada pelos trabalhos de G. Lippman<sup>2</sup>, W. G. Hankel<sup>3</sup>, Lord Kelvin e W. Voigt no início do século XX.

Na comunidade científica da época, esta observação foi considerada como uma descoberta significativa, e o termo piezoeletricidade surgiu para expressar este efeito. Em virtude da palavra grega *piezo* significar pressionar (ou prensar ou apertar), piezoeletricidade vem a transmitir a ideia de eletricidade gerada a partir da pressão. Esta terminologia ajudou a distinguir piezoeletricidade de outros fenômenos de interesses relacionados na época, tal como a piroeletricidade.

A primeira aplicação séria para materiais piezoelétricos apareceu durante a Primeira Guerra Mundial na construção de um detector submarino ultrassônico cujo trabalho é creditado a Paul Langevin e seus colegas na França. O dispositivo foi utilizado para transmitir um sinal de alta frequência dentro da água e medir a profundidade cronometrando o eco de retorno. A invenção deles, contudo, não estava aperfeiçoada até o final da guerra.

Após o seu uso bem-sucedido em transdutores de sonar, cristais piezoelétricos foram empregados em muitas aplicações como microfones, acelerômetros e transdutores ultrassônicos. O desenvolvimento de materiais piezocerâmicos durante e depois da Segunda Guerra Mundial revolucionou este campo. Pesquisas significantes foram realizadas nos Estados Unidos da América e em outros países tais como o Japão e a antiga União Soviética que tinham como objetivo o desenvolvimento de materiais com constantes dielétricas muito altas para a construção de capacitores. Materiais piezocerâmicos foram descobertos a partir do resultado destas atividades e um número considerável de métodos para a sua produção em larga escala foram concebidos.

Introduzido o conceito de piezoeletricidade e os fatos históricos que explicam seu surgimento e sua aplicabilidade, obtidos em Moheimani e Fleming (2006), a próxima seção tem o objetivo de explicar como certas cerâmicas são preparadas a fim de que o efeito piezoelétrico presente nelas alcance maior magnitude uma vez que esse efeito é muito pequeno em materiais naturais, levando, assim, ao desenvolvimento de materiais com propriedades melhoradas.

---

<sup>2</sup>Responsável pela dedução matemática do efeito piezoelétrico inverso, confirmado experimentalmente pelos irmãos Curie em 1881.

<sup>3</sup>Introduziu o termo piezoeletricidade.

## 2.2 Cerâmicas piezoelétricas

Uma cerâmica piezoelétrica é uma massa de cristais, onde cada cristal é composto de um pequeno íon metálico tetravalente dentro de uma malha de íons metálicos bivalentes maiores e oxigênio. Acima de uma temperatura crítica, conhecida como a “temperatura de Curie”, cada cristal na cerâmica aquecida exibe uma simetria cúbica simples, sem um momento de dipolo. Abaixo da temperatura de Curie, essa mesma cerâmica apresenta simetria tetragonal e, neste caso, um momento de dipolo associado (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

Dipolos adjacentes formam regiões de alinhamento local chamadas de domínios. Este alinhamento origina um momento de dipolo para o domínio e assim, uma polarização em rede. Contudo, a direção da polarização entre domínios adjacentes é aleatória e a cerâmica não tem polarização global, como mostra a Figura 4(a).

Para que os domínios em uma cerâmica fiquem alinhados, como mostra a Figura 4(b), esta é exposta a um forte campo elétrico contínuo, geralmente a uma temperatura levemente abaixo da de Curie. Após este tratamento, chamado de polarização, os domínios quase alinhados com o campo expandem-se e o elemento cerâmico dilata-se na direção do campo. O campo elétrico é então removido e a maioria dos dipolos estão presos em uma configuração próxima no alinhamento (Figura 4(c)). A cerâmica tem agora, permanentemente, uma polarização e forma alongada. Esse aumento no comprimento da cerâmica é muito pequeno, geralmente dentro da faixa de micrômetros (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

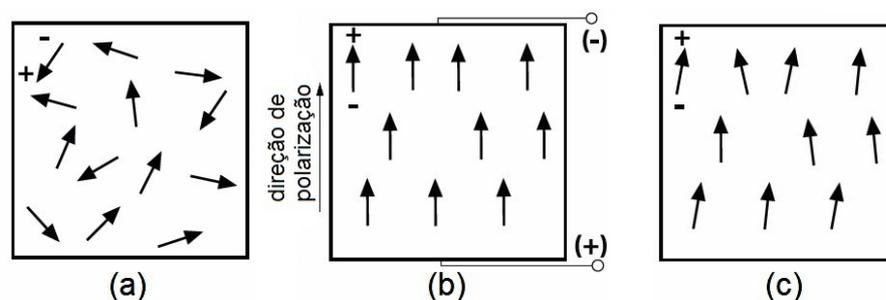


Figura 4: Esquema ilustrativo para o processo de polarização de cerâmicas. Fonte: Adaptado de Moheimani e Fleming, 2006, p. 12.

As reações de uma cerâmica piezoelétrica polarizada aos estímulos nela aplicados podem ser explicadas, de acordo com Moheimani e Fleming (2006), pela Figura 5. Quando a cerâmica converte energia mecânica de compressão ou tração em energia elétrica, o dispositivo está sendo utilizado como um sensor e o efeito piezoelétrico é dito ser direto. A compressão ao longo da direção de polarização gera um diferencial de potencial elétrico com a mesma polaridade que a tensão de polarização (Figura 5(b)). Já a tração ao longo da direção de polarização gera uma mudança de potencial elétrico com sentido oposto ao da tensão de polarização (Figura 5(c)). A cerâmica

piezoelétrica é utilizada como um atuador quando a energia elétrica é convertida em energia mecânica, caracterizando o efeito piezoelétrico inverso. Se um diferencial de potencial elétrico de mesma polaridade que a tensão de polarização é aplicado a um elemento cerâmico, na direção da tensão de polarização, o elemento irá alongar e seu diâmetro vai tornar-se menor (Figura 5(d)). Se um diferencial de potencial elétrico de polaridade oposta à da tensão de polarização é aplicada, a cerâmica vai se tornar mais curta e mais larga (Figura 5(e)). Pode ser observado, inclusive, movimentos de expansão e contração de forma cíclica quando um diferencial de potencial elétrico alternado é aplicado ao dispositivo piezoelétrico.

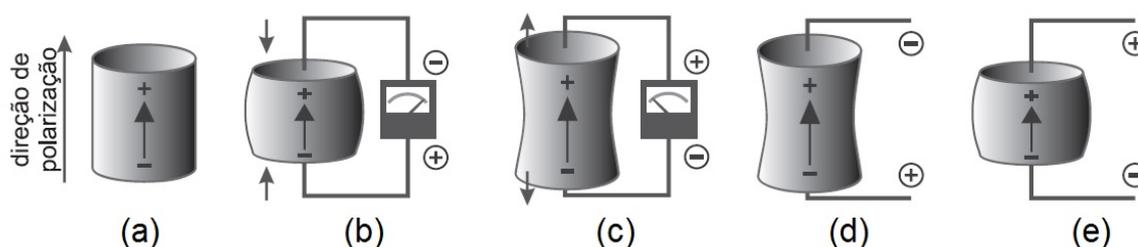


Figura 5: Reação de uma cerâmica piezoelétrica a diferentes estímulos. Fonte: Adaptado de Moheimani e Fleming, 2006, p. 13.

## 2.3 Equações constitutivas

Nesta seção, as equações que descrevem as propriedades eletromecânicas dos materiais piezoelétricos, tais como as cerâmicas citadas anteriormente, serão introduzidas com base no *IEEE<sup>4</sup> Standard on Piezoelectricity* (IEEE, 1988) que é amplamente aceito como sendo uma boa representação das propriedades destes materiais.

Salienta-se que o padrão IEEE assume que os materiais piezoelétricos apresentam comportamento linear. Sabe-se que sob baixos campos elétricos e baixos níveis de tensão mecânica os materiais piezoelétricos têm, de fato, comportamento linear. Contudo, eles podem apresentar considerável não linearidade se operados sob um alto campo elétrico ou alto nível de tensão mecânica. Para a maioria dos casos, inclusive para aqueles discutidos nesta dissertação, assume-se que os transdutores piezoelétricos estão sendo operados sob baixos níveis de campo elétrico e sob baixa tensão mecânica.

As equações constitutivas que descrevem a propriedade piezoelétrica são baseadas sob a hipótese que a deformação total no transdutor é a soma da deformação

<sup>4</sup>Sigla para *Institute of Electrical and Electronics Engineers*. Trata-se de uma organização profissional sem fins lucrativos cuja meta é promover conhecimento no campo da engenharia elétrica, eletrônica e computação. Um de seus papéis mais importantes é o estabelecimento de padrões para formatos de computadores e dispositivos; daí a origem de suas publicações técnicas, de seus próprios jornais, padrões e textos de membros.

mecânica induzida pela tensão mecânica e a deformação de atuação controlável causada pela voltagem elétrica aplicada.

Nas relações abaixo apresentadas, as variáveis tensão mecânica ( $T$ ) e campo elétrico ( $E$ ) são denominadas forças a serem aplicadas nas cerâmicas piezoelétricas e a deformação mecânica ( $S$ ) e o deslocamento elétrico ( $D$ ) são os resultados diretos da aplicação dessas forças. Assim, pode-se obter uma formulação mista onde as variáveis independentes são  $E$  e  $S$  e as variáveis dependentes são  $T$  e  $D$ , relacionadas pelas equações constitutivas dadas por:

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (1)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k \quad (2)$$

onde  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$  e utiliza-se a notação de Einstein para a soma por índices repetidos em um produto;  $T_{ij}$  são componentes do tensor de tensões mecânicas,  $S_{kl}$  são componentes do tensor de deformações mecânicas,  $D_i$  são componentes do vetor de deslocamento elétrico,  $E_k$  são componentes do vetor de campo elétrico,  $c_{ijkl}^E$  são componentes do tensor de rigidez elástica medidas sob campo elétrico constante,  $\epsilon_{ik}^S$  são componentes do tensor de propriedades dielétricas medidas sob deformação constante e  $e_{ikl}$  são componentes do tensor de propriedades piezoelétricas.

As componentes do tensor de deformação  $S_{kl}$  são definidas como

$$S_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3)$$

onde  $u_l$  é a componente  $l$  do vetor  $u$  de deslocamentos mecânicos,  $u_{k,l} = \partial u_k / \partial x_l$  e  $x_l$  é o eixo  $l$  do sistema de coordenadas retangulares empregado.

O campo elétrico, dentro do meio piezoelétrico, é derivado de um potencial elétrico escalar, descrito pela seguinte equação:

$$E_k = -\phi_{,k} \quad (4)$$

onde  $\phi$  é o potencial elétrico escalar e  $\phi_{,k} = \partial \phi / \partial x_k$ . O vetor de deslocamento elétrico, por sua vez, satisfaz a equação de equilíbrio eletrostático sem cargas livres, ou seja, tem-se que

$$D_{i,i} = 0. \quad (5)$$

A equação de movimento, sem considerar forças volumétricas, pode ser escrita como:

$$T_{ij,i} = \bar{\rho} \ddot{u}_j \quad (6)$$

onde  $\bar{\rho}$  representa a densidade do material e  $\ddot{u}_j = \partial^2 u_j / \partial t^2$ , sendo  $t$  o tempo.

O efeito piezoelétrico ainda pode ser descrito por outros três pares de equações de

modo que dentre as variáveis  $E$ ,  $D$ ,  $S$  e  $T$ , independente da escolha de representação, duas delas serão independentes e as outras duas dependentes, desde que as variáveis independentes sejam tomadas de modo que uma seja de natureza mecânica ( $S$  ou  $T$ ) e a outra de natureza elétrica ( $E$  ou  $D$ ). Tais pares de equações são formas alternativas das equações constitutivas (1) e (2) (IEEE, 1988).

A notação tensorial utilizada nas equações constitutivas da piezoeletricidade dadas por (1) e (2) pode ser apresentada de forma mais compacta, através das seguintes equações:

$$T = c^E : S - e^T \cdot E \quad (7)$$

$$D = e : S + \epsilon^S \cdot E \quad (8)$$

onde  $T$  e  $S$  representam os tensores de tensões mecânicas e deformações mecânicas,  $E$  e  $D$  representam os vetores de campo e deslocamento elétrico,  $c^E$  é o tensor de quarta ordem de propriedades elásticas com as suas componentes medidas sob campo elétrico constante,  $\epsilon^S$  é o tensor de segunda ordem de propriedades dielétricas medidas sob deformação constante,  $e$  é o tensor de terceira ordem de propriedades piezoelétricas e  $e^T$  denota o tensor de terceira ordem proveniente da transposição do tensor  $e$ . Os símbolos  $\cdot$  e  $:$  denotam as contrações por um e dois índices, respectivamente; por exemplo,  $a \cdot b = a_i b_i$  e  $A : B = A_{ij} B_{ij}$ .

## 2.4 Descrição dos tensores de material

As grandezas envolvidas nas equações (7) e (8) admitem uma redução de índices a fim de que possam ser representadas por vetores e matrizes. Tal redução é aplicada com o intuito de facilitar o tratamento destas equações, dada a natureza tensorial das mesmas, e é feita mediante a equivalência entre as notações tensorial e reduzida, conforme Tabela 1.

Tabela 1: Equivalência entre as notações tensorial e reduzida.

$ij$ ou $kl$	$p$ ou $q$
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
31 ou 13	5
12 ou 21	6

Mais especificamente, a notação reduzida consiste em substituir os índices  $ij$  e  $kl$  das equações (1) e (2) por  $p$  e  $q$ , onde  $i, j, k$  e  $l$  assumem os valores 1, 2 e 3, e os índices  $p$  e  $q$  assumem os valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6, observando o disposto na Tabela 1.

Assim, a forma matricial das equações (7) e (8) é dada, respectivamente, por:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

e

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & \epsilon_{12}^S & \epsilon_{13}^S \\ \epsilon_{21}^S & \epsilon_{22}^S & \epsilon_{23}^S \\ \epsilon_{31}^S & \epsilon_{32}^S & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Muitas das componentes dos tensores de propriedades das equações acima são nulas ou podem ser escritas em função de outras componentes, dependendo da simetria do material. Nesta dissertação, serão considerados os materiais de classe de simetria hexagonal da família  $6mm$ , tais como os diversos tipos de titanato-zirconato de chumbo (PZT), com direção de polarização no eixo  $x_3$  (IEEE, 1988).

Os materiais piezoelétricos são pelo menos transversalmente isotrópicos. Para os materiais das classes hexagonais com anisotropia na direção 3 e, considerando os efeitos de simetria, é possível reduzir as 21 propriedades do tensor elástico, as 18 propriedades do tensor piezoelétrico e as 9 propriedades do tensor dielétrico para, 5, 3 e 2 propriedades, respectivamente. Deste modo, os tensores de propriedades elásticas  $c^E$ , de propriedades piezoelétricas  $e$  e de propriedades dielétricas  $\epsilon^S$  são dados, respectivamente, por:

$$c^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix}, \quad (11)$$

com  $c_{66}^E = \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)$ ;

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

e

$$\epsilon^S = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Os valores das propriedades elásticas, piezoelétricas e dielétricas dependem do material piezoelétrico empregado.

## 2.5 Estado plano de tensões mecânicas

Para uma estrutura piezoelétrica que possui uma configuração geométrica com comprimento (no eixo  $x_1$ ) e largura (no eixo  $x_2$ ) de dimensões comparáveis e muito maiores que a espessura (no eixo  $x_3$ ), pode-se estabelecer a seguinte hipótese de estado plano de tensões mecânicas:

$$T_3 = T_5 = T_6 = D_3 = 0. \quad (14)$$

Esta hipótese permite tratar o problema bidimensionalmente de modo que, após modificações nas matrizes das equações constitutivas piezoelétricas (9) e (10), obtém-se a seguinte equação matricial em estado plano de tensões mecânicas:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_4 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} & c_{12}^E - \frac{c_{12}^E c_{13}^E}{c_{11}^E} & 0 & 0 & e_{31} - \frac{e_{31} c_{12}^E}{c_{11}^E} \\ c_{12}^E - \frac{c_{12}^E c_{13}^E}{c_{11}^E} & c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} & 0 & 0 & e_{33} - \frac{e_{31} c_{13}^E}{c_{11}^E} \\ 0 & 0 & c_{66}^E & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} & -\epsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} - \frac{e_{31} c_{12}^E}{c_{11}^E} & e_{33} - \frac{e_{31} c_{13}^E}{c_{11}^E} & 0 & 0 & -\epsilon_{33}^S - \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_4 \\ -E_1 \\ -E_2 \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

## 3 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Neste capítulo, os conceitos básicos, o esquema resumido da implementação computacional e os problemas de instabilidade numérica do método de otimização topológica são apresentados e discutidos. Além disso, o método das densidades, utilizado para calcular a densidade de material em cada ponto do domínio, é apresentado e o problema de minimização da flexibilidade com restrição de volume é formulado, pois este problema servirá como base para a formulação dos problemas a serem investigados nesta dissertação.

### 3.1 Introdução

A otimização de estruturas mecânicas busca a melhor configuração possível dentro de um espaço de soluções a fim de atender uma função objetivo específica com restrições a ela impostas. Existem, basicamente, três abordagens para a solução desse problema: a otimização paramétrica, a otimização de forma e a otimização topológica.

Problemas de otimização paramétrica, de forma e topológica abordam aspectos diferentes do problema de projeto estrutural. De acordo com Bendsøe e Sigmund (2003), em um típico problema de otimização paramétrica, um dos possíveis objetivos pode ser encontrar a distribuição de espessura ótima de uma placa linearmente elástica. A distribuição de espessura ótima minimiza (ou maximiza) uma quantidade física tal como o trabalho externo, a concentração máxima de tensão ou a deflexão da placa, enquanto o equilíbrio e outras restrições sobre as variáveis de projeto e de estado são satisfeitas. Ao se considerar uma placa, a variável de projeto é a espessura da placa e a variável de estado pode ser a sua deflexão. A principal característica da otimização paramétrica é que o domínio do modelo de projeto e as variáveis de estado são conhecidas *a priori* e a forma da estrutura não é alterada ao longo do processo de otimização, apenas as suas dimensões. Por outro lado, em um problema de otimização de forma o objetivo é encontrar a forma ótima deste domínio, isto é, o problema de forma é definido em um domínio que é agora a variável de projeto. A

otimização topológica de estruturas sólidas envolve a determinação de características como o número, a localização e a forma de buracos e a conectividade do domínio. A quantidade de material removido, considerando a mesma flexibilidade, é crescente na ordem apresentada das abordagens, sendo a otimização topológica a que resulta na maior remoção de material da estrutura.

A Figura 6 traz um exemplo para cada uma das três abordagens anteriormente mencionadas. As estruturas do lado esquerdo são aquelas a serem otimizadas enquanto que as do lado direito são as estruturas ótimas resultantes da aplicação das otimizações paramétrica, de forma e topológica em (a), (b) e (c), respectivamente.

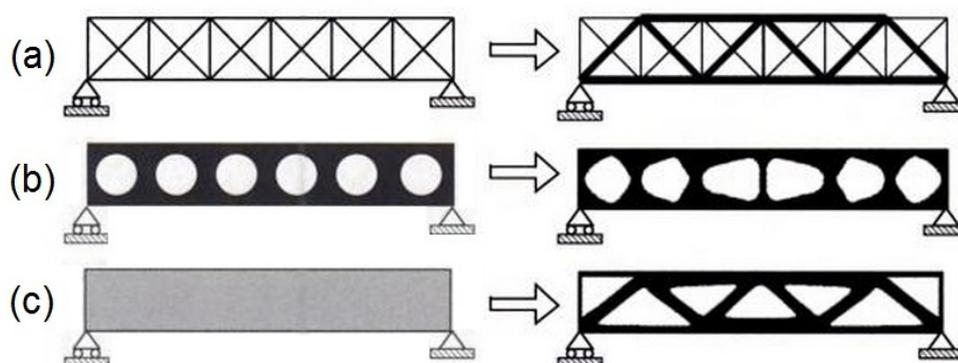


Figura 6: Exemplos de otimização estrutural: (a) otimização paramétrica; (b) otimização de forma e (c) otimização topológica. Fonte: Bendsøe e Sigmund, 2003, p. 2.

Especificamente sobre o método de otimização topológica, este visa solucionar o problema de distribuição de uma dada quantidade de material em um domínio de projeto fixo sujeito a carregamentos e suportes de tal forma que certa função objetivo atinja seu extremo. Um exemplo típico é o problema de minimização da flexibilidade (equivalente ao problema de máxima rigidez) com restrição de volume (BENDSØE; SIGMUND, 2003). As variáveis de projeto estão relacionadas à distribuição de material no domínio. É importante notar que o domínio de projeto é discretizado a fim de que o problema de otimização topológica possa ser resolvido por meios computacionais. Uma abordagem típica para tal discretização utiliza o MEF e a forma pela qual se aproxima a distribuição do material no domínio pode fazer com que a formulação dependa da discretização (CHENG; OLHOFF, 1982). Com a discretização, cada ponto do domínio pode assumir um valor de densidade dentro de um intervalo que a restringe, possibilitando a ausência de material (vazio, representado pela cor branca) até a total presença de material (sólido, representado pela cor preta), assumindo densidades intermediárias (dadas por uma escala de cinza) (BENDSØE; KIKUCHI, 1988; BENDSØE; SIGMUND, 2003). Nesta configuração, as regiões da estrutura menos exigidas em termos de esforços mecânicos indicam necessidade de menos material originando, assim, os buracos e/ou contornos menos densos no interior da estrutura.

No método de otimização topológica, o resultado final da distribuição de material é chamado de topologia ótima. A topologia ótima pode ser compreendida como o domínio constituído de material sólido e densidades intermediárias, caracterizada pela presença de buracos (regiões de cor branca), com contornos bem definidos.

## 3.2 Conceitos básicos

Nesta seção são apresentados dois conceitos fundamentais no qual se baseia o método de otimização topológica: o domínio fixo estendido e modelo de material.

### 3.2.1 Domínio fixo estendido

O domínio fixo estendido gera uma região de trabalho estendido ( $\Omega$ ) em torno da região onde se espera que a topologia ótima ( $\Omega_d$ ) se encontre, possibilitando que o processo de otimização adicione ou retire material dentro desta região pré-determinada. Trata-se, em outras palavras, do espaço no qual o algoritmo de otimização topológica deve encontrar a estrutura ótima. Este domínio está limitado pelos pontos de apoio da estrutura e pelos pontos de aplicação de carregamento, como mostra a Figura 7.

O processo de otimização topológica consiste, então, em determinar os espaços sem material (vazios) e a conectividade da estrutura através da remoção de material no domínio fixo estendido. A obtenção da forma ótima é influenciada pelas condições de contorno, dadas pelos engastes, apoios e carregamentos, e pela quantidade de material utilizado. Diferente da otimização de forma, na otimização topológica a malha de elementos finitos do domínio não se altera durante o processo, sendo alterada somente a distribuição de material nos elementos.

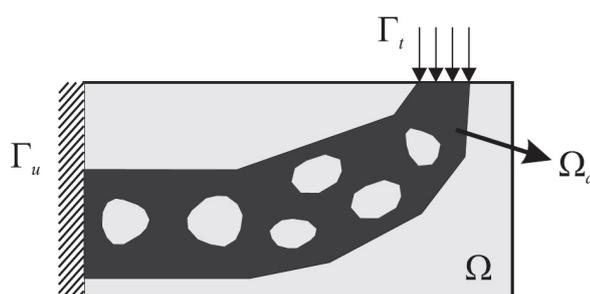


Figura 7: Representação de um domínio desconhecido contido no domínio fixo estendido. Fonte: Silveira, 2012, p. 27.

### 3.2.2 Modelo material

No método de otimização topológica geralmente dois tipos de materiais são utilizados para determinar a topologia ótima da estrutura. A distribuição destes materiais pode ser definida como um problema de otimização de parâmetros discretos ou um

problema do tipo booleano, sendo 0 a ausência de material e 1 a total presença de material. Sendo assim, uma função característica  $\chi(x)$ , indicadora da fase sólida, é definida em cada ponto  $x$  do domínio  $\Omega$  da seguinte maneira:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega_d, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_d, \end{cases} \quad (16)$$

sendo  $\Omega_d$  a região onde há presença de material, inserida em um domínio  $\Omega$ .

Para materiais isotrópicos e considerando um dos materiais como vazio, certa propriedade material constitutiva (como, por exemplo, o módulo de elasticidade; veja (BENDSØE; KIKUCHI, 1988; BENDSØE; SIGMUND, 2003)) pode ser escrita na forma:

$$Y(x) = \chi(x)Y^0, \quad (17)$$

onde  $Y^0$  é a mesma propriedade do material base a ser distribuído.

O modelo material dado genericamente por (17) é, então, uma equação que define a mistura em microescala de dois ou mais materiais sendo que um deles pode ser vazio, permitindo que a topologia ótima tenha densidade 0 ou 1 em todos os pontos.

Em muitas aplicações, a topologia ótima de uma estrutura pode consistir unicamente de uma variação macroscópica de um material e vazio, o que significa que a densidade da estrutura é dada por uma parametrização inteira (do tipo booleano), ou seja, 0 ou 1, resultando em uma topologia em preto e branco. Infelizmente, esta classe de problemas de otimização de projetos é mal-posta (BENDSØE; SIGMUND, 1999) de modo que sequências minimizantes do problema podem convergir para fora do espaço de soluções admissíveis ou nem mesmo convergir. Segundo Bendsøe e Sigmund (1999), a abordagem mais comumente utilizada para contornar estas situações é a de substituir as variáveis inteiras por variáveis contínuas e em seguida introduzir alguma forma de penalização que leve a solução para valores próximos de 0 e 1. Uma parte-chave dos métodos caracterizados por este tipo de abordagem é a introdução de uma função de interpolação que expressa quantidades físicas variáveis (a rigidez do material ou o custo, por exemplo) como uma função de variáveis contínuas. Dentre alguns métodos, o método de homogeneização e o método das densidades têm destaque na literatura que trata dos problemas de otimização topológica. Neste trabalho, aplica-se o segundo método, descrito a seguir.

### 3.3 Método das densidades

O modelo de material SIMP<sup>1</sup>, igualmente conhecido como método das densidades, consiste em uma expressão matemática que estabelece o valor da propriedade

<sup>1</sup>Em inglês, *Simple Isotropic Material with Penalization*.

do material em cada ponto do domínio através de uma função pseudodensidade  $\rho(x)$  (que nos problemas de otimização geralmente é a variável de projeto) e a propriedade básica do material a ser distribuído. A vantagem da utilização deste método está na sua reduzida complexidade na implementação e também porque utiliza a densidade relativa do material como única variável de projeto em cada ponto do domínio fixo estendido  $\Omega$  (BENDSØE; SIGMUND, 1999). Este modelo de material pode ser expresso da seguinte forma (BENDSØE; SIGMUND, 1999, 2003):

$$c(x) = \rho(x)^p c^0, \quad (18)$$

de modo que  $p \geq 1$ ,  $0 < \rho(x) \leq 1$  e  $x \in \Omega$ ,  $p$  é um expoente de penalização,  $c^0$  é o tensor de rigidez elástica do material base isotrópico. No SIMP, o tensor de rigidez elástica do material  $c(x)$  em cada ponto do domínio varia com a pseudodensidade  $\rho$ , enquanto que o coeficiente de Poisson  $\nu^0$  não depende de  $\rho$ .

O expoente de penalização  $p$  deve ser estabelecido de modo que conduza à redução das densidades intermediárias e que evite que as soluções finais resultem em mínimos locais (BENDSØE; SIGMUND, 1999, 2003). Contudo, existe um conflito na magnitude do fator de penalização  $p$ . A utilização de um  $p$  pequeno (natureza mais contínua do que discreta do problema) gera escalas de cinza ou valores de propriedades intermediárias de material (valores de propriedades entre dois materiais base tais como o aço e PZT, por exemplo), enquanto que valores muito altos para  $p$  (o que representa uma natureza mais discreta do que contínua) leva a problemas de convergência e de instabilidade numérica, devido à tendência de retornar ao problema discreto (limitar os valores da densidade de cada elemento somente a 0 e 1) (RUBIO, 2010).

Bendsøe e Sigmund (1999) apontam que o expoente de penalização  $p$  deve satisfazer as condições:

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1 - \nu^0}, \frac{4}{1 + \nu^0} \right\} \quad \text{em 2D}, \quad (19)$$

$$p \geq \max \left\{ 15 \frac{1 - \nu^0}{7 - 5\nu^0}, \frac{3}{2} \frac{1 - \nu^0}{1 - 2\nu^0} \right\} \quad \text{em 3D}, \quad (20)$$

de modo que estas estimativas satisfazem os limites de Hashin-Shtrikamn para materiais de duas fases (HASHIN; SHTRIKMAN, 1963). Em duas dimensões, o menor valor para  $p$  é 3 o que é admissível para  $\nu^0 = 1/3$ . Em três dimensões, o menor  $p$  admissível é 2, mas para  $\nu^0 = 1/3$  também deveria ser escolhido um  $p$  maior do que 3. Além disso, as estimativas apresentadas em (19) e (20) são válidas apenas para materiais isotrópicos.

### 3.4 Problema de minimização da flexibilidade

Nesta seção, é descrita a estruturação geral para o projeto de topologia ótima, formulado como um problema de distribuição de material. Esta estruturação é análoga às bem conhecidas formulações para problemas de dimensionamento para estruturas discretas e contínuas e é utilizada igualmente para o projeto estrutural via otimização topológica. Trata-se do *problema de minimização da flexibilidade*<sup>2</sup> cuja formulação se dá em termos de uma função objetivo e sob restrições de projeto simples, geralmente relacionadas com o equilíbrio e volume do corpo elástico.

Neste trabalho, a flexibilidade é compreendida como o inverso da rigidez de um material (ANDERSON, 2005). Em outras palavras, a flexibilidade é a capacidade dos materiais em permitir determinada movimentação, sem quebra ou ruptura, obedecendo à lei de Hooke.

O problema de minimização da flexibilidade está abaixo descrito em virtude de ser conceitualmente um ponto de partida natural para problemas de otimização estrutural de maior complexidade e também por refletir muitas das questões fundamentais neste campo de pesquisa.

Considere um elemento mecânico como um corpo ocupando um domínio  $\Omega_d$  que é parte de um domínio de referência maior  $\Omega$  no  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Para tornar mais clara a formulação a ser feita, considere  $\Omega$  um domínio bidimensional e o elemento mecânico da Figura 8. O domínio de referência  $\Omega$  é escolhido de tal forma que permita a definição de cargas aplicadas e condições de contorno.

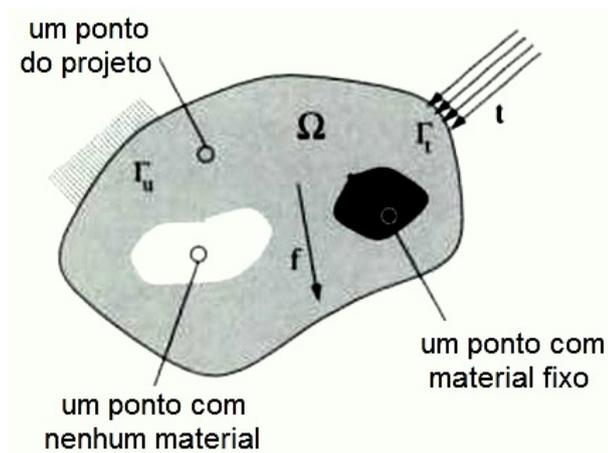


Figura 8: Esquema ilustrativo para um corpo bidimensional sujeito a cargas aplicadas e condições de contorno. Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund, 2003, p. 3.

Pode-se definir o problema de projeto ótimo como o problema de encontrar a escolha ótima do tensor constitutivo  $c$  que é uma variável sobre o domínio. Introduzindo

<sup>2</sup>Em inglês, *minimum compliance problem*, expressão largamente utilizada e já consolidada. Equivalente ao problema de máxima rigidez.

a forma bilinear de energia (isto é, o trabalho virtual interno de um corpo elástico no deslocamento  $u$ , onde verifica-se o equilíbrio, e para um deslocamento virtual arbitrário  $v$ ):

$$a_c(u, v) = \int_{\Omega} S(u) : c(x) : S(v) d\Omega, \quad (21)$$

com as deformações  $S(u)$  dadas por (3) e a forma linear de carga

$$l(u) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma, \quad (22)$$

o problema de minimização da flexibilidade toma a forma

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathcal{U}, c} l(u), \\ \text{s. a: } & a_c(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}, \\ & c \in C_{ad}. \end{aligned} \quad (23)$$

Nesta formulação, a equação de equilíbrio é escrita na sua forma variacional com  $\mathcal{U}$  denotando o espaço dos campos de deslocamento cineticamente admissíveis, ou seja,

$$\mathcal{U} = \{u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3) : u = (0, 0, 0) \text{ sobre } \Gamma_u\}, \quad (24)$$

onde  $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  é o espaço  $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ ,  $W^{1,2}(\Omega)$  é o espaço das funções em  $L^2(\Omega)$  tais que as derivadas de primeira ordem em sentido de distribuições também estão em  $L^2(\Omega)$ .  $L^2(\Omega)$ , por sua vez, é o espaço das funções reais cujo domínio é  $\Omega$  e cujo quadrado é finito-integrável.  $\Gamma_u \subset \Gamma \equiv \partial\Omega$  é a parte da fronteira onde são especificados os deslocamentos. Além disso,  $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  é o vetor das forças de corpo e  $t \in L^2(\Gamma_t; \mathbb{R}^3)$  é o vetor das forças de superfície aplicadas em  $\Gamma_t \subset \Gamma \equiv \partial\Omega$  do contorno, onde  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,  $L^2(\Gamma_t; \mathbb{R}^3) = L^2(\Gamma_t) \times L^2(\Gamma_t) \times L^2(\Gamma_t)$  e  $L^2(\Gamma_t)$  é o espaço das funções reais cujo domínio é  $\Gamma_t$  e cujo quadrado é finito-integrável. Note ainda que  $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$  e que o uso do índice  $c$  indica que a forma bilinear  $a_c$  depende das variáveis de projeto.

No problema (23),  $C_{ad}$  denota o conjunto dos tensores de rigidez elástica admissíveis. O limite de recurso de material, dado por uma restrição de volume, pode ser expresso na forma

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega = \eta V \leq V, \quad (25)$$

onde  $\eta \in (0, 1]$  e  $V$  é o volume do domínio considerado. O valor escolhido para  $\eta$  limita o uso de material a ser utilizado para a geração da topologia ótima. Ao se considerar  $\eta = 0,5$ , por exemplo, impõe-se que a topologia ótima deve ter metade do volume da topologia a ser otimizada.

Uma abordagem típica para resolver problemas do tipo (23) por meios computacionais é discretizar o problema utilizando elementos finitos. Conforme Bendsøe e Sigmund (2003), é importante notar que há dois campos de interesse no problema (23): o deslocamento  $u$  e a rigidez  $c$ . Ao utilizar a mesma malha de elementos finitos para ambos os campos e discretizar  $c$  como uma constante  $c_e$  em cada elemento pode-se, então, escrever o problema (23) discretizado como

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}, c_e} \quad & \mathbf{F}_u^T \mathbf{U}, \\ \text{s. a:} \quad & \mathbf{K}_{uu}(c_e) \mathbf{U} = \mathbf{F}_u, \\ & c_e \in C_{ad}, \end{aligned} \quad (26)$$

onde  $\mathbf{U}$  é o vetor global de deslocamentos mecânicos e  $\mathbf{F}_u$  é o vetor global de forças. A matriz global de rigidez  $\mathbf{K}_{uu}$  depende da rigidez  $c_e$  no elemento  $e$ , numerado como  $e = 1, \dots, N$ , o que permite escrever  $\mathbf{K}_{uu}$  na forma

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_{uu}^e(c_e), \quad (27)$$

onde  $\mathbf{K}_{uu}^e$  é a matriz de rigidez de um elemento finito.

Estabelecido o problema básico de minimizar a flexibilidade de uma estrutura e a sua forma discretizada, as próximas seções tratam das condições de otimalidade para a variável de projeto  $\rho$  (densidade) e do esquema de implementação computacional (padrão) para a resolução do problema via método de otimização topológica integrado ao MEF. A implementação computacional, por sua vez, gera problemas de instabilidades numéricas comentadas na sequência.

### 3.5 Condições de otimalidade

Seguindo os critérios de otimalidade padrões utilizados em otimização estrutural, o problema (23) pode ser utilizado para gerar esquemas de atualização computacional extremamente eficientes para resolver problemas como os abordados neste trabalho (ROZVANY; ZHOU, 1991; ZHOU; ROZVANY, 1991). A ideia é desenvolver métodos numéricos que a cada iteração, considerando uma topologia previamente computada e seus deslocamentos associados, atualizem as variáveis de projeto em cada ponto (ou em cada elemento da discretização) independentemente se feitas as atualizações de outros pontos, baseados em condições necessárias de otimalidade. Para este fim, Bendsøe e Sigmund (2003) consideram o problema (23), escrito para o caso da interpolação das densidades pela abordagem SIMP, conforme apresentado abaixo, na sua forma contínua:

$$\begin{aligned}
& \min_{(u,\rho) \in \mathcal{U} \times (0,1]} l(u), \\
\text{s. a: } & a_c(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}, \\
& c(x) = \rho(x)^p c^0, \\
& \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq V, \\
& 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1.
\end{aligned} \tag{28}$$

Note que uma densidade mínima  $\rho_{min}$  foi introduzida ao problema a fim de prevenir qualquer singularidade possível do problema de equilíbrio. Em aplicações típicas, tem-se  $\rho_{min} = 10^{-3}$ .

Com os multiplicadores de Lagrange  $\bar{\Lambda}$ ,  $\lambda^-(x)$ ,  $\lambda^+(x)$  para as restrições de (28), as condições necessárias para otimalidade para a variável  $\rho$  são um conjunto de condições estacionárias para o Lagrangeano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & l(u) - \{a_c(u, \bar{u}) - l(\bar{u})\} + \bar{\Lambda} \left( \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega - V \right) \\
& + \int_{\Omega} \lambda^+(x) (\rho(x) - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda^-(x) (\rho_{min} - \rho(x)) d\Omega,
\end{aligned} \tag{29}$$

onde  $\bar{u}$  é o multiplicador de Lagrange para a restrição de equilíbrio. As condições para otimalidade com respeito às variações do campo de deslocamento  $u$  resultam que  $u = \bar{u}$  enquanto que a condição para  $\rho$  resulta na expressão:

$$S(u) : \frac{\partial c(x)}{\partial \rho} : S(u) = \bar{\Lambda} + \lambda^+ - \lambda^-, \tag{30}$$

observando, ainda, as demais condições a seguir:

$$\lambda^- \geq 0, \quad \lambda^+ \geq 0, \quad \lambda^-(\rho_{min} - \rho(x)) = 0, \quad \lambda^+(\rho(x) - 1) = 0. \tag{31}$$

Para densidades intermediárias ( $\rho_{min} < \rho < 1$ ), a condição (30) pode ser escrita como

$$S(u) : [p\rho(x)^{p-1}c^0] : S(u) = \bar{\Lambda}, \tag{32}$$

que expressa que o termo do lado esquerdo que atua como densidade da energia de deformação é constante e igual a  $\bar{\Lambda}$  para todas as densidades intermediárias. Como é esperado que áreas com alta energia de deformação tenham rigidez muito alta, o seguinte esquema de atualização do tipo ponto fixo para a densidade é considerado:

$$\rho_{K+1} = \begin{cases} \max \{(1 - \zeta)\rho_K, \rho_{min}\}, & \text{se } \rho_K B_K^\varphi \leq \max \{(1 - \zeta)\rho_K, \rho_{min}\}, \\ \min \{(1 + \zeta)\rho_K, 1\}, & \text{se } \min \{(1 + \zeta)\rho_K, 1\} \leq \rho_K B_K^\varphi, \\ \rho_K B_K^\varphi, & \text{outro caso,} \end{cases} \quad (33)$$

(BENDSØE; SIGMUND, 1999, 2003).

Em (33),  $\rho_K$  denota o valor da variável de densidade no passo de iteração  $K$  e  $B_K$  é dado pela expressão

$$B_K = \bar{\Lambda}_K^{-1} S(u_K) : [p\rho_K(x)^{p-1}c^0] : S(u_K), \quad (34)$$

onde  $u_K$  é o campo de deslocamento no passo de iteração  $K$ , determinado a partir da equação de equilíbrio e dependente apenas de  $\rho_K$ .

O expoente  $\varphi$  em (33) é um parâmetro de ajuste e  $\zeta$  um limite móvel sendo que este último é utilizado para melhorar a convergência e atualização das variáveis de projeto. Ambos  $\varphi$  e  $\zeta$  controlam as alterações que podem acontecer em cada passo de iteração e podem ser ajustados para melhorar a eficiência do método. A variável  $\rho_{K+1}$  atualizada depende do valor atual do multiplicador de Lagrange  $\bar{\Lambda}_K$  e, portanto,  $\bar{\Lambda}_K$  deve ser ajustado em um laço de iteração interno a fim de satisfazer a restrição de volume ativa do problema (28). Ademais, o valor de  $\bar{\Lambda}$  pode ser determinado unicamente utilizando um método de bisseção ou um método de Newton. Valores típicos para  $\varphi$  e  $\zeta$  são 0,5 e 0,2, respectivamente (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Segundo Bendsøe e Sigmund (2003), o tipo de algoritmo descrito acima foi utilizado em um grande número de estudos em projetos estruturais e está bem estabelecido como um método (heurístico) efetivo para a solução de problemas de larga escala. A eficiência do algoritmo vem do fato que cada variável de projeto é atualizada independentemente das outras variáveis de projeto, exceto para redimensionamentos que tem que acontecer para satisfazer a restrição de volume.

Com o exposto nesta seção e na anterior, têm-se os ingredientes básicos para a organização do fluxo da implementação computacional do procedimento de distribuição de material para o projeto da topologia ótima. Obviamente, ainda não foi comentado e nem mesmo apresentado com detalhes como se dá a discretização do domínio fixo estendido através do MEF, mas pode-se antecipar que esta é a primeira etapa a ser considerada no procedimento computacional que resolverá numericamente o problema de otimização topológica dado, por exemplo, pelo problema (28). Com isso, pode-se estabelecer, já na próxima seção, um esquema do fluxo de cálculos do procedimento computacional e suas etapas.

### 3.6 Procedimento computacional

O método direto para o projeto topológico utilizando o método de distribuição de material é baseado no cálculo numérico da distribuição global ótima do material de densidade  $\rho$ . Para um esquema de interpolação que penalize corretamente densidades intermediárias, a topologia em preto e branco é o alvo principal de todo o esquema de implementação. O método para encontrar a topologia ótima de uma estrutura construída a partir de um único material isotrópico consiste das seguintes etapas (BENDSØE; SIGMUND, 2003), apresentadas no fluxograma dado pela Figura 9.

O *pré-processamento da geometria da estrutura e de seu carregamento* consiste em:

- Escolher um domínio de referência adequado que permita a definição de trações de superfície, contornos fixos, entre outros.
- Escolher as partes do domínio de referência que devem ser projetadas e quais partes da estrutura devem ser mantidas como sólidas ou vazias.
- Construir uma malha de elementos finitos que represente corretamente a estrutura e que possibilite a definição de engastes e carregamentos, por exemplo.
- Construir espaços de elementos finitos para os campos independentes dos deslocamentos e das variáveis de projeto.

A *otimização* consiste em computar a distribuição ótima da variável de projeto  $\rho$  sobre o domínio de referência. A otimização utiliza um deslocamento baseado na análise dos elementos finitos e no esquema de critério de atualização de otimalidade para a densidade. A estrutura do algoritmo é:

- Fazer o projeto inicial, por exemplo, uma distribuição homogênea do material. A parte iterativa do algoritmo é:
  - ✕ Para esta distribuição de densidade, calcular pelo MEF os deslocamentos e as deformações resultantes.
  - ✕ Calcular as sensibilidades do problema e aplicar o filtro a esses dados;
  - ✕ Utilizar um algoritmo de otimização como MAM (Método das Assíntotas Móveis) ou PLS.
  - ✕ Atualizar as variáveis de projeto e repetir o procedimento até que as condições de otimalidade sejam satisfeitas.

A última etapa é a fase do *pós-processamento*, visando gerar as respostas gráficas do problema. Nesta etapa, deve-se:

- Interpretar a distribuição ótima de material como uma topologia definida e representá-la.

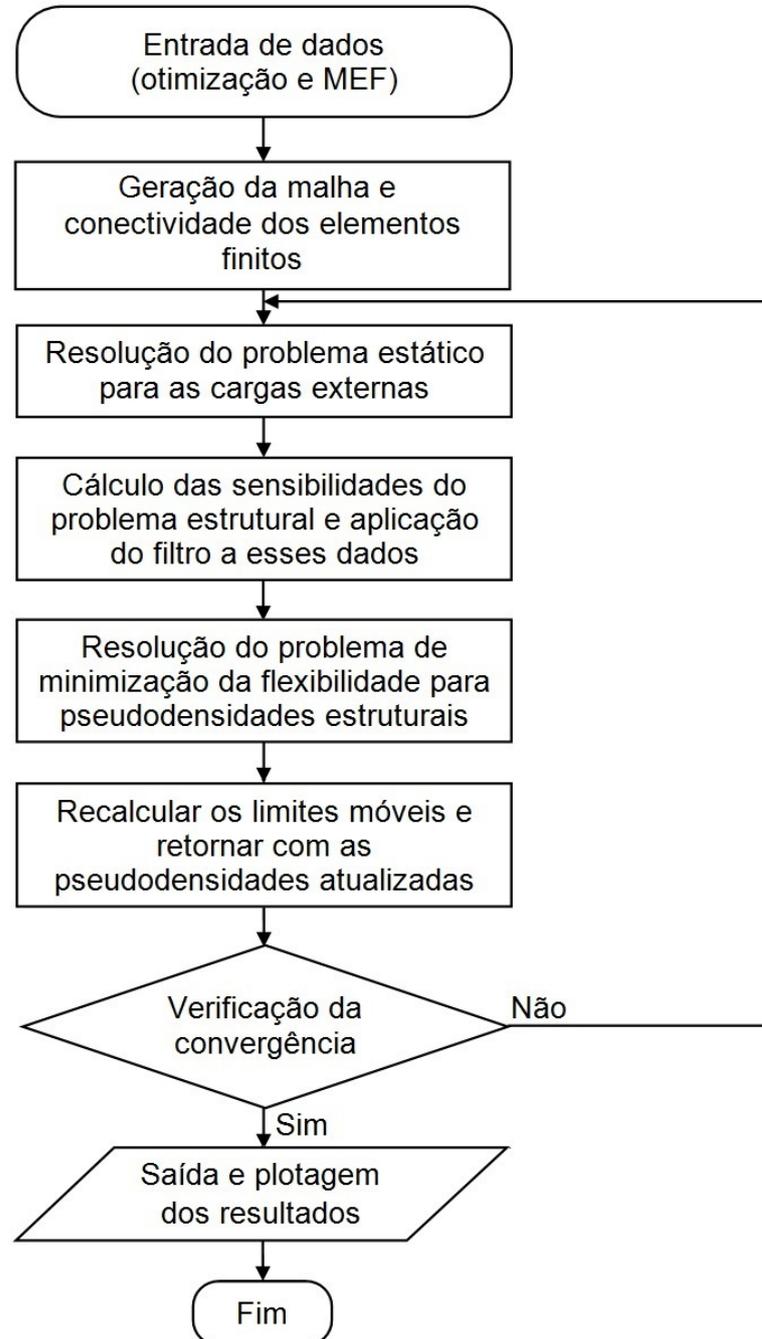


Figura 9: Fluxograma para o projeto topológico ótimo utilizando o método de distribuição de material.

As complicações originadas da implementação computacional dos métodos utilizados para a solução numérica do problema de otimização estrutural são abordadas na próxima seção.

### 3.7 Aspectos numéricos e complicações

Duas questões importantes que influenciam significativamente os resultados computacionais de topologias ótimas serão discutidas nesta seção. Trata-se da dependência em relação ao refinamento da malha e do surgimento de regiões com aspecto igual ao de tabuleiros de xadrez. Conforme explicado em Bendsøe e Sigmund (2003), o surgimento de regiões com aspecto igual ao de tabuleiros de xadrez resulta da alternância de elementos sólidos (pretos) e vazios (brancos) adjacentes, daí a analogia com o tabuleiro, e está relacionado com a discretização do problema contínuo original. A dependência da malha se refere às diferentes soluções ótimas qualitativas que são obtidas para diferentes discretizações do domínio viável de projeto. Utiliza-se, nesta dissertação, a técnica conhecida como Filtro de Sensibilidades (SIGMUND, 1997) para solucionar os problemas de dependência em relação ao refinamento de malha e surgimento de tabuleiros de xadrez.

Outras duas importantes questões na aplicação de métodos de otimização são aquelas relativas à não convexidade e aos dados que definem as condições de contorno e a geometria dos problemas. A origem das problemáticas trazidas por estas questões não está no método de otimização topológica em si, mas nos métodos de otimização em geral.

#### 3.7.1 Refinamento da malha e existência de soluções

Segundo Bendsøe e Sigmund (2003), está bem estabelecido que o problema de otimização topológica (23) nas versões 0-1 e SIMP não possui soluções na sua configuração contínua. A razão disto se deve ao fato de que a criação de reforços cada vez mais finos geralmente aumenta a eficiência da estrutura, ou seja, a criação de furos sem alterar o volume total do material é de grande valia, mas, por outro lado, num determinado limite, haverá a criação de microestruturas que não podem ser consideradas isotrópicas e a solução não estará dentro da gama de soluções originais isotrópicas. Bendsøe e Sigmund (2003) explicam que, em implementações computacionais e, portanto, nos problemas discretos, este efeito é visto como uma instabilidade numérica onde um grande número de buracos aparece quando uma malha de elementos finitos mais fina é empregada, isto é, refinar a malha de elementos finitos para o domínio de referência conduz à geração de mais padrões microestruturais internos semelhantes ao que a teoria prediz.

A abordagem para a geração de soluções macroscópicas apenas com preto e branco e independentes da malha está em reduzir o espaço de soluções através de algum tipo de restrição local ou global sobre a variável de densidade, impedindo a formação de microestruturas. Em Sigmund (2007), os métodos de filtragem foram revisados e introduziu-se uma nova classe de métodos baseada em operadores de forma

que diminuem o aparecimento de cinzas. Conforme a revisão, as técnicas recaem em três classes genéricas: (1) métodos de filtragem independentes em relação a malha, como os filtros de sensibilidade e filtros de densidade; (2) métodos de restrição, como o método do controle de perímetro e os controles local e global de gradientes e (3) métodos alternativos, como parametrizações por ondaletas<sup>3</sup>, abordagens de campo de fase<sup>4</sup> e o método de conjunto de nível<sup>5</sup> (SIGMUND, 2007). Diversos trabalhos que utilizam cada um dos métodos acima citados podem ser encontrados no trabalho anteriormente citado.

O *Filtro de Sensibilidades* (SIGMUND, 1997; SIGMUND; PETERSSON, 1998; BENDSØE; SIGMUND, 2003) é um método puramente heurístico, mas obtém resultados semelhantes aos métodos de restrição de gradientes, por exemplo. O filtro consiste em modificar a sensibilidade (taxa de variação da função objetivo ou restrições em relação a uma variável de projeto) de um elemento finito específico baseado em uma média ponderada das sensibilidades de elementos vizinhos. A experiência computacional tem mostrado que esta técnica é um meio eficiente de obter uma independência em relação à malha em otimização topológica.

A técnica funciona mediante a modificação das sensibilidades de alguma grandeza  $G$  em relação à uma pseudodensidade  $\rho_k$ , da seguinte forma:

$$\frac{\widehat{\partial G}}{\partial \rho_k} = \frac{1}{\rho_k \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i \rho_i \frac{\partial G}{\partial \rho_i}, \quad (35)$$

onde  $\widehat{\partial G}/\partial \rho_k$  é a nova sensibilidade,  $N$  é o número total de elementos na malha e o fator de peso  $\widehat{H}_i$  é dado por

$$\widehat{H}_i = r_{min} - \text{dist}(k, i), \quad \{i \in \mathbb{N} \mid \text{dist}(k, i) \leq r_{min}\}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (36)$$

Nesta expressão, o operador  $\text{dist}(k, i)$  é definido como a distância entre o centro do elemento  $k$  e o centro de um elemento  $i$ . O fator de peso  $\widehat{H}_i$  é zero fora da área de filtro do elemento  $k$ . De acordo com Bendsøe e Sigmund (2003), é notável que a sensibilidade (36) converge para a sensibilidade original quando o raio de filtragem  $r_{min}$  se aproxima de zero e que todas as sensibilidades são iguais quando  $r_{min}$  cresce infinitamente.

Apesar da base teórica do método ainda não estar completamente compreendida, inúmeras aplicações dadas, por exemplo, por problemas bi e tridimensionais, problemas com até vinte restrições estruturais e também problemas envolvendo múltiplas áreas de física, são baseadas neste método de filtragem, mostrando que essa é uma

<sup>3</sup>Técnica mais conhecida pelo seu nome em inglês, *wavelet parameterization*.

<sup>4</sup>Em inglês, *phase-field approaches*.

<sup>5</sup>Em inglês, *level-set method*.

ferramenta extremamente útil. Ademais, a técnica fornece resultados estáveis sob refinamento de malha e mantém um comprimento mínimo de escala que é controlado pelo raio de filtragem  $r_{min}$ .

### 3.7.2 Instabilidade do tabuleiro

Regiões com padrões iguais a tabuleiros de xadrez aparecem frequentemente em soluções obtidas pela implementação direta do método de distribuição de material que utiliza o deslocamento baseado no MEF. Tais regiões são caracterizadas por uma configuração periódica de elementos pretos e brancos adjacentes, conforme pode ser visualizado na Figura 10. Atualmente, compreende-se que os padrões de tabuleiro estão relacionados às características das aproximações dos elementos finitos e, mais especificamente, devido à má modelagem numérica que superestima a rigidez dos tabuleiros.



Figura 10: Topologia com instabilidade de tabuleiro. Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund, 2003, p. 39.

A técnica de filtragem de sensibilidades apresentada na subseção 3.7.1 pode também ser utilizada para restringir o surgimento de padrões de tabuleiro de xadrez. Conforme Sigmund (1998), isso se deve ao fato de que a sensibilidade de uma determinada grandeza de interesse, calculada para um elemento específico, depende da média ponderada da sensibilidade do próprio elemento e das sensibilidades dos elementos vizinhos mais próximos.

O problema numérico da instabilidade de tabuleiro já foi investigado em diversos trabalhos (DÍAZ; SIGMUND, 1995; JOG; HABER, 1996) *apud* (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Os dois trabalhos citados por Sigmund e Petersson (1998) fornecem orientações úteis de escolha dos elementos estáveis e mostram que padrões de tabuleiro de xadrez são propensos a aparecer na homogeneização e na abordagem SIMP. Conforme aponta Silveira (2012), soluções modernas, incluindo elementos finitos fora dos padrões convencionais, já podem ser encontradas em alguns trabalhos (JANG et al., 2003; TALISCHI; PAULINO; LE, 2009).

A instabilidade de tabuleiro pode ser evitada pela utilização do filtro de sensibilidades, equação (35), pois este não permite o surgimento de regiões de elementos brancos em meio aos elementos pretos tal como mostra a Figura 10.

### 3.7.3 Mínimos locais e dependência de dados

A não convexidade da maioria dos problemas de otimização topológica leva a possibilidade de encontrar múltiplos mínimos locais e diferentes soluções para a mesma discretização quando são utilizados diferentes parâmetros iniciais no algoritmo de otimização. Isto ocorre porque os algoritmos convergem quando se utiliza programação convexa enquanto que para programação não convexa garante-se a convergência apenas para os pontos estacionários, que não são necessariamente mínimos globais (SIMONETTI, 2009).

Métodos de continuação têm sido utilizados para tratar o problema comentado no parágrafo anterior. A ideia geral destes métodos é mudar gradualmente o problema de otimização convexo, que permite regiões de densidades intermediárias, para o problema de otimização original não-convexo (do tipo 0-1), em um número de passos. Em cada passo destes métodos, um algoritmo de otimização baseado em gradientes é utilizado a fim de buscar a convergência. Contudo, não há garantia de convergência na utilização destes métodos o que pode acontecer, por exemplo, no caso de problemas que apresentam muitos mínimos locais para os problemas relaxados (STOLPE; SVANBERG, 2003). Segundo Silveira (2012), um exemplo do uso desse tipo de método pode ser verificado no caso onde a estrutura é primeiramente otimizada permitindo regiões consistindo de compósitos e, após a convergência, gradualmente se introduz um esquema de penalização para se obter uma topologia sem elementos de densidade intermediária.

A dependência dos resultados de um projeto topológico em relação aos dados que são escolhidos antes de aplicar o procedimento de otimização é de extrema importância uma vez que mudanças no domínio fixo estendido, mudanças nos carregamentos ou nas condições de contorno alteram drasticamente o projeto que um algoritmo pode alcançar (SILVEIRA, 2012).

## **4 PROJETOS SIMULTÂNEOS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES**

A questão da localização ótima para atuadores em estruturas é investigada em dois problemas neste capítulo. Conforme já mencionado na revisão bibliográfica, experiências e estudos recentes têm mostrado que a eficiência de projetos mecânicos otimizados depende de um número considerável de fatores, dentre eles: a distribuição ótima de material, o tipo de controle aplicado ao projeto e a localização dos atuadores e sensores na estrutura. A prática comum para o desenvolvimento de uma estrutura controlada aponta para um projeto em sequência onde a estrutura é definida segundo critérios de resistência mecânica e, em uma segunda etapa, o sistema de controle é projetado com base nessa estrutura pré-definida. Contudo, desde o final da década de 80, esta prática tem sido repensada e um projeto simultâneo de otimização para a topologia estrutural e para o controle para a redução de vibrações vem sendo considerado como uma alternativa para a minimização dos custos e melhora na resposta vibracional dos projetos (SILVEIRA, 2012).

Diversos autores afirmam que o projeto de otimização estrutural e de controle combinados podem obter melhores resultados que o projeto sequencial tradicional (HALE; LISOWSKI; DAHL, 1985; MILLER; SHIM, 1987; SALAMA et al., 1988; MILMAN et al., 1991; SILVEIRA, 2012; SILVEIRA; FONSECA; SANTOS, 2014). Obviamente, a localização ótima para atuadores é uma problemática que está intimamente ligada ao tipo de controle que se aplica a determinado projeto mecânico. Neste sentido, muitos trabalhos que tratam a otimização topológica e o controle contribuem significativamente para a abordagem do problema da localização de atuadores, mesmo que não tratem especificamente a localização de atuadores em suas problemáticas, como é o caso da maioria dos trabalhos citados neste parágrafo e também daqueles apontados na revisão bibliográfica.

Nos problemas abordados nesta dissertação, considera-se dois materiais de densidades distintas na composição das estruturas, um para parte puramente estrutural e outro para os atuadores da estrutura. Há duas razões principais para tal consideração na formulação destes problemas: a primeira está relacionada com a possibilidade

de impor as quantidades máximas de cada material, permitindo que a otimização topológica seja feita considerando uma restrição para o material estrutural (aquele que é elástico e isotrópico e constitui praticamente todo o corpo da estrutura) e outra para o material dos atuadores; a segunda razão tem relação com a resposta gráfica para a indicação da melhor localização dos atuadores, uma vez que na implementação computacional não são necessários cálculos adicionais para a obtenção da localização ótima de atuadores, mas apenas um comando de impressão gráfica que mostre as porções (ou regiões) mais adequadas para se considerar material dos atuadores.

Com base em trabalhos já realizados para o projeto mecânico estrutural e de controle e para a localização de controladores, atuadores e sensores em estruturas, esta dissertação propõe um procedimento simultâneo que utilize o método de otimização topológica para projetar a estrutura ótima através da minimização da flexibilidade e da energia de controle do sistema de modo a indicar a melhor localização para os atuadores nesta estrutura.

Assim sendo, considerando a combinação da otimização topológica com o controle, os problemas apresentados a seguir são formulados a partir do problema de minimização da flexibilidade, exposto em (23) e em (28). Na seção 4.1 o problema considera uma forma de atuador proporcional para o projeto mecânico enquanto que na seção 4.2 o atuador é caracteristicamente piezoelétrico.

## 4.1 Localização de atuadores proporcionais

Nesta seção, busca-se a formulação, o desenvolvimento e os resultados para o problema simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores proporcionais em estruturas. A modelagem matemática do problema é apresentada e discutida na seção 4.1.1 e a partir dela faz-se a análise de sensibilidades, detalhada na seção 4.1.2. O problema é então discretizado via MEF na seção 4.1.3 e, por fim, simulações computacionais são conduzidas na seção 4.1.4 a fim de mostrar os resultados gráficos e a eficiência do método.

### 4.1.1 Modelagem matemática do problema de otimização

Considere o clássico problema de minimização da flexibilidade em elasticidade linear. Seja  $\Omega$  um domínio aberto e conexo com uma fronteira lipschitziana  $\Gamma$ . A fronteira  $\Gamma$  é dividida em duas partes,  $\Gamma_t$  e  $\Gamma_u$ , referentes às fronteiras onde serão aplicadas as cargas e especificados os deslocamentos, respectivamente. O problema pode então ser formulado pela minimização do funcional  $l(u)$  sobre o conjunto  $\Psi$  da forma como apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} & \min_{(u, \rho_1, \rho_2) \in \Psi} l(u), \\ \text{s. a: } & a(u, v, \rho_1, \rho_2) - l(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (37)$$

onde  $\Psi$  é o conjunto dos deslocamentos e valores das variáveis de projeto admissíveis, dado por  $\Psi = \mathcal{U} \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ , de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \left\{ \rho_1(x) \text{ mensurável} : 0 < \rho_{1_{min}} \leq \rho_1(x) \leq 1 \text{ em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \rho_1(x) d\Omega = \eta_1 V \right\}, \\ \mathcal{B}_2 &= \left\{ \rho_2(x) \text{ mensurável} : 0 < \rho_{2_{min}} \leq \rho_2(x) \leq 1 \text{ em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \rho_2(x) d\Omega = \eta_2 V \right\}, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{U}$  é o espaço dos campos de deslocamento cineticamente admissíveis, conforme equação (24),  $V$  é o volume total do domínio  $\Omega$ ,  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são frações do volume que, ao serem consideradas no problema, impõem restrições quanto ao uso do material de densidade  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , respectivamente.

A função custo do problema é minimizada em relação às variáveis de projeto estrutural  $\rho_1$  e de controle  $\rho_2$ , onde o funcional

$$l(u) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma \quad (38)$$

é o trabalho das forças externas com  $u$  sendo o vetor de deslocamentos mecânicos,  $t \in L^2(\Gamma_t; \mathbb{R}^3)$  representa o vetor das forças de superfície e  $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  o vetor das forças de corpo. Note também que  $\rho_{1_{min}}$  e  $\rho_{2_{min}}$  dizem respeito às densidades mínimas relativas às variáveis de projeto estrutural e de controle, respectivamente. Além disso,

$$a(u, v, \rho_1, \rho_2) = \int_{\Omega} S(u) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} r u \cdot h(\rho_1, \rho_2) \cdot v d\Omega, \quad (39)$$

é dado pela soma do trabalho virtual interno de um corpo elástico em equilíbrio (representado pelo primeiro funcional), onde  $S$  é o tensor de deformação dado pela equação (3); e da energia de controle do sistema (o segundo termo do lado direito da equação (39)) que, ao conter a constante de proporcionalidade  $r$ , assume o papel de uma energia de um atuador proporcional.

Tal controle proporcional pode ser compreendido como uma mola cujo propósito é o de anular a ação de forças aplicadas na estrutura. Para isso, uma extremidade da mola está fixa e é externa enquanto a outra está presa na viga. Assim sendo, a constante  $r$  desempenha o papel da rigidez da mola na equação (39). Dois exemplos, meramente ilustrativos, são apresentados na Figura 11.

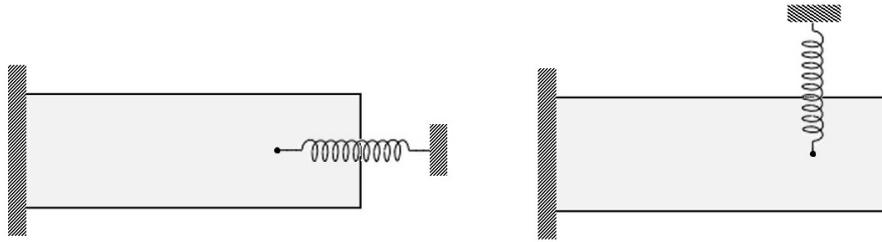


Figura 11: Esquemas ilustrativos para sistemas viga-mola relativos ao problema simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores proporcionais.

Contudo, é preciso esclarecer que, na formulação e resolução do problema, as molas não estão inicialmente fixadas, ou seja, não se conhece a sua localização na viga, uma vez que é a localização ótima o que se procura obter.

O termo  $c(\rho_1)$  é tal que

$$c(\rho_1) = \rho_1(x)^p c^0, \quad (40)$$

onde  $c^0$  é o tensor de rigidez elástica do material base. O termo

$$h(\rho_1, \rho_2) = \rho_1(x)^p \rho_2(x)^p h^0 \quad (41)$$

é uma função de localização, sendo  $h^0$  uma matriz de localização que indica o local onde se irá aumentar (ou diminuir) a rigidez dos elementos nas direções  $x_1$  ou  $x_2$ . As equações (40) e (41) definem o modelo material do problema (37).

No SIMP, conforme já comentado na seção 3.3, o tensor de elasticidade  $c$  do material em cada ponto do domínio varia com a pseudodensidade  $\rho_1$ , enquanto que o coeficiente de Poisson  $\nu^0$ , relativo ao material, não depende de  $\rho_1$ .

A matriz de localização  $h^0$  pode ser utilizada quando se quer impor uma determinada condição permanente a um elemento da malha. Como ilustração, considera-se a discretização para o domínio retangular de projeto apresentado na Figura 12. Para manter somente o elemento 1 sólido durante o processo de otimização topológica, a matriz  $h^0$  é dada por  $h_{11}^0 = 1$  e  $h_{ij}^0 = 0$  para  $ij \neq 11$ .

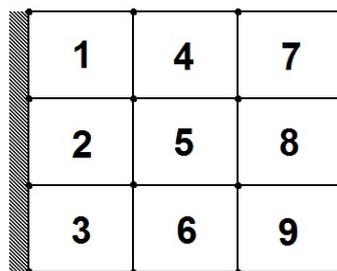


Figura 12: Malha  $3 \times 3$  para uma viga em balanço sujeita ao próprio peso.

A restrição de igualdade do problema (37) provém do Princípio dos Trabalhos Virtuais. As correspondentes equações, nas suas formas fortes, são dadas por

$$\nabla \cdot \sigma(u, \rho_1) - rh(\rho_1, \rho_2) \cdot u + f = 0, \quad \text{em } \Omega; \quad (42)$$

$$\sigma(u, \rho_1) \cdot n = t, \quad \text{em } \Gamma_t; \quad (43)$$

$$u = (0, 0, 0), \quad \text{em } \Gamma_u; \quad (44)$$

onde  $\sigma(u, \rho_1) = c(\rho_1) : S(u)$ .

Assim sendo, o problema simultâneo contínuo de distribuição ótima de material e localização de atuadores proporcionais está bem definido. A resolução deste problema implica, claramente, em obter duas respostas: a topologia ótima condizente com as restrições de suporte e de carregamento, especificadas pelas equações (44) e (43), e restrições de material especificadas pelos conjuntos  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$ ; e a melhor localização para atuadores nesta topologia. Para este fim, considerar-se-á:

- o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  do problema (37);
- as derivadas da função objetivo e das restrições com respeito às variáveis de projeto, etapa que será feita através do Lagrangeano;
- a discretização da função objetivo e das restrições;
- a implementação computacional baseada no fluxograma dado pela Figura 9, considerando a discretização feita na etapa anterior.

#### 4.1.2 Análise de sensibilidades

A análise de sensibilidades consiste em calcular as derivadas da função objetivo e das restrições com respeito às variáveis de projeto e resolver o problema estacionário. Tais derivadas são fundamentais na implementação computacional do problema, pois fazem parte do código do otimizador que atualiza as variáveis de projeto a cada iteração. Para o problema em questão é possível calcular as sensibilidades analiticamente. Para este fim, considerar-se-á o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  do problema (37) de onde serão obtidas as expressões das derivadas em relação às variáveis de projeto,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , bem como as equações de equilíbrio do problema por meio das variações em  $u$  e  $v$ , sendo estas variáveis de estado.

O Lagrangeano  $\mathcal{L}$  para o problema tratado nesta seção é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda) = & l(u) - a(u, v, \rho_1, \rho_2) + l(v) \\ & + \Lambda_1 \left( \int_{\Omega} \rho_1 d\Omega - \eta_1 V \right) + \int_{\Omega} \lambda_1 (\rho_1 - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_2 (\rho_{1_{min}} - \rho_1) d\Omega \\ & + \Lambda_2 \left( \int_{\Omega} \rho_2 d\Omega - \eta_2 V \right) + \int_{\Omega} \lambda_3 (\rho_2 - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_4 (\rho_{2_{min}} - \rho_2) d\Omega, \end{aligned} \quad (45)$$

onde  $v$  atua como um multiplicador de Lagrange para as restrições de equilíbrio, as quais são expressas por (42), (43) e (44), correspondendo à restrição de igualdade do problema (37) na sua forma fraca. Além disso,  $\rho$  representa as variáveis de projeto  $\rho_1 \in \mathcal{B}_1$  e  $\rho_2 \in \mathcal{B}_2$ , ambas funções escalares de  $x$ ,  $\Lambda$  e  $\lambda$  representam multiplicadores de Lagrange de modo que  $\Lambda$  representa  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{R}$  e  $\lambda$  representa as funções escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in L^2(\Omega)$ . Em (45), denotar-se-á:

$$w_1(\rho_1) = \Lambda_1 \left( \int_{\Omega} \rho_1 d\Omega - \eta_1 V \right) + \int_{\Omega} \lambda_1 (\rho_1 - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_2 (\rho_{1_{min}} - \rho_1) d\Omega \quad (46)$$

e

$$w_2(\rho_2) = \Lambda_2 \left( \int_{\Omega} \rho_2 d\Omega - \eta_2 V \right) + \int_{\Omega} \lambda_3 (\rho_2 - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_4 (\rho_{2_{min}} - \rho_2) d\Omega. \quad (47)$$

A fim de obter as equações de Euler-Lagrange do problema de otimização, considera-se nos cálculos abaixo uma variável real auxiliar, denotada por  $\xi$ , e  $\alpha_{\Psi} = \{\alpha_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$  o conjunto de direções admissíveis em  $\Psi$ .

#### Variação em $u$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $u$  na direção de  $\alpha_1$  é denotada por  $\delta_u \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_1)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_u \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_1) = 0, \quad (48)$$

de onde segue que

$$\delta_u l(u; \alpha_1) - \delta_u a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_1) = 0. \quad (49)$$

Note que

$$\begin{aligned} \delta_u l(u; \alpha_1) &= \int_{\Omega} f \cdot \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \delta u d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \alpha_1 d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \alpha_1 d\Gamma, \end{aligned} \quad (50)$$

e também que

$$\begin{aligned}
\delta_u a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_1) &= \int_{\Omega} S(\delta u) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} r \delta u \cdot h(\rho_1, \rho_2) \cdot v d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} \right) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} r \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} \cdot h(\rho_1, \rho_2) \cdot v d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(\alpha_1) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} r \alpha_1 \cdot h(\rho_1, \rho_2) \cdot v d\Omega. \tag{51}
\end{aligned}$$

Considere a identidade, oriunda do Teorema da Divergência,

$$\int_{\Omega} [z \nabla \cdot y + \nabla z \cdot y] d\Omega = \int_{\Gamma} z y \cdot n d\Gamma, \tag{52}$$

onde  $z$  é um campo escalar,  $y$  é um campo vetorial e  $n$  é um vetor normal à superfície  $\Gamma$ . Utilizando a versão desta identidade para tensores de segunda ordem na primeira integral da última igualdade de (51), obtem-se que

$$\int_{\Omega} S(\alpha_1) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot [c(\rho_1) : S(v)] \cdot n d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha_1 \cdot \nabla \cdot [c(\rho_1) : S(v)] d\Omega. \tag{53}$$

Escrevendo  $\sigma(v, \rho_1) = c(\rho_1) : S(v)$  em (53) e considerando os resultados de (50), (51) e (53) na equação (49), obtem-se

$$\int_{\Omega} \alpha_1 \cdot [\nabla \cdot \sigma(v, \rho_1) - r h(\rho_1, \rho_2) \cdot v + f] d\Omega + \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot [\sigma(v, \rho_1) \cdot n - t] d\Gamma = 0, \tag{54}$$

para todo  $\alpha_1$  admissível. Assim, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, tem-se que

$$\nabla \cdot \sigma(v, \rho_1) - r h(\rho_1, \rho_2) \cdot v + f = 0, \quad \text{em } \Omega; \tag{55}$$

$$\sigma(v, \rho_1) \cdot n = t, \quad \text{em } \Gamma_t; \tag{56}$$

$$v = 0, \quad \text{em } \Gamma_u. \tag{57}$$

Variação em  $v$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $v$  na direção de  $\alpha_2$  é denotada por  $\delta_v \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_2)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_v \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_2) = 0, \tag{58}$$

de onde segue que

$$\delta_v l(v; \alpha_2) - \delta_v a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_2) = 0. \quad (59)$$

Os cálculos para esta variação são análogos aos cálculos da variação em  $u$  e por isso são omitidos neste texto. As equações de Euler-Lagrange obtidas são:

$$\nabla \cdot \sigma(u, \rho_1) - rh(\rho_1, \rho_2) \cdot u + f = 0, \quad \text{em } \Omega; \quad (60)$$

$$\sigma(u, \rho_1) \cdot n = t, \quad \text{em } \Gamma_t; \quad (61)$$

$$u = 0, \quad \text{em } \Gamma_u. \quad (62)$$

A partir das equações (55)-(57) e (60)-(62), conclui-se que

$$u = v, \quad \text{em } \Omega. \quad (63)$$

Variação em  $\rho_1$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  em relação à variável de projeto  $\rho_1$  na direção de  $\alpha_3$  é denotada por  $\delta_{\rho_1} \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_3)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_{\rho_1} \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_3) = 0, \quad (64)$$

de onde segue que

$$-\delta_{\rho_1} a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_3) + \delta_{\rho_1} w_1(\rho_1; \alpha_3) = 0. \quad (65)$$

Note que

$$\begin{aligned} \delta_{\rho_1} a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_3) &= \int_{\Omega} S(u) : \delta_{\rho_1}(c(\rho_1); \alpha_3) : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} ru \cdot \delta_{\rho_1}(h(\rho_1, \rho_2); \alpha_3) \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 + \xi \alpha_3)^p c^0 \right]_{\xi=0} : S(v) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} ru \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 + \xi \alpha_3)^p \rho_2^p h^0 \right]_{\xi=0} \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : [p(\rho_1 + \xi \alpha_3)^{p-1} \alpha_3 c^0]_{\xi=0} : S(v) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} ru \cdot [p(\rho_1 + \xi \alpha_3)^{p-1} \alpha_3 \rho_2^p h^0]_{\xi=0} \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : [p(\rho_1)^{p-1} \alpha_3 c^0] : S(v) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} ru \cdot [p(\rho_1)^{p-1} \alpha_3 \rho_2^p h^0] \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : \alpha_3 \frac{\partial c(\rho_1)}{\partial \rho_1} : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} r \alpha_3 u \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} \cdot v d\Omega \end{aligned} \quad (66)$$

e também que

$$\begin{aligned}
\delta_{\rho_1} w_1(\rho_1; \alpha_3) &= \Lambda_1 \int_{\Omega} \delta \rho_1 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_1 \delta \rho_1 d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_2 \delta \rho_1 d\Omega \\
&= \Lambda_1 \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 + \xi \alpha_3) \right]_{\xi=0} d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_1 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 + \xi \alpha_3) \right]_{\xi=0} d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \lambda_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_1 + \xi \alpha_3) \right]_{\xi=0} d\Omega \\
&= \Lambda_1 \int_{\Omega} \alpha_3 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_1 \alpha_3 d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_2 \alpha_3 d\Omega. \tag{67}
\end{aligned}$$

Considerando que  $v = u$ , da equação (63), e os resultados de (66) e (67) na equação (65), obtém-se que

$$\int_{\Omega} \alpha_3 \left[ -S(u) : \frac{\partial c(\rho_1)}{\partial \rho_1} : S(u) - ru \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} \cdot u + \Lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 \right] d\Omega = 0, \tag{68}$$

para todo  $\alpha_3$  admissível, de modo que, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, segue que

$$-S(u) : \frac{\partial c(\rho_1)}{\partial \rho_1} : S(u) - ru \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} \cdot u + \Lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \text{ em } \Omega. \tag{69}$$

A equação (69) é equivalente a

$$-S(u) : [p\rho_1^{p-1}c^0] : S(u) - ru \cdot [p\rho_1^{p-1}\rho_2^p h^0] \cdot u + \Lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \text{ em } \Omega. \tag{70}$$

Note, contudo, que valem as seguintes condições para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (conforme discutido na seção 3.5):

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1(\rho_1 - 1) = 0, \quad \lambda_2(\rho_{1_{min}} - \rho_1) = 0, \tag{71}$$

o que indica que, para densidades intermediárias ( $\rho_{1_{min}} < \rho_1 < 1$ ), tem-se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Assim, a equação (70) pode ser escrita como

$$S(u) : [p\rho_1^{p-1}c^0] : S(u) + ru \cdot [p\rho_1^{p-1}\rho_2^p h^0] \cdot u = \Lambda_1. \tag{72}$$

Varição em  $\rho_2$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  em relação à variável de projeto  $\rho_2$  na direção de  $\alpha_4$  é denotada por  $\delta_{\rho_2} \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_4)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_{\rho_2} \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_4) = 0, \tag{73}$$

de onde segue que

$$-\delta_{\rho_2} a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_4) + \delta_{\rho_2} w_2(\rho_2; \alpha_4) = 0. \quad (74)$$

Note que

$$\begin{aligned} \delta_{\rho_2} a(u, v, \rho_1, \rho_2; \alpha_4) &= \int_{\Omega} ru \cdot \delta_{\rho_2}(h(\rho_1, \rho_2); \alpha_4) \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} ru \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \rho_1^p (\rho_2 + \xi \alpha_4)^p h^0 \right]_{\xi=0} \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} ru \cdot [\alpha_4 p \rho_1^p (\rho_2 + \xi \alpha_4)^{p-1} h^0]_{\xi=0} \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} ru \cdot [\alpha_4 p \rho_1^p \rho_2^{p-1} h^0] \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Omega} r \alpha_4 u \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} \cdot v d\Omega \end{aligned} \quad (75)$$

e também que

$$\begin{aligned} \delta_{\rho_2} w_2(\rho_2; \alpha_4) &= \Lambda_2 \int_{\Omega} \delta \rho_2 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_3 \delta \rho_2 d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_4 \delta \rho_2 d\Omega \\ &= \Lambda_2 \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 + \xi \alpha_4) \right]_{\xi=0} d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_3 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 + \xi \alpha_4) \right]_{\xi=0} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \lambda_4 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_2 + \xi \alpha_4) \right]_{\xi=0} d\Omega \\ &= \Lambda_2 \int_{\Omega} \alpha_4 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_3 \alpha_4 d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_4 \alpha_4 d\Omega. \end{aligned} \quad (76)$$

Considerando que  $v = u$ , da equação (63), e os resultados de (75) e (76) na equação (74), obtem-se que

$$\int_{\Omega} \alpha_4 \left[ -ru \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} \cdot u + \Lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \right] d\Omega = 0, \quad (77)$$

para todo  $\alpha_4$  admissível, de modo que, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, tem-se que

$$-ru \cdot \frac{\partial h(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} \cdot u + \Lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (78)$$

A equação (78) é equivalente a

$$-ru \cdot [p \rho_1^p \rho_2^{p-1} h^0] \cdot u + \Lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (79)$$

Note, contudo, que valem as seguintes condições para  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  (conforme discutido

na seção 3.5):

$$\lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_4 \geq 0, \quad \lambda_3(\rho_2 - 1) = 0, \quad \lambda_4(\rho_{2_{min}} - \rho_2) = 0, \quad (80)$$

o que indica que, para densidades intermediárias ( $\rho_{2_{min}} < \rho_2 < 1$ ), tem-se  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Assim, a equação (79) pode ser escrita como

$$ru \cdot [p\rho_1^p \rho_2^{p-1} h^0] \cdot u = \Lambda_2. \quad (81)$$

A análise de sensibilidades está completa.

As variações do Lagrangeano com respeito às variáveis de estado resultaram nas equações de equilíbrio do problema - as equações (55)-(57), com  $u = v$ . As equações (72) e (81), obtidas pelas variações do Lagrangeano com respeito às variáveis de projeto, são fundamentais para a atualização das densidades dos elementos finitos a cada iteração do algoritmo de otimização topológica e por isso serão utilizadas na forma discretizada.

#### 4.1.3 Discretização do problema de otimização via MEF

A discretização do problema contínuo de otimização dado pelas equações (37)-(39) consiste em dividir o domínio contínuo de referência  $\Omega$  em um número finito de elementos  $\Omega^e$ . A região  $\Omega$  de volume  $V$  passa a ser composta de  $n$  subdomínios de volume  $V^e$ . Nesta configuração, o método parte de uma aproximação para as variáveis primais no nível destes subdomínios que são chamados de elementos finitos.

Em cada elemento finito  $\Omega^e$  são definidos alguns pontos, nomeados nós, onde as incógnitas (no caso deste problema, os deslocamentos mecânicos) são determinadas. Os elementos finitos são limitados pelas suas arestas de modo que é o encontro de duas arestas que dá origem a um nó. Também são nos nós que as condições geométricas e mecânicas de contorno (suportes e carregamentos) são atribuídas. Sendo assim, a discretização do domínio deve ser apropriada para representar a geometria e para receber as condições a ela impostas. O resultado desta discretização origina o que se chama de malha de elementos finitos.

A relação entre as incógnitas nodais de um elemento finito e as incógnitas de um ponto arbitrário, no mesmo elemento, são determinadas por funções de interpolação do tipo polinomiais (COOK; MALKUS; PLESHA, 1989). A quantidade de funções de interpolação é igual ao número de nós de um elemento  $\Omega^e$  e são elas que garantem que as interfaces de elementos finitos adjacentes permaneçam contíguas quando da deformação da malha, não havendo possibilidade, portanto, para formação de vazios entre elementos e nem sobreposição de partes de elementos (SORIANO, 2009).

Neste trabalho, considera-se como elemento mestre  $\hat{\Omega}^e$  o elemento isoparamétrico bilinear, também chamado elemento Q4. Para o elemento retangular cujos lados têm

comprimento 2, com  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$  no centro do elemento, fixa-se os eixos cartesianos  $x_1$  e  $x_2$  de modo que sejam paralelos aos lados do elemento, conforme a Figura 13. Os nós do elemento têm, portanto, coordenadas  $x_1 = \pm 1$  e  $x_2 = \pm 1$ . Como as discretizações nesta dissertação são feitas sob domínios retangulares, a malha de elementos finitos é formada também por elementos retangulares, não sendo necessária a abordagem que trata da transformação geométrica das coordenadas naturais para as coordenadas físicas, como geralmente é explicado na teoria de elementos finitos.

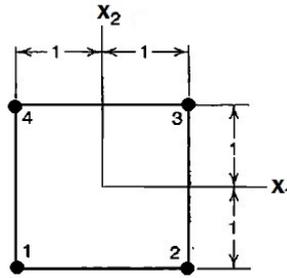


Figura 13: Elemento isoparamétrico bilinear. Fonte: Adaptado de Cook, Malkus e Plesha, 1989, p. 166.

Uma vez que o elemento é isoparamétrico, por definição, as mesmas funções de forma são utilizadas para interpolar tanto as coordenadas quanto os deslocamentos de um ponto dentro do elemento a partir das coordenadas e deslocamentos nodais. Disto, garante-se a continuidade dos deslocamentos entre os elementos a partir dos nós nos lados que estes elementos partilham. Assim, tem-se que

$$\mathbf{x}^e = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_i x_{1i}^e \\ \sum_{i=1}^4 N_i x_{2i}^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}_u \mathbf{x}_i^e, \quad (82)$$

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_i u_{x_{1i}}^e \\ \sum_{i=1}^4 N_i u_{x_{2i}}^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_i^e, \quad (83)$$

onde  $\mathbf{x}^e$  é o vetor das coordenadas cartesianas de um elemento finito,  $\mathbf{u}^e$  é o vetor de deslocamentos mecânicos de um elemento finito e o índice  $i$ , nas somas, representa um nó específico do elemento. Os termos  $u_{x_{1i}}$  e  $u_{x_{2i}}$  representam os deslocamentos do nó  $i$  nas direções horizontal e vertical, respectivamente;  $x_{1i}$  e  $x_{2i}$  representam as coordenadas do nó  $i$ . Ademais,

$$\mathbf{x}_i^e = \begin{bmatrix} x_{11}^e & x_{21}^e & x_{12}^e & x_{22}^e & x_{13}^e & x_{23}^e & x_{14}^e & x_{24}^e \end{bmatrix}^T, \quad (84)$$

$$\mathbf{u}_i^e = \begin{bmatrix} u_{x_{11}}^e & u_{x_{21}}^e & u_{x_{12}}^e & u_{x_{22}}^e & u_{x_{13}}^e & u_{x_{23}}^e & u_{x_{14}}^e & u_{x_{24}}^e \end{bmatrix}^T, \quad (85)$$

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

onde  $\mathbf{N}_u$  é a matriz das funções de interpolação para os deslocamentos mecânicos.

As funções de forma  $N_i$  são as funções de interpolação de Lagrange dadas por

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-x_1)(1-x_2), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+x_1)(1-x_2), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+x_1)(1+x_2), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-x_1)(1+x_2). \end{aligned} \quad (87)$$

A partir das equações em (87), observa-se que cada  $N_i$  assume um valor unitário quando  $x_1$  e  $x_2$  assumem a coordenada do nó  $i$ , mas é zero quando  $x_1$  e  $x_2$  assumem a coordenada de qualquer outro nó.

O campo de deformações mecânicas  $\mathbf{S}^e$ , para cada elemento finito, pode ser escrito em função dos deslocamentos e das derivadas das funções de interpolação na forma

$$\mathbf{S}^e = \mathcal{D}_u \mathbf{N}_u \mathbf{u}_i^e = \mathbf{B}_u \mathbf{u}_i^e, \quad (88)$$

onde  $\mathcal{D}_u$  é um operador diferencial tal que

$$\mathbf{B}_u = \mathcal{D}_u \mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \mathbf{N}_u. \quad (89)$$

Para obter a equação matricial referente ao problema de otimização, parte-se do Princípio dos Trabalhos Virtuais, de onde tem-se que

$$\delta \left( \int_{\Omega} S(u) : c(\rho_1) : S(v) d\Omega + \int_{\Omega} ru \cdot h(\rho_1, \rho_2) \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega - \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma \right) = 0. \quad (90)$$

Passando à variação em cada integral e considerando que  $v = u$ , obtém-se

$$\int_{\Omega} \delta S(u) : c(\rho_1) : S(u) d\Omega + \int_{\Omega} \delta ru \cdot h(\rho_1, \rho_2) \cdot u d\Omega - \int_{\Omega} \delta f \cdot u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta t \cdot u d\Gamma = 0. \quad (91)$$

Considerando as equações (83) e (88) na equação (91) e escrevendo os demais termos na forma matricial, a seguinte expressão é obtida

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_i^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^0 \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e + \delta \mathbf{u}_i^{eT} r \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T h^0 \mathbf{N}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e \\ - \delta \mathbf{u}_i^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e - \delta \mathbf{u}_i^{eT} \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e = 0, \end{aligned} \quad (92)$$

onde  $\mathbf{f}^e$  e  $\mathbf{t}^e$  são os vetores das forças de corpo e das forças de superfície de um

elemento finito, respectivamente.

Desta última igualdade, tem-se que

$$\delta \mathbf{u}_i^{eT} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^0 \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e + r \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T h^0 \mathbf{N}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e \right] = 0. \quad (93)$$

Uma vez que a variação  $\delta \mathbf{u}_i^{eT}$  é arbitrária e diferente de zero, segue da equação (93) que

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^0 \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e + r \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T h^0 \mathbf{N}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e = 0. \quad (94)$$

A equação matricial na forma de elementos finitos é dada por:

$$[\mathbf{K}_{uu}^e + \mathbf{G}_{uu}^e] [\mathbf{u}_i^e] = [\mathbf{F}_u^e], \quad (95)$$

onde

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^0 \mathbf{B}_u d\Omega^e, \quad (96)$$

$$\mathbf{G}_{uu}^e = r \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T h^0 \mathbf{N}_u d\Omega^e \quad (97)$$

e

$$\mathbf{F}_u^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e + \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e \quad (98)$$

representam a matriz de rigidez, a matriz de localização e o vetor de forças de um elemento finito, respectivamente. Além disso, em (96), tem-se que

$$c^0 = \frac{\mathcal{E}^0}{1 - (\nu^0)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu^0 & 0 \\ \nu^0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu^0 \end{bmatrix}, \quad (99)$$

onde  $\mathcal{E}^0$  e  $\nu^0$  são o módulo de Young e o coeficiente de Poisson do material base isotrópico, respectivamente.

Como cada elemento da malha é conectado aos seus elementos vizinhos através dos nós e, assim, os deslocamentos mecânicos são contínuos de um elemento para outro, o Princípio dos Trabalhos Virtuais deve ser verificado para a estrutura completa através das matrizes globais obtidas a partir da contribuição de cada elemento finito (BECKER; CAREY; ODEN, 1981; COOK; MALKUS; PLESHA, 1989). A forma da equação matricial global será análoga à equação matricial elementar:

$$[\mathbf{K}_{uu} + \mathbf{G}_{uu}] [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}_u], \quad (100)$$

onde  $\mathbf{K}_{uu}$  é a matriz global de rigidez,  $\mathbf{G}_{uu}$  é a matriz global de localização,  $\mathbf{U}$  é a deflexão global e  $\mathbf{F}_u$  é o vetor global de forças.

A formulação por elementos finitos está completa e pode-se, finalmente, escrever o problema (37)-(39) na sua forma final discretizada. Note que, no membro esquerdo da equação (100), quando ambos os membros são pré-multiplicados por  $\mathbf{U}^T$ , ou seja,  $\mathbf{U}^T[\mathbf{K}_{uu} + \mathbf{G}_{uu}]\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{F}$ , aparece a forma fraca (em notação matricial) do funcional de custo dado pela equação (38), o trabalho virtual das forças externas. Assim, o membro esquerdo da equação (100) pode ser utilizado como função objetivo para o problema discretizado.

O problema de otimização discretizado para  $N$  elementos pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
 \min \quad & J(u, \rho_1, \rho_2) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{G}_{uu} \mathbf{U} \\
 & = \sum_{e=1}^N (\rho_{1e})^p \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}^e + \sum_{e=1}^N (\rho_{1e})^p (\rho_{2e})^p \mathbf{u}^{eT} \mathbf{G}_{uu}^e \mathbf{u}^e \\
 \text{s. a :} \quad & \sum_{e=1}^N (\rho_{1e})^p \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}^e + \sum_{e=1}^N (\rho_{1e})^p (\rho_{2e})^p \mathbf{G}_{uu}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F} \\
 & \sum_{e=1}^N \rho_{1e} V^e = \eta_1 V \\
 & \sum_{e=1}^N \rho_{2e} V^e \leq \eta_2 V \\
 & 0 < \rho_{1e_{min}} \leq \rho_{1e} \leq 1 \\
 & 0 < \rho_{2e_{min}} \leq \rho_{2e} \leq 1 \\
 & e = 1, 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{101}$$

Conforme comentado na seção anterior, as derivadas do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito às variáveis de projeto  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são necessárias para obter a condição estacionária do problema de otimização, o que é utilizado para a geração da topologia ótima a cada iteração feita pelo processamento do código computacional. Neste código, estas derivadas (obtidas de forma analítica nas equações (72) e (81)), devem ser consideradas nas suas formas discretizadas, dadas pelas expressões:

$$\frac{\partial J}{\partial \rho_1} = - \sum_{e=1}^N p (\rho_{1e})^{p-1} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}^e - \sum_{e=1}^N p (\rho_{1e})^{p-1} (\rho_{2e})^p \mathbf{u}^{eT} \mathbf{G}_{uu}^e \mathbf{u}^e \tag{102}$$

e

$$\frac{\partial J}{\partial \rho_2} = - \sum_{e=1}^N p (\rho_{1e})^p (\rho_{2e})^{p-1} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{G}_{uu}^e \mathbf{u}^e. \tag{103}$$

#### 4.1.4 Simulações e resultados

Esta seção apresenta as simulações e os resultados oriundos da implementação computacional da proposta metodológica sugerida para a resolução do problema (37)-(39) cuja forma discretizada está apresentada em (101). A metodologia aqui proposta foi codificada no *software* Matlab® e está fortemente baseada em Sigmund (2001).

Quatro casos são apresentados a fim de verificar o desempenho da proposta de projeto simultâneo descrita neste trabalho. Uma viga de  $1m$  de comprimento (no eixo  $x_1$ ) por  $0,4m$  de largura (no eixo  $x_2$ ), cuja discretização resultou em uma malha de 1440 ( $60 \times 24$ ) elementos finitos bilineares, é considerada para todos os casos que, por sua vez, se diferenciam quanto aos suportes e carregamentos. Cada elemento finito isoparamétrico tem quatro nós e dois graus de liberdade por nó.

O projeto mecânico busca a otimização estrutural e a localização ótima para atuadores através da minimização simultânea da flexibilidade e da energia de controle do sistema. Tal otimização é baseada na distribuição ótima do material estrutural e do material dos atuadores no domínio de projeto. O material isotrópico elástico está relacionado à variável de projeto  $\rho_1$  e é predominante no projeto da estrutura recebendo o nome de material estrutural nas discussões desta seção. O material referente aos atuadores, relacionado à variável  $\rho_2$ , deve ser considerado de modo a ter rigidez suficientemente superior à rigidez do material estrutural. Para tanto, considera-se a constante de proporcionalidade  $r = 1 \times 10^9$  nas equações (39) e (97). As propriedades mecânicas do alumínio, material estrutural utilizado nas simulações, são apresentadas na Tabela 2 (SILVEIRA; FONSECA; SANTOS, 2014).

Tabela 2: Propriedades materiais do alumínio.

ALUMÍNIO	
Módulo de Young	$71 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
Densidade	$2700 \text{ kg/m}^3$
Coefficiente de Poisson	0,33

Em cada iteração, o cálculo das variáveis de projeto é feito por meio de um esquema de atualização heurístico chamado de método de Critério de Otimalidade (OC) padrão (BENDSØE, 1995) *apud* (SIGMUND, 2001). Tal método pode ser formulado por meio das equações (33) e (34), necessitando, portanto, das derivadas dadas pelas equações (102) e (103). Além disso, para todos os casos, considerou-se o raio de filtragem  $r_{min} = 1.2mm$  para o filtro de sensibilidades utilizado na análise estrutural e o coeficiente de penalização do modelo material  $p = 3$  (SIGMUND, 2001). Uma análise mais detalhada da implementação do método OC e do filtro de sensibilidades pode ser feita pela consulta ao Apêndice do trabalho de Sigmund (2001).

**Critério de convergência.** O critério de convergência para o processo de otimização topológica implementado foi baseado no número de iterações e na mudança do vetor de variáveis de projeto ao longo do processo de otimização, conforme Sigmund (2001). Foi imposto um número mínimo de iterações a serem feitas pelo algoritmo e também definiu-se que o algoritmo deveria parar quando a máxima mudança em módulo das variáveis de projeto fosse menor do que um determinado percentual, a saber, 3%.

**Caso 1:** Considerou-se uma viga em balanço sujeita à carga pontual  $f_p$  em seu canto inferior direito, como mostra a Figura 14(a). A força é  $f_p = -1 \times 10^6 \mathbf{j}$ , onde  $\mathbf{j} = (0, 1)$ .

A Figura 14(b) mostra a topologia ótima da viga representada em (a) para  $\eta_1 = 0,5$ . Este valor de  $\eta_1$  manteve-se o mesmo durante todas as simulações.

A fim de visualizar a melhor localização para atuadores na viga, considerou-se diferentes valores para  $\eta_2$ , constante responsável por impor a fração de volume do material de densidade  $\rho_2$  relativo aos atuadores. A Figura 14(c) foi gerada, propositalmente, com  $\eta_2 = 0,002$ , fração de volume que corresponde a aproximadamente um elemento finito, possibilitando, assim, a obtenção do local ótimo na viga para a fixação do atuador. As Figuras 14(d), 14(e) e 14(f) indicam as melhores posições para alocação de atuadores ao se considerar maiores frações de volume para o material de densidade  $\rho_2$ . Estas frações de volume  $\eta_2$  foram de 0,005, 0,01 e 0,05, respectivamente.

A Figura 14(f) mostra que o processo de distribuição de material indicou locais para a colocação de atuadores que inicialmente não estavam ativos na topologia ótima mostrada em (b). Acredita-se que isto se deve à contribuição da variável  $\rho_2$  nestes locais uma vez que esta é atualizada pelo deslocamento  $u$  que é maior nestes pontos quando comparado ao restante da viga.

Nota-se, ainda, que as porções indicadas para alocação dos atuadores são aquelas que apresentam os maiores deslocamentos provenientes da aplicação da carga  $f_p$ . Isto é condizente com o problema, uma vez que a energia proposta para estes atuadores depende do deslocamento.

A convergência da função objetivo  $J$  pode ser vista na Figura 15. É possível notar a rápida convergência da função na primeira terça parte de iterações computadas.

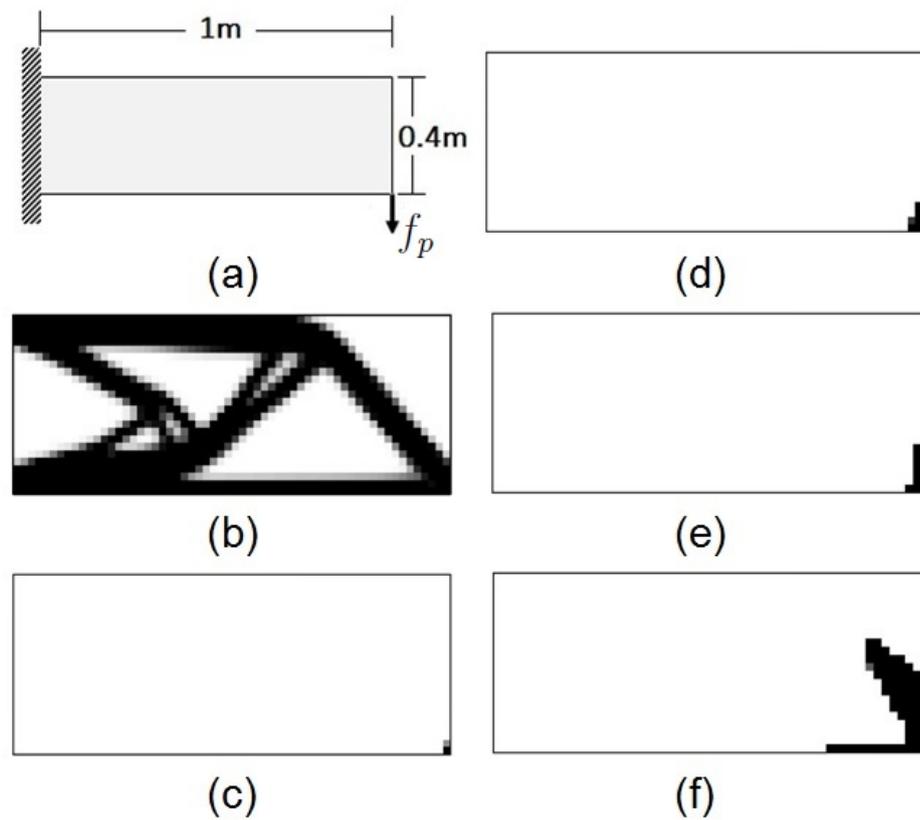


Figura 14: (a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade  $\rho_1$  para  $\eta_1 = 0,5$ . Distribuição do material de densidade  $\rho_2$ , referente aos atuadores, para (c)  $\eta_2 = 0,002$ , (d)  $\eta_2 = 0,005$ , (e)  $\eta_2 = 0,01$  e (f)  $\eta_2 = 0,05$ .

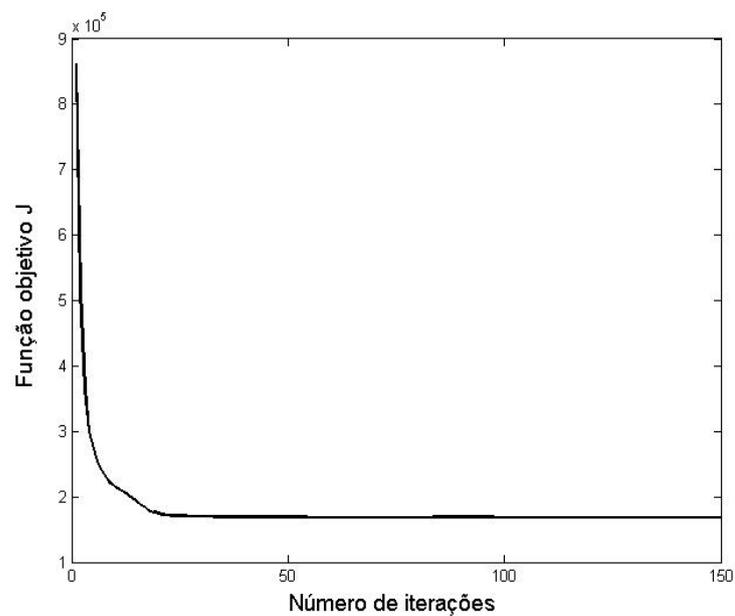


Figura 15: Convergência da função objetivo para o Caso 1.

**Caso 2:** Considerou-se uma viga biengastada com carga pontual  $f_p$  no centro de sua parte superior, como mostra a Figura 16(a). A força é  $f_p = -1 \times 10^7 \mathbf{j}$ .

O domínio topologicamente otimizado para a viga é mostrado na Figura 16(b). A geração desta topologia se deu com  $\eta_1 = 0,5$  e este valor foi mantido nas demais simulações deste caso.

A Figura 16(c) indica a posição ótima na viga para alocar um atuador. O ponto sólido, em cor preta, pode ser obtido com  $\eta_2 = 0,002$ . Note que o resultado é condizente com a ideia de controlar os deslocamentos que surgem com a aplicação da força  $f_p$ , pois, uma vez que a força  $f_p$  está aplicada exatamente no meio da parte superior da viga, então será neste ponto e nas suas vizinhanças que ocorrerão os maiores deslocamentos. Assim sendo, o atuador deve ser fixado no ponto de aplicação da força.

As Figuras 16(d), 16(e) e 16(f), geradas com  $\eta_2 = 0,005$ ,  $\eta_2 = 0,01$  e  $\eta_2 = 0,05$ , respectivamente, mostram as regiões da topologia otimizada indicadas para alocação de atuadores quando se destina porcentagens maiores de material de densidade  $\rho_2$  para a composição da estrutura.

A rápida convergência da função objetivo  $J$  pode ser analisada na Figura 17.

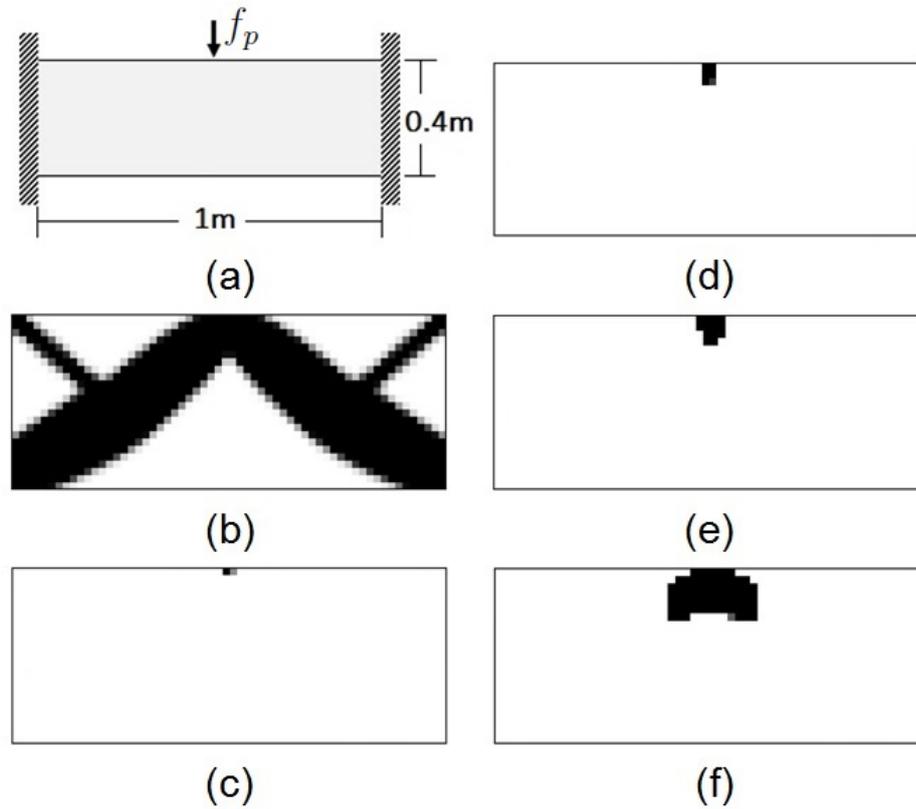


Figura 16: (a) Esquema para viga biengastada sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade  $\rho_1$  para  $\eta_1 = 0,5$ . Distribuição do material de densidade  $\rho_2$ , referente aos atuadores, para (c)  $\eta_2 = 0,002$ , (d)  $\eta_2 = 0,005$ , (e)  $\eta_2 = 0,01$  e (f)  $\eta_2 = 0,05$ .

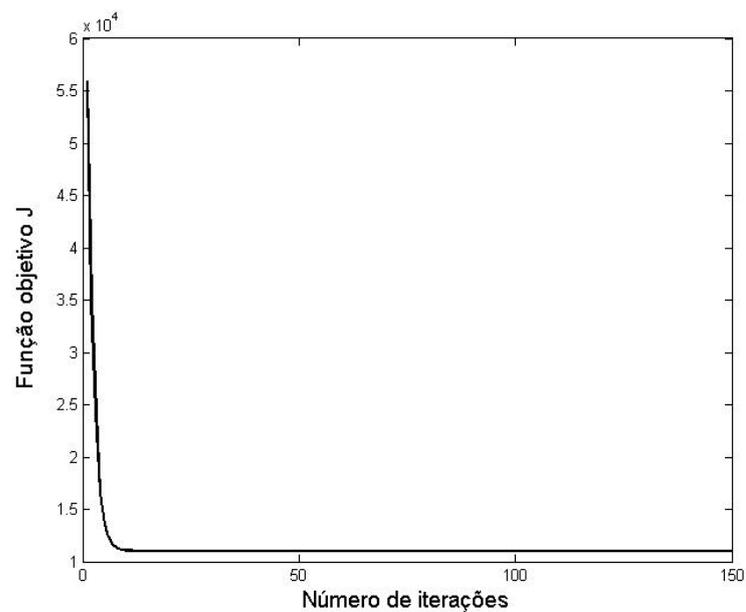


Figura 17: Convergência da função objetivo para o Caso 2.

**Caso 3:** Considerou-se uma viga em balanço sujeita à ação de duas forças simultâneas no canto inferior direito da viga, conforme ilustra a Figura 18(a). As forças são tais que  $f_{p_1} = -1 \times 10^7 \mathbf{j}$  e  $f_{p_2} = 1 \times 10^7 \mathbf{i}$ , onde  $\mathbf{i} = (1, 0)$ .

Analisou-se a atuação isolada das forças na viga de modo a se considerar os esquemas dados pelas Figuras 18(c) e 18(e). Disto, duas topologias ótimas foram geradas: uma resultante da consideração da aplicação da força  $f_{p_1}$ , dada pela Figura 18(d), e outra resultante da força  $f_{p_2}$  aplicada, dada pela Figura 18(f). A sobreposição destes resultados pode ser visualizada na Figura 18(b.1) que foi gerada a partir da soma dos resultados das topologias ótimas obtidas para  $f_{p_1}$  e  $f_{p_2}$  separadamente. A Figura 18(b.2) é a topologia ótima obtida pela ação simultânea das forças  $f_{p_1}$  e  $f_{p_2}$ . As simulações foram feitas com  $\eta_1 = 0,5$ .

As Figuras 18(g) e 18(h), geradas com  $\eta_2 = 0,01$ , representam a melhor região da estrutura otimizada para a alocação de atuadores. A Figura 18(g) leva em conta a sobreposição dos resultados otimizados obtidos quando da aplicação isolada de cada uma das forças enquanto que o resultado da Figura 18(h) é obtido do caso que considerou a ação conjunta destas forças. Note que, para este caso, ambas as respostas são próximas, indicando que o local mais apropriado para alocação de atuadores é aquele onde haverá maior deslocamento, em consonância com o resultado obtido no Caso 1.

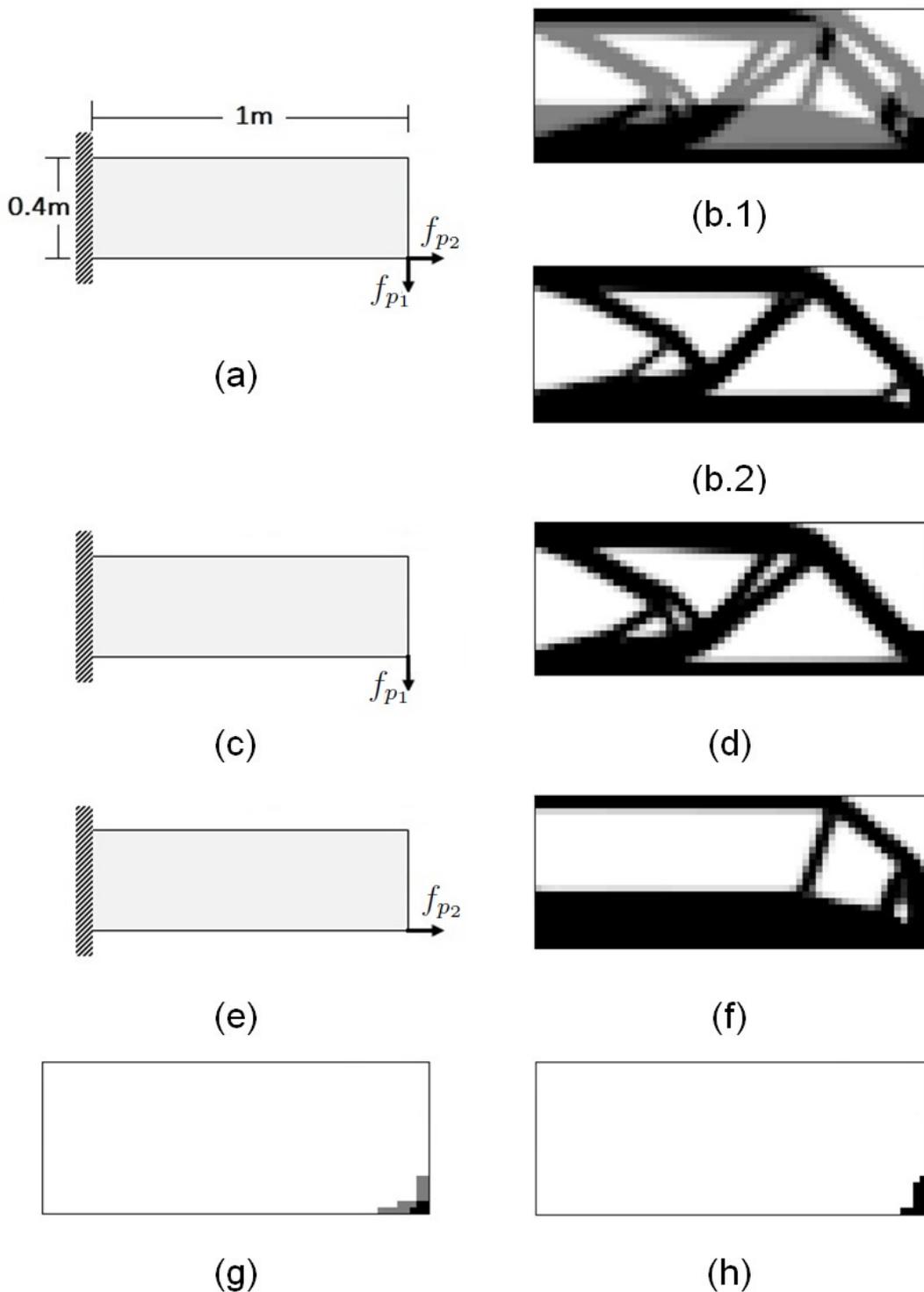


Figura 18: (a), (c) e (e): Esquemas ilustrativos para viga em balanço sujeita à ação das forças  $f_{p1}$  e  $f_{p2}$ . (b.1) Sobreposição das distribuições de material de densidade  $\rho_1$  encontradas em (d) e (f) com  $\eta_1 = 0,5$ . (b.2) Distribuição do material de densidade  $\rho_1$  considerando a atuação simultânea das forças  $f_{p1}$  e  $f_{p2}$  para  $\eta_1 = 0,5$ . (d) Distribuição do material de densidade  $\rho_1$  para (c) com  $\eta_1 = 0,5$ . (f) Distribuição do material de densidade  $\rho_1$  para (e) com  $\eta_1 = 0,5$ . (g) Distribuição do material de densidade  $\rho_2$  referente a (b.1) com  $\eta_2 = 0,01$ . (h) Distribuição do material de densidade  $\rho_2$  referente a (b.2) com  $\eta_2 = 0,01$ .

**Caso 4:** Considerou-se uma viga em balanço sujeita à ação de duas forças  $f_{p1}$  e  $f_{p2}$ , não simultâneas, de mesma magnitude,  $1 \times 10^7 N$ . A força  $f_{p1}$  é aplicada no canto direito inferior da viga no sentido negativo do eixo  $x_2$  enquanto a força  $f_{p2}$  é aplicada no canto direito superior no sentido positivo do eixo  $x_2$ . Veja a Figura 19(a).

Analisou-se a atuação isolada das forças na viga de modo a se considerar os esquemas dados pelas Figuras 19(c) e 19(e). Assim, foram geradas duas topologias ótimas: uma resultante da consideração da aplicação da força  $f_{p1}$ , dada pela Figura 19(d), e outra resultante da força  $f_{p2}$  aplicada, dada pela Figura 19(f). A sobreposição destes resultados pode ser visualizada na Figura 19(b.1) que foi gerada a partir da soma dos resultados das topologias ótimas obtidas para  $f_{p1}$  e  $f_{p2}$  separadamente. A Figura 19(b.2) é a topologia ótima obtida pela ação simultânea das forças  $f_{p1}$  e  $f_{p2}$ . As simulações foram feitas com  $\eta_1 = 0,5$ .

A diferença nas topologias das Figuras 19(b.1) e 19(b.2) já era esperada uma vez que a ação conjunta das forças deve gerar tensão em toda extremidade direita da viga, mas não deve ocasionar deslocamentos. Através dos resultados gráficos, percebe-se que este é um caso claro em que a alocação de atuadores deve ser analisada por meio dos resultados das aplicações das forças de forma não simultânea o que, inclusive, poderá reduzir o número de atuadores necessários para o controle da estrutura.

Os resultados gráficos ainda evidenciam um aspecto interessante quanto ao melhor local para atuadores na estrutura otimizada. Ao considerar  $\eta_2 = 0,01$ , a melhor localização para os atuadores se dá em duas regiões distintas - nos cantos inferior e superior da extremidade livre da viga, conforme mostra a Figura 19(g). Para  $\eta_2 = 0,05$ , por exemplo, em virtude da consideração de uma maior porcentagem para o material de densidade  $\rho_2$ , a localização ótima para os atuadores deixa de estar nas extremidades da viga e passa a ser uma única região, conforme mostra a Figura 19(h). Evidentemente, esta região (conjunto de elementos formando um ponto sólido) é a intersecção resultante da sobreposição das topologias ótimas.

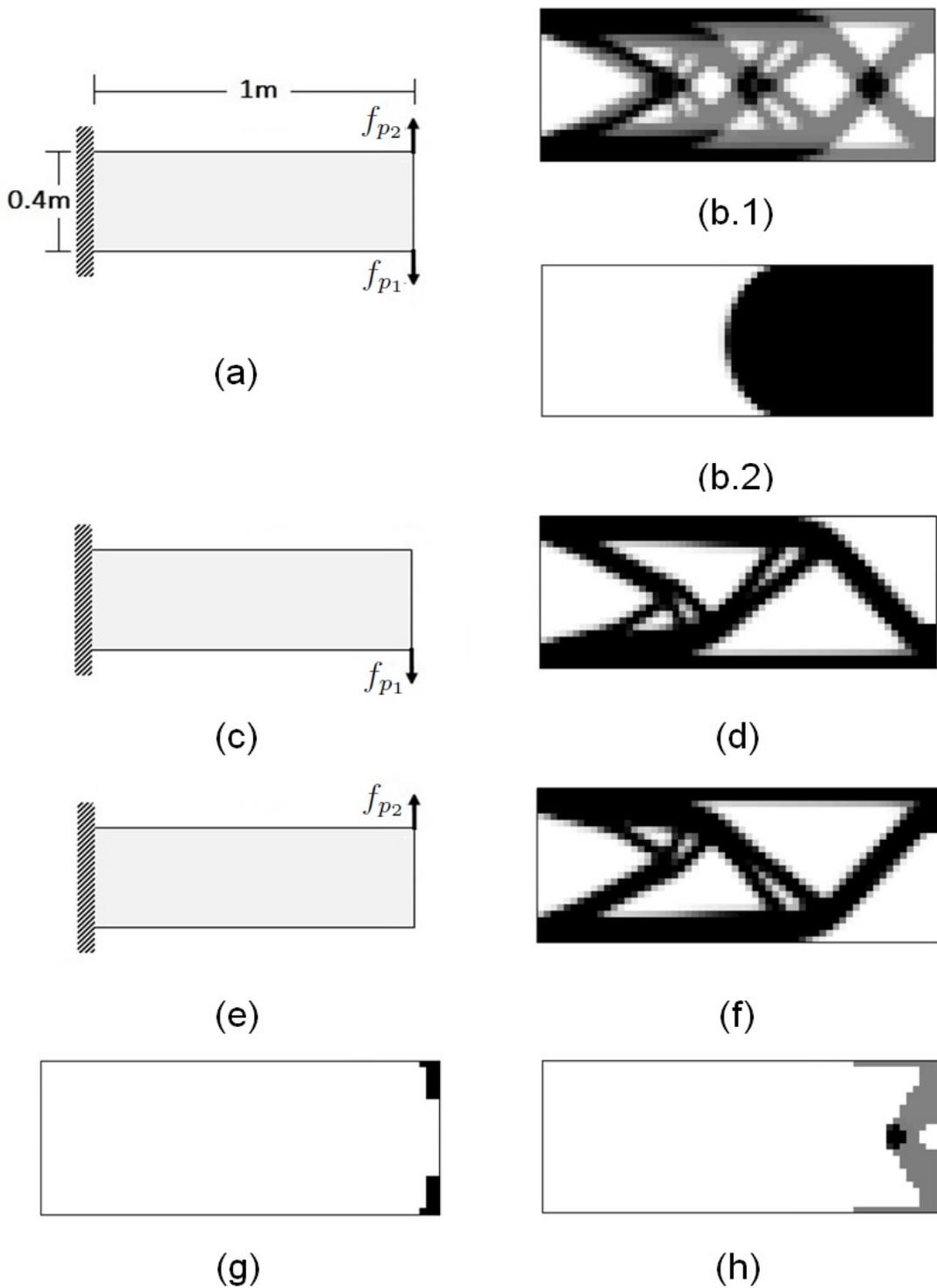


Figura 19: (a), (c) e (e): Esquemas ilustrativos para viga em balanço sujeita à ação das forças  $f_{p1}$  e  $f_{p2}$ . (b.1) Sobreposição das distribuições de material de densidade  $\rho_1$  encontradas em (d) e (f) com  $\eta_1 = 0,5$ . (b.2) Distribuição do material de densidade  $\rho_1$  considerando a atuação simultânea das forças  $f_{p1}$  e  $f_{p2}$  para  $\eta_1 = 0,5$ . (d) Distribuição do material de densidade  $\rho_1$  para (c) com  $\eta_1 = 0,5$ . (f) Distribuição do material de densidade  $\rho_1$  para (e) com  $\eta_1 = 0,5$ . (g) Distribuição do material de densidade  $\rho_2$  referente a (b.1) com  $\eta_2 = 0,01$ . (h) Distribuição do material de densidade  $\rho_2$  referente a (b.1) com  $\eta_2 = 0,05$ .

## 4.2 Localização de atuadores piezoelétricos

Nesta seção, busca-se a formulação, o desenvolvimento e os resultados para o problema simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores piezoelétricos em estruturas. O formato do problema é apresentado e discutido na seção 4.2.1 e a partir dele faz-se a análise de sensibilidades na seção 4.2.2. A formulação variacional para problemas piezoelétricos é desenvolvida detalhadamente na seção 4.2.3, e a discretização do problema via MEF é feita na seção 4.2.4. Por fim, simulações computacionais são conduzidas na seção 4.2.5 a fim de mostrar os resultados gráficos e a eficiência do método.

### 4.2.1 Modelagem matemática do problema de otimização

Considere o clássico problema de minimização da flexibilidade em elasticidade linear. Seja  $\Omega$  um domínio aberto e conexo com uma fronteira lipschitziana  $\Gamma$ . A fronteira  $\Gamma$ , para a parte elástica, é dividida em duas partes,  $\Gamma_t$  e  $\Gamma_u$ , referentes às fronteiras onde serão aplicadas as forças de superfície e especificados os deslocamentos, respectivamente. Outra divisão da fronteira  $\Gamma$  é considerada para a parte elétrica do problema com  $\Gamma_\phi$  e  $\Gamma_q$ , onde  $\Gamma_\phi$  é a fronteira para especificação do potencial elétrico e  $\Gamma_q$  a fronteira onde serão aplicadas as cargas elétricas. O problema pode então ser formulado pela obtenção de um valor estacionário do funcional  $l(u, \phi)$  sobre o conjunto  $\Upsilon$ , pois a energia potencial é convexa em  $u$  e côncava em  $\phi$ . Assim, o problema é dado por:

$$\begin{aligned} \text{est} \\ (u, \phi, \rho_u, \rho_\phi) \in \Upsilon \quad & l(u, \phi), \\ \text{s. a: } \quad & a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi) - l(u_v, \phi_v) = 0 \quad \forall u_v \in \mathcal{U}, \forall \phi_v \in \Phi, \end{aligned} \quad (104)$$

onde  $\Upsilon = \mathcal{U} \times \Phi \times \mathcal{B}_u \times \mathcal{B}_\phi$ ,

$$\mathcal{B}_u = \left\{ \rho_u(x) \text{ mensurável} : 0 < \rho_{u_{min}} \leq \rho_u(x) \leq 1 \text{ em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \rho_u(x) d\Omega = \eta_u V \right\},$$

$$\mathcal{B}_\phi = \left\{ \rho_\phi(x) \text{ mensurável} : 0 < \rho_{\phi_{min}} \leq \rho_\phi(x) \leq 1 \text{ em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \rho_\phi(x) d\Omega = \eta_\phi V \right\},$$

$$\Phi = \{ \phi \in W^{1,2}(\Omega) : \phi = 0 \text{ sobre } \Gamma_\phi \},$$

onde  $\mathcal{U}$  é o espaço dos deslocamentos cineticamente admissíveis, conforme equação (24), e  $\Phi$  é o espaço dos potenciais elétricos cineticamente admissíveis.

O funcional de custo

$$l(u, \phi) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_\phi} f_\phi \phi d\Gamma + f_p(u) - q_p(\phi) \quad (105)$$

representa o trabalho das forças externas com  $u$  sendo o vetor de deslocamentos mecânicos e  $\phi$  o potencial elétrico. Em (105),  $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  é o vetor das forças de corpo,  $t \in L^2(\Gamma_t; \mathbb{R}^3)$  é o vetor das forças de superfície e  $f_\phi \in L^2(\Gamma_\phi)$  é o vetor das cargas elétricas de superfície, onde  $L^2(\Gamma_\phi)$  é o espaço das funções reais cujo domínio é  $\Gamma_\phi$  e cujo quadrado é finito-integrável. O trabalho das forças concentradas e o trabalho das cargas elétricas concentradas são dados, respectivamente, por

$$f_p(u) = \sum_{j=1}^k f_{p_j} \cdot u(x_j), \quad (106)$$

onde  $f_{p_j} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, k\}$  e

$$q_p(\phi) = \sum_{l=1}^m q_{p_l} \phi(x_l), \quad (107)$$

onde  $q_{p_l} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall l \in \{1, \dots, m\}$ ,  $x_j$  e  $x_l$  denotam os pontos do domínio onde há força e carga elétrica concentrada. Note também que  $\rho_{u_{min}}$  e  $\rho_{\phi_{min}}$  dizem respeito às densidades mínimas relativas às variáveis de projeto estrutural e de controle, respectivamente. Ademais, na restrição de igualdade do problema (104),

$$a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi) - l(u_v, \phi_v) = 0, \quad \forall u_v \in \mathcal{U}, \forall \phi_v \in \Phi, \quad (108)$$

tem-se que

$$\begin{aligned} a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi) &= \int_{\Omega} S(u) : c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} S(u) : e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} E(\phi) \cdot e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} E(\phi) \cdot \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega \end{aligned} \quad (109)$$

representa o trabalho virtual das forças internas com  $S$  e  $E$  na forma como foram definidos em (3) e (4).

Da mesma forma que no problema da seção 4.1.1, com respeito ao problema (104), tem-se que  $V$  é o volume total do domínio  $\Omega$ ,  $\eta_u$  e  $\eta_\phi$  são frações que ao serem consideradas no problema impõem restrições quanto ao uso de material de densidade  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$ , respectivamente.

O modelo material para otimização topológica inclui dois materiais de densidades distintas: um material elástico isotrópico e um material piezoelétrico, além do vazio. O

modelo (CARBONARI; SILVA; NISHIWAKI, 2007) é dado por

$$c^E(\rho_u, \rho_\phi) = \rho_u(x)^{p_1} (\rho_\phi(x)^{p_2} c_\phi^E + (1 - \rho_\phi(x)^{p_2}) c_u^E), \quad (110)$$

$$e(\rho_u, \rho_\phi) = \rho_u(x)^{p_1} \rho_\phi(x)^{p_3} e_\phi, \quad (111)$$

$$\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) = \rho_u(x)^{p_1} \rho_\phi(x)^{p_3} \epsilon_\phi^S, \quad (112)$$

onde  $c^E(\rho_u, \rho_\phi)$ ,  $e(\rho_u, \rho_\phi)$  e  $\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)$  definem as propriedades resultantes da combinação dos materiais conforme indicado nas equações acima;  $e^T(\rho_u, \rho_\phi)$ , em (109), denota  $e(\rho_u, \rho_\phi)$  transposto. As matrizes  $c_\phi^E$  e  $c_u^E$  definem as propriedades elásticas do material piezoelétrico e do material não piezoelétrico, enquanto que as matrizes  $e_\phi$  e  $\epsilon_\phi^S$  definem as propriedades piezoelétricas (ou propriedades de acoplamento eletromecânico) e dielétricas do material piezoelétrico, respectivamente. Note, analisando as equações (110), (111) e (112), que o material elástico isotrópico é obtido quando  $\rho_u = 1$  e  $\rho_\phi = 0$ , o material piezoelétrico é obtido quando  $\rho_u = \rho_\phi = 1$ , e o vazio é obtido quando  $\rho_u = \rho_\phi = 0$ . As constantes  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são expoentes de penalização.

Assim, modelou-se matematicamente o problema. Na busca por soluções, objetiva-se, portanto, obter duas respostas: a topologia ótima condizente com as restrições de suporte e de carregamento mecânicos e elétricos e a melhor localização para atuadores nesta topologia. Para este fim, considerar-se-á:

- o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  do problema (104);
- as derivadas da função objetivo e das restrições com respeito às variáveis de projeto, etapa que será feita através do Lagrangeano, e obter as equações para o problema estacionário;
- a discretização da função objetivo e das restrições;
- a implementação computacional baseada no fluxograma dado pela Figura 9, considerando a discretização feita na etapa anterior.

#### 4.2.2 Análise de sensibilidades

De forma semelhante aos procedimentos feitos para o problema da seção 4.1, as sensibilidades (derivadas) da função objetivo e das restrições com respeito às variáveis de projeto serão calculadas analiticamente nesta seção. Para este fim, considerar-se-á o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  do problema (104) de onde serão obtidas as expressões das derivadas em relação às variáveis de projeto,  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$ , bem como as equações de equilíbrio do problema por meio das variações em  $u$ ,  $\phi$ ,  $u_v$ , e  $\phi_v$ , sendo estas variáveis de estado.

O Lagrangeano  $\mathcal{L}$  para o problema tratado nesta seção é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho, \Lambda, \lambda) &= l(u, \phi) - a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi) + l(u_v, \phi_v) \\ &+ \Lambda_1 \left( \int_{\Omega} \rho_u d\Omega - \eta_u V \right) + \int_{\Omega} \lambda_1 (\rho_u - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_2 (\rho_{u_{min}} - \rho_u) d\Omega \\ &+ \Lambda_2 \left( \int_{\Omega} \rho_\phi d\Omega - \eta_\phi V \right) + \int_{\Omega} \lambda_3 (\rho_\phi - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_4 (\rho_{\phi_{min}} - \rho_\phi) d\Omega, \end{aligned} \quad (113)$$

onde  $u_v$  e  $\phi_v$  atuam como multiplicadores de Lagrange para a restrição de equilíbrio (108), cuja expressão está na forma fraca. Além disso,  $\rho$  representa as variáveis de projeto  $\rho_u \in \mathcal{B}_u$  e  $\rho_\phi \in \mathcal{B}_\phi$ , ambas funções escalares de  $x$ ,  $\Lambda$  representa os multiplicadores de Lagrange  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{R}$  e  $\lambda$  representa as funções escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in L^2(\Omega)$ . Em (113), denotar-se-á:

$$w_u(\rho_u) = \Lambda_1 \left( \int_{\Omega} \rho_u d\Omega - \eta_u V \right) + \int_{\Omega} \lambda_1 (\rho_u - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_2 (\rho_{u_{min}} - \rho_u) d\Omega \quad (114)$$

e

$$w_\phi(\rho_\phi) = \Lambda_2 \left( \int_{\Omega} \rho_\phi d\Omega - \eta_\phi V \right) + \int_{\Omega} \lambda_3 (\rho_\phi - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_4 (\rho_{\phi_{min}} - \rho_\phi) d\Omega. \quad (115)$$

A fim de obter as equações de Euler-Lagrange do problema de otimização, considera-se nos cálculos abaixo uma variável real auxiliar, denotada por  $\xi$ , e  $\alpha_\Upsilon = \{\alpha_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$  o conjunto de direções admissíveis de  $\Upsilon$ . Ademais, a versão da identidade (52) para tensores de segunda ordem será utilizada quando necessária.

#### Variação em $u$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $u$  na direção de  $\alpha_1$  é denotada por  $\delta_u \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_1)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_u \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_1) = 0, \quad (116)$$

de onde segue que

$$\delta_u l(u, \phi; \alpha_1) - \delta_u a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_1) = 0. \quad (117)$$

Note que

$$\begin{aligned}
\delta_u l(u, \phi; \alpha_1) &= \int_{\Omega} f \cdot \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \delta u d\Gamma + f_p(\delta u) \\
&= \int_{\Omega} f \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} d\Gamma \\
&\quad + f_p \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} \right) \\
&= \int_{\Omega} f \cdot \alpha_1 d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \alpha_1 d\Gamma + f_p(\alpha_1), \tag{118}
\end{aligned}$$

onde  $f_p(\alpha_1) = \sum_{j=1}^k f_{p_j}(x_j) \cdot \alpha_1(x_j)$ . Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
\delta_u a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_1) &= \int_{\Omega} S(\delta u) : c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} S(\delta u) : e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} \right) : c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} S \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} \right) : e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(\alpha_1) : c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} S(\alpha_1) : e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega. \tag{119}
\end{aligned}$$

A versão da identidade (52) para tensores de segunda ordem, aplicada na primeira integral da última igualdade do resultado anterior, leva a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} S(\alpha_1) : c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega &= \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot [c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] \cdot n d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega} \alpha_1 \cdot \nabla \cdot [c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] d\Omega, \tag{120}
\end{aligned}$$

onde  $n$  é um vetor normal à superfície  $\Gamma_t$ . Procedendo de modo análogo para a segunda integral da última igualdade do resultado encontrado em (119), obtém-se que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} S(\alpha_1) : e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega &= \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot [e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \cdot n d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega} \alpha_1 \cdot \nabla \cdot [e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] d\Omega. \tag{121}
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados de (120) e (121) na equação (119), verifica-se que

$$\begin{aligned} \delta_u a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_1) &= \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot [c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] \cdot n \, d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega} \alpha_1 \cdot \nabla \cdot [c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot [e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \cdot n \, d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega} \alpha_1 \cdot \nabla \cdot [e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \, d\Omega. \end{aligned} \quad (122)$$

Considerando os resultados de (118) e (122) em (117) e agrupando os termos, obtém-se a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \alpha_1 \cdot \{ \nabla \cdot [c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] + \nabla \cdot [e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] + f \} \, d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot \{ t - [c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) + e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \cdot n \} \, d\Gamma + f_p(\alpha_1) = 0, \end{aligned} \quad (123)$$

para todo  $\alpha_1$  admissível. Assim, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, segue que

$$\nabla \cdot [c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] + \nabla \cdot [e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] + f + \tilde{f}_p = 0, \text{ em } \Omega; \quad (124)$$

$$[c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) + e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \cdot n = t, \text{ em } \Gamma_t; \quad (125)$$

onde  $\tilde{f}_p = \sum_{j=1}^k f_{p_j} \hat{\delta}(x_j)$ , com  $\hat{\delta}(x_j)$  denotando a função delta de Dirac em  $x_j$ .

Varição em  $\phi$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $\phi$  na direção de  $\alpha_2$  é denotada por  $\delta_\phi \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_2)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_\phi \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_2) = 0, \quad (126)$$

de onde segue que

$$\delta_\phi l(u, \phi; \alpha_2) - \delta_\phi a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_2) = 0. \quad (127)$$

Note que

$$\begin{aligned}
\delta_\phi l(u, \phi; \alpha_2) &= - \int_{\Gamma_\phi} f_\phi \delta\phi d\Gamma - q_p(\delta\phi) \\
&= - \int_{\Gamma_\phi} f_\phi \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\phi + \xi \alpha_2) \right]_{\xi=0} d\Omega - q_p \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\phi + \xi \alpha_2) \right]_{\xi=0} \right) \\
&= - \int_{\Gamma_\phi} f_\phi \alpha_2 d\Omega - q_p(\alpha_2), \tag{128}
\end{aligned}$$

onde  $q_p(\alpha_2) = \sum_{l=1}^m q_{pl}(x_l) \alpha_2(x_l)$ . Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
\delta_\phi a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_2) &= \int_{\Omega} E(\delta\phi) \cdot e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} E(\delta\phi) \cdot \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} E \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\phi + \xi \alpha_2) \right]_{\xi=0} \right) \cdot e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} E \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\phi + \xi \alpha_2) \right]_{\xi=0} \right) \cdot \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} E(\alpha_2) \cdot e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} E(\alpha_2) \cdot \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega. \tag{129}
\end{aligned}$$

Por meio da versão da identidade (52) para tensores de segunda ordem, aplicada nas duas últimas integrais do resultado anterior, obtém-se que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} E(\alpha_2) \cdot e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega &= \int_{\Gamma_\phi} \alpha_2 [e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] \cdot n d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega} \alpha_2 \nabla \cdot [e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] d\Omega \tag{130}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} E(\alpha_2) \cdot \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega &= \int_{\Gamma_\phi} \alpha_2 [\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \cdot n d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega} \alpha_2 \nabla \cdot [\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] d\Omega. \tag{131}
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados encontrados em (130) e (131) na equação (129), tem-se

que

$$\begin{aligned}
\delta_\phi a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_2) &= \int_{\Gamma_\phi} \alpha_2 [e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] \cdot n \, d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega} \alpha_2 \nabla \cdot [e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] \, d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma_\phi} \alpha_2 [\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \cdot n \, d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Omega} \alpha_2 \nabla \cdot [\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \, d\Omega. \tag{132}
\end{aligned}$$

Considerando os resultados de (128) e (132) em (127) e agrupando os termos, obtém-se a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \alpha_2 \{ \nabla \cdot [e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] - \nabla \cdot [\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \} \, d\Omega \\
&- \int_{\Gamma_\phi} \alpha_2 \{ f_\phi + [e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) - \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \cdot n \} \, d\Gamma - q_p(\alpha_2) = 0, \tag{133}
\end{aligned}$$

para todo  $\alpha_2$  admissível. Assim, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, segue que

$$\nabla \cdot [e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v)] - \nabla \cdot [\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] = 0, \quad \text{em } \Omega; \tag{134}$$

$$[e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) - \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v)] \cdot n + f_\phi - \tilde{q}_p = 0, \quad \text{em } \Gamma_\phi; \tag{135}$$

onde  $\tilde{q}_p = \sum_{l=1}^m q_{pl} \hat{\delta}(x_l)$ .

Variação em  $u_v$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $u_v$  na direção de  $\alpha_3$  é denotada por  $\delta_{u_v} \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_3)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_{u_v} \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_3) = 0, \tag{136}$$

de onde segue que

$$\delta_{u_v} l(u_v, \phi_v; \alpha_3) - \delta_{u_v} a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_3) = 0. \tag{137}$$

Os cálculos para esta variação são análogos aos cálculos da variação em  $u$  e por

isso são omitidos neste texto. As equações de Euler-Lagrange obtidas são tais que

$$\nabla \cdot [S(u) : c^E(\rho_u, \rho_\phi)] + \nabla \cdot [E(\phi) \cdot e(\rho_u, \rho_\phi)] + f + \tilde{f}_p = 0, \text{ em } \Omega; \quad (138)$$

$$[S(u) : c^E(\rho_u, \rho_\phi) + E(\phi) \cdot e(\rho_u, \rho_\phi)] \cdot n = t, \text{ em } \Gamma_t. \quad (139)$$

Varição em  $\phi_v$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $\phi_v$  na direção de  $\alpha_4$  é denotada por  $\delta_{\phi_v} \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_4)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_{\phi_v} \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_4) = 0, \quad (140)$$

de onde segue que

$$\delta_{\phi_v} l(u_v, \phi_v; \alpha_4) - \delta_{\phi_v} a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_4) = 0. \quad (141)$$

Os cálculos para esta variação são análogos aos cálculos da variação em  $\phi$  e por isso são omitidos neste texto. As equações de Euler-Lagrange obtidas são tais que

$$\nabla \cdot [S(u) : e^T(\rho_u, \rho_\phi)] - \nabla \cdot [E(\phi) \cdot \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)] = 0, \text{ em } \Omega; \quad (142)$$

$$[S(u) : e^T(\rho_u, \rho_\phi) - E(\phi) \cdot \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)] \cdot n + f_\phi - \tilde{q}_p = 0, \text{ em } \Gamma_\phi. \quad (143)$$

Note que, a partir das equações (124), (125), (134), (135), (138), (139), (142) e (143), e em virtude da simetria do problema, tem-se que

$$u = u_v \quad \text{e} \quad \phi = \phi_v, \text{ em } \Omega. \quad (144)$$

Estes resultados serão utilizados nas variações em relação às variáveis de projeto  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$ , desenvolvidas na sequência.

Varição em  $\rho_u$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $\rho_u$  na direção de  $\alpha_5$  é denotada por  $\delta_{\rho_u} \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_5)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_{\rho_u} \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_5) = 0, \quad (145)$$

de onde segue que

$$-\delta_{\rho_u} a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_5) + \delta_{\rho_u} w_u(\rho_u; \alpha_5) = 0. \quad (146)$$

Note que

$$\begin{aligned}
\delta_{\rho_u} a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_5) &= \int_{\Omega} S(u) : \delta_{\rho_u}(c^E(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_5) : S(u_v) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} S(u) : \delta_{\rho_u}(e^T(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_5) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} E(\phi) \cdot \delta_{\rho_u}(e(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_5) : S(u_v) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} E(\phi) \cdot \delta_{\rho_u}(\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_5) \cdot E(\phi_v) d\Omega. \quad (147)
\end{aligned}$$

Cada uma das integrais do membro direito da equação (147) será calculada individualmente abaixo, considerando o modelo material dado pelas equações (110)-(112).

Inicialmente, veja que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} S(u) : \delta_{\rho_u}(c^E(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_5) : S(u_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(u) : \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\rho_u + \xi \alpha_5)^{p_1} (\rho_\phi^{p_2} c_\phi^E + (1 - \rho_\phi^{p_2}) c_u^E) \right] \right)_{\xi=0} : S(u_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(u) : [\alpha_5 p_1 \rho_u^{p_1-1} (\rho_\phi^{p_2} c_\phi^E + (1 - \rho_\phi^{p_2}) c_u^E)] : S(u_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \alpha_5 S(u) : \frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} : S(u_v) d\Omega. \quad (148)
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} S(u) : \delta_{\rho_u}(e^T(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_5) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(u) : \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\rho_u + \xi \alpha_5)^{p_1} \rho_\phi^{p_3} e_\phi^T \right] \right)_{\xi=0} \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(u) : [\alpha_5 p_1 \rho_u^{p_1-1} \rho_\phi^{p_3} e_\phi^T] \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \alpha_5 S(u) : \frac{\partial e^T(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} \cdot E(\phi_v) d\Omega, \quad (149)
\end{aligned}$$

onde  $e_\phi^T$  é  $e_\phi$  transposto. De forma análoga, obtém-se que

$$\int_{\Omega} E(\phi) \cdot \delta_{\rho_u}(e(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_5) : S(u_v) d\Omega = \int_{\Omega} \alpha_5 E(\phi) \cdot \frac{\partial e(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} : S(u_v) d\Omega. \quad (150)$$

Finalmente, tem-se que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} E(\phi) \cdot \delta_{\rho_u}(\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_5) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} E(\phi) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\rho_u + \xi \alpha_5)^{p_1} \rho_\phi^{p_3} \epsilon_\phi^S \right]_{\xi=0} \right) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} E(\phi) \cdot [\alpha_5 p_1 \rho_u^{p_1-1} \rho_\phi^{p_3} \epsilon_\phi^S] \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \alpha_5 E(\phi) \cdot \frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} \cdot E(\phi_v) d\Omega. \tag{151}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\delta_{\rho_u} a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_5) &= \int_{\Omega} \alpha_5 S(u) : \frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} : S(u_v) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \alpha_5 S(u) : \frac{\partial e^T(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \alpha_5 E(\phi) \cdot \frac{\partial e(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} : S(u_v) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \alpha_5 E(\phi) \cdot \frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} \cdot E(\phi_v) d\Omega. \tag{152}
\end{aligned}$$

A variação  $\delta_{\rho_u} w_u(\rho_u; \alpha_5)$  é feita de forma análoga ao cálculo de  $\delta_{\rho_1} w_1(\rho_1; \alpha_3)$  do problema anterior (veja a equação (67) na seção 4.1.2) e resulta em

$$\delta_{\rho_u} w_u(\rho_u; \alpha_5) = \Lambda_1 \int_{\Omega} \alpha_5 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_1 \alpha_5 d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_2 \alpha_5 d\Omega. \tag{153}$$

Considerando os resultados (152) e (153) na equação (146) e que  $u = u_v$  e  $\phi = \phi_v$ , segue que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \alpha_5 \left[ -S(u) : \frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} : S(u) - S(u) : \frac{\partial e^T(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} \cdot E(\phi) \right. \\
& \left. - E(\phi) \cdot \frac{\partial e(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} : S(u) + E(\phi) \cdot \frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} \cdot E(\phi) + \Lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 \right] d\Omega = 0, \tag{154}
\end{aligned}$$

para todo  $\alpha_5$  admissível. Assim, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, tem-

se que

$$\begin{aligned}
& -S(u) : \frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} : S(u) - S(u) : \frac{\partial e^T(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} \cdot E(\phi) \\
& -E(\phi) \cdot \frac{\partial e(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} : S(u) + E(\phi) \cdot \frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} \cdot E(\phi) + \Lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0,
\end{aligned} \tag{155}$$

em  $\Omega$ .

Note, contudo, que valem as seguintes condições para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (conforme discutido na seção 3.5):

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1(\rho_u - 1) = 0, \quad \lambda_2(\rho_{u_{min}} - \rho_u) = 0, \tag{156}$$

o que indica que, para densidades intermediárias ( $\rho_{u_{min}} < \rho_u < 1$ ), tem-se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Assim, a equação (155) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
& S(u) : \frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} : S(u) + S(u) : \frac{\partial e^T(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} \cdot E(\phi) \\
& + E(\phi) \cdot \frac{\partial e(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} : S(u) - E(\phi) \cdot \frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} \cdot E(\phi) = \Lambda_1,
\end{aligned} \tag{157}$$

em  $\Omega$ , onde

$$\frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} = p_1 \rho_u^{p_1-1} (\rho_\phi^{p_2} c_\phi^E + (1 - \rho_\phi^{p_2}) c_u^E), \tag{158}$$

$$\frac{\partial e(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} = p_1 \rho_u^{p_1-1} \rho_\phi^{p_3} e_\phi, \tag{159}$$

$$\frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_u} = p_1 \rho_u^{p_1-1} \rho_\phi^{p_3} \epsilon_\phi^S. \tag{160}$$

Varição em  $\rho_\phi$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $\rho_\phi$  na direção de  $\alpha_6$  é denotada por  $\delta_{\rho_\phi} \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_6)$ . Considere, então, a igualdade

$$\delta_{\rho_\phi} \mathcal{L}(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_6) = 0, \tag{161}$$

de onde segue que

$$-\delta_{\rho_\phi} a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_6) + \delta_{\rho_\phi} w_\phi(\rho_\phi; \alpha_6) = 0. \tag{162}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\delta_{\rho_\phi} a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi; \alpha_6) &= \int_{\Omega} S(u) : \delta_{\rho_\phi}(c^E(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_6) : S(u_v) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} S(u) : \delta_{\rho_\phi}(e^T(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_6) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} E(\phi) \cdot \delta_{\rho_\phi}(e(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_6) : S(u_v) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} E(\phi) \cdot \delta_{\rho_\phi}(\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_6) \cdot E(\phi_v) d\Omega. \quad (163)
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado para os cálculos feitos quando da variação em relação à variável  $\rho_u$ , cada uma das integrais acima será calculada, individualmente, na sequência.

Inicialmente, veja que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} S(u) : \delta_{\rho_\phi}(c^E(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_6) : S(u_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(u) : \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \rho_u^{p_1} ((\rho_\phi + \xi \alpha_6)^{p_2} c_\phi^E - (\rho_\phi + \xi \alpha_6)^{p_2} c_u^E) \right]_{\xi=0} \right) : S(u_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(u) : [\rho_u^{p_1} (\alpha_6 p_2 \rho_\phi^{p_2-1} c_\phi^E - \alpha_6 p_2 \rho_\phi^{p_2-1} c_u^E)] : S(u_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(u) : [\alpha_6 p_2 \rho_u^{p_1} \rho_\phi^{p_2-1} (c_\phi^E - c_u^E)] : S(u_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \alpha_6 S(u) : \frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} : S(u_v) d\Omega. \quad (164)
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} S(u) : \delta_{\rho_\phi}(e^T(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_6) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(u) : \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \rho_u^{p_1} (\rho_\phi + \xi \alpha_6)^{p_3} e_\phi^T \right]_{\xi=0} \right) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(u) : [\alpha_6 p_3 \rho_u^{p_1} \rho_\phi^{p_3-1} e_\phi^T] \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \alpha_6 S(u) : \frac{\partial e^T(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} \cdot E(\phi_v) d\Omega, \quad (165)
\end{aligned}$$

e, de forma análoga, obtém-se que

$$\int_{\Omega} E(\phi) \cdot \delta_{\rho_\phi}(e(\rho_u, \rho_\phi); \alpha_6) : S(u_v) d\Omega = \int_{\Omega} \alpha_6 E(\phi) \cdot \frac{\partial e(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} : S(u_v) d\Omega. \quad (166)$$

Finalmente, tem-se que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} E(\phi) \cdot \delta_{\rho_{\phi}}(\epsilon^S(\rho_u, \rho_{\phi}); \alpha_6) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} E(\phi) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \rho_u^{p_1} (\rho_{\phi} + \xi \alpha_6)^{p_3} \epsilon_{\phi}^S \right]_{\xi=0} \right) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} E(\phi) \cdot [\alpha_6 p_3 \rho_u^{p_1} \rho_{\phi}^{p_3-1} \epsilon_{\phi}^S] \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \alpha_6 E(\phi) \cdot \frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_{\phi})}{\partial \rho_{\phi}} \cdot E(\phi_v) d\Omega. \tag{167}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\delta_{\rho_{\phi}} a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_{\phi}; \alpha_6) &= \int_{\Omega} \alpha_6 S(u) : \frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_{\phi})}{\partial \rho_{\phi}} : S(u_v) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \alpha_6 S(u) : \frac{\partial e^T(\rho_u, \rho_{\phi})}{\partial \rho_{\phi}} \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \alpha_6 E(\phi) \cdot \frac{\partial e(\rho_u, \rho_{\phi})}{\partial \rho_{\phi}} : S(u_v) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \alpha_6 E(\phi) \cdot \frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_{\phi})}{\partial \rho_{\phi}} \cdot E(\phi_v) d\Omega. \tag{168}
\end{aligned}$$

A variação  $\delta_{\rho_{\phi}} w_{\phi}(\rho_{\phi}; \alpha_6)$  é feita de forma análoga ao cálculo de  $\delta_{\rho_2} w_2(\rho_2; \alpha_4)$  do problema anterior (veja a equação (76) na seção 4.1.2) e resulta em

$$\delta_{\rho_{\phi}} w_{\phi}(\rho_{\phi}; \alpha_6) = \Lambda_2 \int_{\Omega} \alpha_6 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_3 \alpha_6 d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_4 \alpha_6 d\Omega. \tag{169}$$

Considerando os resultados (168) e (169) na equação (162) e que  $u = u_v$  e  $\phi = \phi_v$ , segue que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \alpha_6 \left[ -S(u) : \frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_{\phi})}{\partial \rho_{\phi}} : S(u) - S(u) : \frac{\partial e^T(\rho_u, \rho_{\phi})}{\partial \rho_{\phi}} \cdot E(\phi) \right. \\
& \left. - E(\phi) \cdot \frac{\partial e(\rho_u, \rho_{\phi})}{\partial \rho_{\phi}} : S(u) + E(\phi) \cdot \frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_{\phi})}{\partial \rho_{\phi}} \cdot E(\phi) + \Lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \right] d\Omega = 0, \tag{170}
\end{aligned}$$

para todo  $\alpha_6$  admissível. Disto e do Lema Fundamental do Cálculo de Variações,

tem-se que

$$\begin{aligned} -S(u) : \frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} : S(u) - S(u) : \frac{\partial e^T(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} \cdot E(\phi) \\ -E(\phi) \cdot \frac{\partial e(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} : S(u) + E(\phi) \cdot \frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} \cdot E(\phi) + \Lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \end{aligned} \quad (171)$$

em  $\Omega$ .

Das seguintes condições para  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  (conforme discutido na seção 3.5),

$$\lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_4 \geq 0, \quad \lambda_3(\rho_\phi - 1) = 0, \quad \lambda_4(\rho_{\phi_{min}} - \rho_\phi) = 0, \quad (172)$$

tem-se, para densidades intermediárias ( $\rho_{\phi_{min}} < \rho_\phi < 1$ ), que  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Assim, a equação (171) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S(u) : \frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} : S(u) + S(u) : \frac{\partial e^T(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} \cdot E(\phi) \\ + E(\phi) \cdot \frac{\partial e(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} : S(u) - E(\phi) \cdot \frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} \cdot E(\phi) = \Lambda_2, \end{aligned} \quad (173)$$

em  $\Omega$ , onde

$$\frac{\partial c^E(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} = p_2 \rho_u^{p_1} \rho_\phi^{p_2-1} (c_\phi^E - c_u^E), \quad (174)$$

$$\frac{\partial e(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} = p_3 \rho_u^{p_1} \rho_\phi^{p_3-1} e_\phi, \quad (175)$$

$$\frac{\partial \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)}{\partial \rho_\phi} = p_3 \rho_u^{p_1} \rho_\phi^{p_3-1} \epsilon_\phi^S. \quad (176)$$

A análise de sensibilidades está completa.

As variações do Lagrangeano com respeito às variáveis de estado resultaram nas equações de equilíbrio do problema - as equações (124), (125), (134) e (135), com  $u = u_v$  e  $\phi = \phi_v$ . As equações (157) e (173), obtidas pelas variações do Lagrangeano com respeito às variáveis de projeto, são fundamentais para a atualização das densidades dos elementos finitos a cada iteração do algoritmo de otimização topológica e por isso serão utilizadas na forma discretizada.

### 4.2.3 Formulação variacional para problemas piezoelétricos

Nesta seção, uma formulação variacional para um corpo piezoelétrico é apresentada e o Princípio de Hamilton é aplicado a fim de obter uma expressão variacional para o problema que se deseja resolver. Para tanto, utilizar-se-á as já conhecidas equações constitutivas do efeito piezoelétrico dadas por (7) e (8).

A densidade de energia potencial de um material piezoelétrico inclui contribuições da densidade de energia de deformação e da densidade de energia eletrostática, ou seja, contribuições provenientes dos deslocamentos mecânicos e dos potenciais elétricos (TIERSTEN, 1967). Segundo o Princípio de Hamilton, os deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos que realmente ocorrem no problema são aqueles que satisfazem a equação:

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{L}_H + \mathcal{W}) dt = 0, \quad (177)$$

onde  $t_0$  e  $t_f$  definem o intervalo de tempo,  $\mathcal{L}_H$  é o Lagrangeano e  $\mathcal{W}$  é o trabalho virtual das forças mecânicas externas e cargas elétricas aplicadas (PIEFORT, 2001).

O Lagrangeano é dado, conforme Piefort (2001), por

$$\mathcal{L}_H = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \bar{\rho} \dot{u}^T \dot{u} - \mathcal{H} \right) d\Omega, \quad (178)$$

onde  $\mathcal{H}$  é a entalpia elétrica,  $u$  o vetor de deslocamentos mecânicos e  $\dot{u} = \partial u / \partial t$ . Contudo, considera-se neste trabalho um problema piezoelétrico estático, ou seja, os deslocamentos  $u$  não dependem do tempo  $t$ . Sendo assim, a equação (178) assume a forma

$$\mathcal{L}_H = \int_{\Omega} (-\mathcal{H}) d\Omega. \quad (179)$$

A entalpia elétrica  $\mathcal{H}$  é dada por

$$\mathcal{H} = \mathcal{P} - E \cdot D, \quad (180)$$

onde  $\mathcal{P}$  denota a energia potencial do sistema e é dada na forma

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} S : T + \frac{1}{2} E \cdot D. \quad (181)$$

Substituindo a equação (181) na equação (180) e esta última na forma do Lagrangeano (179), obtém-se

$$\mathcal{L}_H = \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} S : T + \frac{1}{2} E \cdot D \right) d\Omega, \quad (182)$$

de onde segue, pela substituição das equações (7) e (8), que

$$\mathcal{L}_H = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (-S : c^E : S + S : e^T \cdot E + E \cdot e : S + E \cdot \epsilon^S \cdot E) d\Omega. \quad (183)$$

Obtida a expressão para o Lagrangeano  $\mathcal{L}_H$ , falta expressar o trabalho virtual  $\mathcal{W}$  devido às forças mecânicas externas e às cargas elétricas aplicadas. Esta medida é dada por

$$\mathcal{W} = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_\phi} f_\phi \phi d\Gamma + f_p(u) - q_p(\phi). \quad (184)$$

Substituindo as equações (183) e (184) no Princípio de Hamilton (177), obtém-se

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_f} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( -S : c^E : S + S : e^T \cdot E + E \cdot e : S + E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(u) - q_p(\phi) \right) dt = 0, \end{aligned} \quad (185)$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( -S : c^E : S + S : e^T \cdot E + E \cdot e : S + E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \\ + \delta \left( \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(u) - q_p(\phi) \right) = 0. \end{aligned} \quad (186)$$

Note que

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( -S : c^E : S + S : e^T \cdot E + E \cdot e : S + E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( -\delta S : c^E : S - S : c^E : \delta S + \delta S : e^T \cdot E + S : e^T \cdot \delta E + \delta E \cdot e : S \right. \\ \left. + E \cdot e : \delta S + \delta E \cdot \epsilon^S \cdot E + E \cdot \epsilon^S \cdot \delta E \right) d\Omega \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( -2\delta S : c^E : S + 2\delta S : e^T \cdot E + 2\delta E \cdot e : S + 2\delta E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \\ = \int_{\Omega} \left( -\delta S : c^E : S + \delta S : e^T \cdot E + \delta E \cdot e : S + \delta E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \end{aligned} \quad (187)$$

e também que

$$\begin{aligned} \delta \left( \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(u) - q_p(\phi) \right) \\ = \int_{\Omega} \delta f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} \delta f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(\delta u) - q_p(\delta \phi). \end{aligned} \quad (188)$$

Assim, substituindo os resultados de (187) e (188) em (186), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( -\delta S : c^E : S + \delta S : e^T \cdot E + \delta E \cdot e : S + \delta E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \\ + \int_{\Omega} \delta f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} \delta f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(\delta u) - q_p(\delta \phi) = 0. \end{aligned} \quad (189)$$

#### 4.2.4 Discretização do problema de otimização via MEF

A fundamentação teórica para a discretização do problema simultâneo de otimização e localização de atuadores piezoelétricos é idêntica àquela apresentada para o problema da seção 4.1. Em virtude disto, comentários teóricos e introdutórios quanto ao MEF serão omitidos nesta seção. Além disso, algumas equações utilizadas para o problema abordado nesta seção já foram desenvolvidas na discretização do problema simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores proporcionais e, por isso, serão apenas indicadas no texto abaixo.

Na discretização a ser desenvolvida, assume-se a hipótese do estado plano de tensões mecânicas, permitindo o tratamento bidimensional do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos, e considera-se o elemento isoparamétrico bilinear, também chamado de elemento Q4.

O deslocamento  $\mathbf{u}^e$  e o potencial elétrico  $\phi^e$ , para cada elemento finito  $\Omega^e$ , é aproximado pelos deslocamentos e potenciais nodais,  $\mathbf{u}_i^e$  e  $\phi_i^e$ , e por funções de interpolação. A discretização para a parte mecânica já foi apresentada na seção 4.1.3 (veja as equações (82)-(89)) de modo que serão desenvolvidas nesta seção as discretizações para o potencial e campo elétrico.

O potencial elétrico de um elemento finito é tal que

$$\phi^e = \sum_{i=1}^4 N_i \phi_i^e = \mathbf{N}_\phi \phi_i^e, \quad (190)$$

onde  $\phi_i^e$  representa o vetor de potenciais elétricos nodais de um elemento finito dado por

$$\phi_i^e = \left[ \phi_1^e \quad \phi_2^e \quad \phi_3^e \quad \phi_4^e \right]^T. \quad (191)$$

Além disso,

$$\mathbf{N}_\phi = \left[ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \right] \quad (192)$$

é a matriz das funções de interpolação para os potenciais elétricos com as funções de forma dadas por (87).

O campo elétrico  $\mathbf{E}^e$ , para cada elemento finito, pode ser escrito em função dos potenciais elétricos e das derivadas das funções de interpolação para os potenciais elétricos na forma

$$\mathbf{E}^e = -\mathcal{D}_\phi \mathbf{N}_\phi \phi_i^e = -\mathbf{B}_\phi \phi_i^e, \quad (193)$$

onde  $\mathcal{D}_\phi$  é um operador diferencial tal que

$$\mathbf{B}_\phi = \mathcal{D}_\phi \mathbf{N}_\phi = \left[ \begin{array}{c} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \end{array} \right] \mathbf{N}_\phi. \quad (194)$$

Para obter a equação matricial referente ao problema de otimização, considera-

se as equações (83), (88), (190) e (193) na equação (189), obtida pelo Princípio de Hamilton na formulação variacional do problema. Sendo assim, tem-se que

$$\begin{aligned}
& -\delta \mathbf{u}_i^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^E \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e - \delta \mathbf{u}_i^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi_i^e - \delta \phi_i^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T e \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e \\
& + \delta \phi_i^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi_i^e + \delta \mathbf{u}_i^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e + \delta \mathbf{u}_i^{eT} \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e + \delta \mathbf{u}_i^{eT} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_p^e \\
& - \delta \phi_i^{eT} \int_{\Gamma_\phi^e} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{f}_\phi^e d\Gamma^e - \delta \phi_i^{eT} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{q}_p^e = 0,
\end{aligned} \tag{195}$$

onde  $\mathbf{f}_p^e$ ,  $\mathbf{f}_\phi^e$  e  $\mathbf{q}_p^e$  são os vetores de forças concentradas, de cargas elétricas de superfície e de cargas elétricas concentradas de um elemento finito, respectivamente.

Desta última igualdade, tem-se que

$$\begin{aligned}
& -\delta \mathbf{u}_i^{eT} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^E \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi_i^e \right. \\
& \quad \left. - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e - \mathbf{N}_u^{eT} \mathbf{f}_p^e \right] \\
& - \delta \phi_i^{eT} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T e \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi_i^e + \int_{\Gamma_\phi^e} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{f}_\phi^e d\Gamma^e + \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{q}_p^e \right] = 0,
\end{aligned} \tag{196}$$

de onde segue que

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^E \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi_i^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e + \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e + \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_p^e, \tag{197}$$

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T e \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}_i^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi_i^e = - \int_{\Gamma_\phi^e} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{f}_\phi^e d\Gamma^e - \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{q}_p^e. \tag{198}$$

As equações (197) e (198) podem ser escritas na forma do sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^e & \mathbf{K}_{u\phi}^e \\ \mathbf{K}_{\phi u}^e & -\mathbf{K}_{\phi\phi}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^e \\ \phi_i^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^e \\ \mathbf{Q}_\phi^e \end{bmatrix}, \tag{199}$$

onde

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^E \mathbf{B}_u d\Omega^e, \tag{200}$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e, \tag{201}$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e, \tag{202}$$

são, respectivamente, as matrizes de rigidez, de acoplamento piezoelétrico e de ca-

pacitância elétrica de um elemento finito, de modo que

$$\mathbf{K}_{\phi u}^e = \mathbf{K}_{u\phi}^{eT}. \quad (203)$$

O vetor de forças e o vetor de cargas elétricas de um elemento finito são dados por

$$\mathbf{F}_u^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e + \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e + \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_p^e \quad (204)$$

e

$$\mathbf{Q}_\phi^e = - \int_{\Gamma_\phi^e} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{f}_\phi^e d\Gamma^e - \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{q}_p^e. \quad (205)$$

Na malha de elementos finitos, cada elemento é conectado aos seus elementos vizinhos por meio dos nós de modo que os deslocamentos mecânicos e os potenciais elétricos são contínuos de um elemento para outro. Sendo assim, o Princípio de Hamilton deve ser verificado para a estrutura completa através das matrizes globais obtidas a partir da contribuição de cada elemento da malha (BECKER; CAREY; ODEN, 1981; COOK; MALKUS; PLESHA, 1989). O sistema matricial global é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{Q}_\phi \end{bmatrix}, \quad (206)$$

onde  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{u\phi}$ ,  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  são as matrizes globais de rigidez, de acomplamento piezoelétrico e de capacitância elétrica;  $\mathbf{K}_{\phi u}$  é a matriz  $\mathbf{K}_{u\phi}$  transposta;  $\mathbf{U}$  é a deflexão global;  $\phi$  é vetor global de potenciais elétricos;  $\mathbf{F}_u$  é o vetor global de forças e  $\mathbf{Q}_\phi$  é o vetor global de cargas elétricas.

A formulação por elementos finitos está completa e pode-se, finalmente, escrever o problema (104) na sua forma final discretizada. Note que no membro esquerdo da equação (206), quando ambos os membros são pré-multiplicados por  $\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \phi \end{bmatrix}^T$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{Q}_\phi \end{bmatrix}, \quad (207)$$

aparece a forma fraca (em notação matricial) do funcional de custo do problema discretizado. Assim, o problema discretizado, para  $N$  elementos finitos, é dado por

$$\begin{aligned}
\text{est} \quad & J(u, \phi, \rho_u, \rho_\phi) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\phi} \phi + \phi^T \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} - \phi^T \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi \\
\text{s. a :} \quad & \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} = \mathbf{F}_u \\
& \mathbf{K}_{u\phi} \phi - \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi = \mathbf{Q}_\phi \\
& \sum_{e=1}^N \rho_{u_e} V^e = \eta_u V \\
& \sum_{e=1}^N \rho_{\phi_e} V^e = \eta_\phi V \\
& 0 < \rho_{u_{e_{min}}} \leq \rho_{u_e} \leq 1 \\
& 0 < \rho_{\phi_{e_{min}}} \leq \rho_{\phi_e} \leq 1 \\
& e = 1, 2, 3, \dots, N.
\end{aligned} \tag{208}$$

Conforme comentado na seção 4.2.2, as derivadas do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito às variáveis de projeto  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$  são necessárias para obter a condição estacionária do problema de otimização, o que é utilizado para a geração da topologia ótima a cada iteração feita pelo processamento do código computacional. Neste código, estas derivadas (cujas expressões na forma contínua são dadas pelas equações (157) e (173)) devem ser consideradas nas suas formas discretizadas, dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \rho_u} = & - \sum_{e=1}^N p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} \left( (\rho_{\phi_e})^{p_2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{u\phi u}^e \mathbf{u}^e + (1 - (\rho_{\phi_e})^{p_2}) \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{uuu}^e \mathbf{u}^e \right) \\
& - \sum_{e=1}^N p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{u\phi}^e \phi^e - \sum_{e=1}^N p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \phi^{eT} \mathbf{K}_{\phi u}^e \mathbf{u}^e \\
& + \sum_{e=1}^N p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \phi^{eT} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \phi^e
\end{aligned} \tag{209}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \rho_\phi} = & - \sum_{e=1}^N p_2 (\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_2-1} \left( \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{u\phi u}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{uuu}^e \mathbf{u}^e \right) \\
& - \sum_{e=1}^N p_3 (\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{u\phi}^e \phi^e - \sum_{e=1}^N p_3 (\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \phi^{eT} \mathbf{K}_{\phi u}^e \mathbf{u}^e \\
& + \sum_{e=1}^N p_3 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \phi^{eT} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \phi^e,
\end{aligned} \tag{210}$$

onde  $\rho_{u_e}$  e  $\rho_{\phi_e}$  representam as densidades  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$  de um elemento finito e

$$\mathbf{k}_{uuu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c_u^E \mathbf{B}_u d\Omega^e \quad (211)$$

e

$$\mathbf{k}_{u\phi u}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c_\phi^E \mathbf{B}_u d\Omega^e \quad (212)$$

representam, respectivamente, as matrizes de rigidez do material elástico e piezoelétrico de um elemento finito.

#### 4.2.5 Simulações e resultados

Esta seção apresenta as simulações e os resultados para o problema (104) cuja forma discretizada está apresentada em (208). A metodologia proposta foi codificada no *software* Matlab<sup>®</sup> e é baseada em Sigmund (2001).

Três casos são apresentados para verificar o desempenho da proposta de projeto simultâneo descrita neste trabalho. Uma viga de  $1m$  de comprimento (no eixo  $x_1$ ) por  $0,4m$  de largura (no eixo  $x_2$ ), cuja discretização resultou em uma malha de 1440 ( $60 \times 24$ ) elementos finitos bilineares, é considerada para todos os casos que, por sua vez, se diferenciam quanto aos suportes e carregamentos. Cada elemento finito isoparamétrico tem quatro nós, dois graus de liberdade mecânicos e um grau de liberdade elétrico por nó.

Para este problema, considera-se dois materiais específicos: o alumínio, material considerado elástico e isotrópico que está relacionado à variável de projeto  $\rho_u$  e a cerâmica PZT5A como material piezoelétrico, relacionado à variável de projeto  $\rho_\phi$ . As propriedades materiais do alumínio e do PZT5A (SILVEIRA; FONSECA; SANTOS, 2014) são apresentadas nas Tabelas 2 e 3, respectivamente.

O projeto mecânico busca a otimização estrutural e a localização ótima para atuadores através da minimização da flexibilidade e da energia de controle do sistema. A otimização é feita por meio da distribuição ótima dos materiais elástico isotrópico e piezoelétrico de modo que é a variável de projeto estrutural  $\rho_u$  que define a localização do material não piezoelétrico ou vazio, e a variável referente ao material piezoelétrico, considerado como um atuador, é  $\rho_\phi$ . A distribuição do material piezoelétrico está representada pela cor vermelha nas respostas gráficas das simulações feitas.

Para gerar uma diferença de potencial elétrico ao longo da viga, nos casos 5 e 6, o campo de potencial elétrico na última coluna de elementos da malha foi considerado igual ao valor do potencial elétrico do último elemento desta coluna e o campo de potencial elétrico para a primeira coluna de elementos foi tomado nulo, ou seja, a primeira coluna de elementos foi considerada como aterrada. Já para o caso 7, o campo de potencial elétrico na coluna central de elementos da malha foi considerado

igual ao valor do potencial elétrico do último elemento desta coluna enquanto que o campo de potencial elétrico para a primeira e a última coluna de elementos da malha foi tomado nulo.

Para todos os casos, manteve-se os mesmos parâmetros de otimização: o raio de filtragem para o filtro de sensibilidades é  $r_{min} = 1,2mm$  e os expoentes de penalização do modelo material são tais que  $p_1 = p_2 = p_3 = 3$ .

Diferentemente da otimização feita para o problema que considerou atuadores proporcionais, a atualização das variáveis de projeto  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$  é feita por meio de PLS. Deste modo, esse procedimento substituirá o método OC padrão. O método PLS será descrito e comentado na sequência.

Tabela 3: Propriedades materiais do PZT5A.

PZT5A	
Constantes elásticas	$(10^{10} N/m^2)$
$c_{11}^E$	12, 1
$c_{12}^E$	7, 54
$c_{13}^E$	7, 52
$c_{33}^E$	11, 1
$c_{44}^E$	2, 11
$c_{66}^E$	2, 26
Constantes piezoelétricas	$(C/m^2)$
$e_{31}$	-5, 4
$e_{33}$	15, 8
$e_{51}$	12, 3
Constantes dielétricas	$(F/m)$
$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12}$
$\epsilon_{11}/\epsilon_0$	916
$\epsilon_{33}/\epsilon_0$	830
Densidade	$7750 kg/m^3$

**Programação linear sequencial.** No método PLS, todas as funções são linearmente expandidas. As funções não lineares podem ser linearizadas via séries de Taylor (VENKATARAMAN, 2009). Sendo assim, se  $\rho \in \mathbb{R}^N$  é considerado o vetor de projeto, então a função  $f(\rho) \in \mathbb{R}$  pode ser expandida na vizinhança de  $\rho^*$  de modo que

$$f(\rho) = f(\rho^*) + \nabla f(\rho^*) \cdot (\rho - \rho^*)^T + \mathcal{R}, \quad (213)$$

onde  $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$ ,  $\rho^* = \{\rho_1^*, \rho_2^*, \dots, \rho_N^*\}$ ,  $\nabla f$  é o vetor gradiente de  $f$  e  $\mathcal{R}$  é

o resíduo. Note que, por se tratar de um algoritmo que resolve apenas problemas lineares ou linearizados, a série de Taylor é truncada após os termos lineares.

O problema de otimização para a função  $f(\boldsymbol{\rho})$ , considerando restrições de igualdade  $h(\boldsymbol{\rho}) = 0$  e de desigualdade  $g(\boldsymbol{\rho}) \leq 0$ , é escrito na forma

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(\boldsymbol{\rho}) = f(\boldsymbol{\rho}^*) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^*) \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \Big|_{\boldsymbol{\rho}^*}, \\
 \text{s. a:} \quad & g(\boldsymbol{\rho}) = g(\boldsymbol{\rho}^*) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^*) \frac{\partial g}{\partial \rho_i} \Big|_{\boldsymbol{\rho}^*} \leq 0, \\
 & h(\boldsymbol{\rho}) = h(\boldsymbol{\rho}^*) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^*) \frac{\partial h}{\partial \rho_i} \Big|_{\boldsymbol{\rho}^*} = 0, \\
 & \rho_i^L \leq \rho_i \leq \rho_i^U, \\
 & i = 1, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{214}$$

onde  $N$  é número de variáveis de projeto.

As últimas restrições de desigualdade do problema acima são os limites móveis, acrescidos ao problema em virtude da aproximação de primeira ordem por séries de Taylor só ser válida na vizinhança de  $\boldsymbol{\rho}^*$ .

Silveira (2012) explica que este método é um algoritmo iterativo que resolve um problema de otimização da seguinte forma: os valores da função objetivo e restrições bem como a sensibilidade do sistema são calculados a partir de uma estimativa inicial para as variáveis de projeto. Os limites móveis são definidos em função de uma porcentagem aplicada sobre o valor atual das variáveis de projeto. Dessa forma, pode-se estabelecer uma programação linear. Resolve-se o problema de programação linear e obtêm-se novos valores para as variáveis de projeto, que é uma solução aproximada do problema original. A convergência é verificada e, caso não tenha sido atingida, um novo conjunto de valores para as variáveis de projeto é reintroduzido e todo o processo se repete até que o critério de convergência seja satisfeito.

O método PLS apresenta bom desempenho, mas é dependente da escolha adequada dos limites móveis. Há diferentes estratégias de atualização dos limites móveis. Neste trabalho, optou-se por seguir o esquema de atualização adotado por Silveira, Fonseca e Santos (2014) que se baseia na história das iterações de modo que o valor dos limites aumenta ou diminui dependendo do comportamento das variáveis de projeto. A atualização é feita a partir de um valor absoluto  $\mu$  que deve ser subtraído (originando o limite móvel inferior) ou adicionado (originando o limite móvel superior)

a uma determinada variável de projeto . A cada iteração, tem-se

$$\rho_i^L = \max(0, 001, \rho_i - \mu_i) \quad \text{e} \quad \rho_i^U = \min(1, 000, \rho_i + \mu_i), \quad (215)$$

onde  $\rho_i^L$  é o limite móvel inferior e  $\rho_i^U$  é o limite móvel superior.

O valor  $\mu$  é compreendido como um calibrador e é atualizado da seguinte maneira: se o sinal de uma variável de projeto em questão, de uma iteração para outra, se manter o mesmo, o valor de  $\mu$  é aumentado em 10% do seu valor atual, até um valor máximo de 0,20, ou seja, 20% do valor máximo de uma variável de projeto. Caso contrário, o valor de  $\mu$  é diminuído em 10%, até um valor mínimo de 0,01, ou seja, 1% do valor máximo de uma variável de projeto. Assim, tem-se a cada iteração que

$$\mu_i = \min(1, 10\mu_i, 0, 20), \quad (216)$$

se o sinal se mantém, ou

$$\mu_i = \max(0, 90\mu_i, 0, 01), \quad (217)$$

se o sinal muda, ou seja, esta atualização se comporta de tal forma que se o valor de uma variável de projeto está aumentando (ou diminuindo) continuamente, os limites móveis devem se tornar maiores; mas se o valor da variável aumenta e diminui alternadamente, então os limites móveis devem se tornar menores.

**Problemas eletromecânicos.** Em problemas caracterizados por efeitos eletromecânicos, tais como os considerados nesta seção, o fato de que as constantes elásticas, as constantes dielétricas e as constantes piezoelétricas têm ordens diferentes tornará a matriz de rigidez mal condicionada e levará a resultados instáveis. Além disso, a magnitude dos graus de liberdade de deslocamento mecânico e de potencial elétrico são também muito distintas.

A fim de contornar o problema de condicionamento, propôs-se o escalonamento da unidade básica de força (QI; FANG; YAO, 1997). Trata-se de um procedimento onde apenas se usa um múltiplo da unidade de força:

$$1\bar{N} = 1 \times 10^{\tilde{p}}N, \quad (218)$$

onde  $\tilde{p}$  é um número inteiro positivo. Com este escalonamento, os tensores constitutivos  $c^E$  e  $\epsilon^S$  passam a ter magnitude  $\bar{c}^E = 1 \times 10^{-\tilde{p}}c^E$  e  $\bar{\epsilon}^S = 1 \times 10^{-\tilde{p}}\epsilon^S$ , solucionando o problema de condicionamento. O potencial elétrico  $\phi$ , por sua vez, passa a ter magnitude  $\bar{\phi} = 1 \times 10^{-\tilde{p}}\phi$ , o que aproxima a magnitude dos deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos.

O valor do expoente  $\tilde{p}$  depende da magnitude dos tensores constitutivos. O

material piezoelétrico PZT5A (Tabela 3) tem propriedades elásticas da ordem de  $1 \times 10^{10}$ , dielétricas da ordem de  $1 \times 10^{-9}$  e piezoelétricas da ordem de  $1 \times 10^0$ . Considerando que os termos correspondentes nos blocos das matrizes  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{u\phi}$  e  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  tenham a mesma magnitude dos tensores constitutivos correspondentes, tem-se uma diferença da ordem de  $1 \times 10^{19}$  entre os termos da matriz global de modo a se poder assumir que o número de condicionamento será de ordem igual. Utilizando a equação (218) com  $\tilde{p} = 9$ , a diferença passa a ser  $1 \times 10^{19-2\tilde{p}}$  de modo que o número de condicionamento passa a ser de ordem  $1 \times 10^1$  (CARDOSO; FONSECA, 2004).

**Critério de convergência.** O critério de convergência para o método de otimização topológica implementado nesta dissertação foi baseado no número de iterações e na mudança do vetor de variáveis de projeto ao longo do processo de otimização, conforme Sigmund (2001). Foi imposto um número mínimo de iterações a serem feitas pelo algoritmo e também definiu-se que o algoritmo deveria parar quando a máxima mudança em módulo das variáveis de projeto fosse menor do que um determinado percentual, a saber, 3%.

**Caso 5:** Considerou-se uma viga em balanço sujeita à carga pontual  $f_p$  no meio da sua extremidade livre, como mostra a Figura 20(a). A força é  $f_p = -1 \times 10^8 \mathbf{j}$ .

A Figura 20(b) mostra a topologia ótima da viga representada em (a) para  $\eta_u = 0,5$ . Este valor de  $\eta_u$  manteve-se o mesmo durante todas as simulações. A topologia obtida na Figura 20(b) representa a distribuição ótima de material de forma a maximizar a rigidez da estrutura. É possível notar que há maior concentração de material próximo aos engastes da estrutura.

Para obter a melhor localização para atuadores na estrutura, considerou-se diferentes valores para  $\eta_\phi$ , constante responsável por impor a fração de volume do material de densidade  $\rho_\phi$  relativo ao material piezoelétrico. A Figura 20(c) foi gerada com  $\eta_\phi = 0,02$  o que corresponde a 2% de material piezoelétrico na estrutura, ou seja, aproximadamente 29 elementos finitos. O processo de otimização indicou duas regiões para atuadores, conforme mostra a Figura 20(c). As Figuras 20(d) e 20(e) indicam as melhores posições para alocação de atuadores ao se considerar maiores frações de volume para o material de densidade  $\rho_\phi$ . Estas frações de volume  $\eta_\phi$  foram de 0,05 e 0,1, respectivamente.

A convergência da função objetivo  $J$  pode ser analisada na Figura 21. É possível notar a rápida convergência da função logo após a primeira terça parte de iterações computadas.

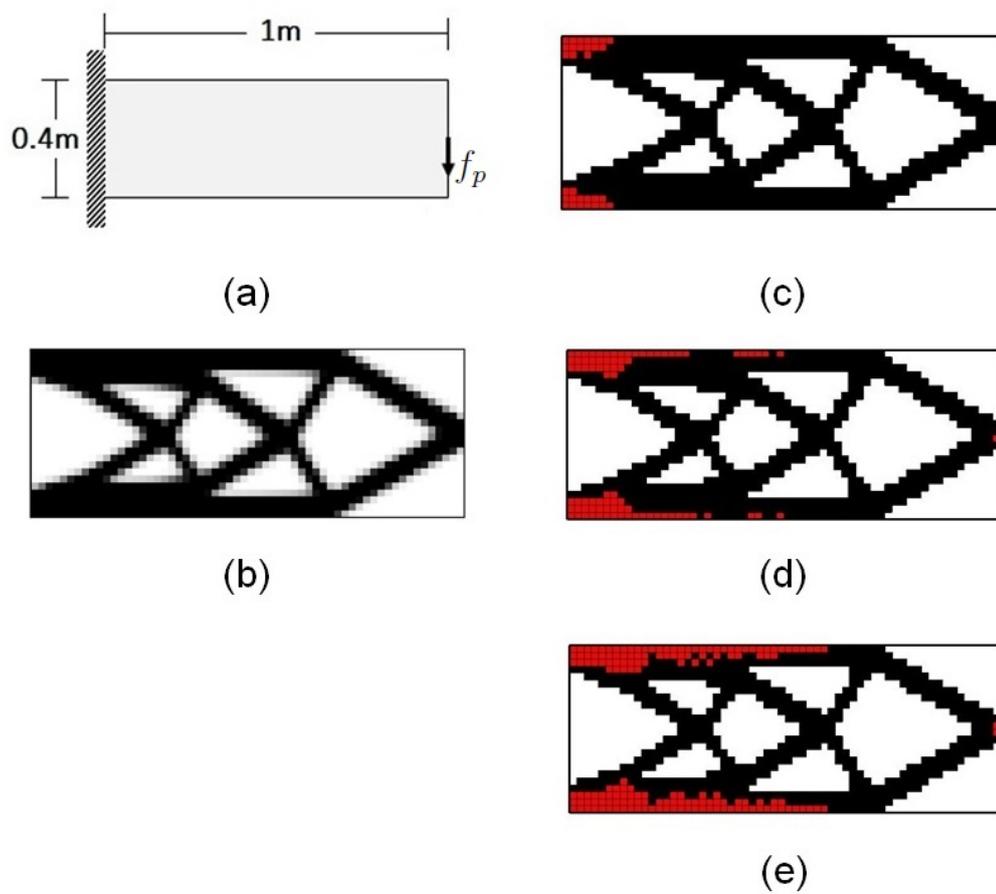


Figura 20: (a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade  $\rho_u$  para  $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade  $\rho_\phi$  (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c)  $\eta_\phi = 0,02$ , (d)  $\eta_\phi = 0,05$  e (e)  $\eta_\phi = 0,1$ .

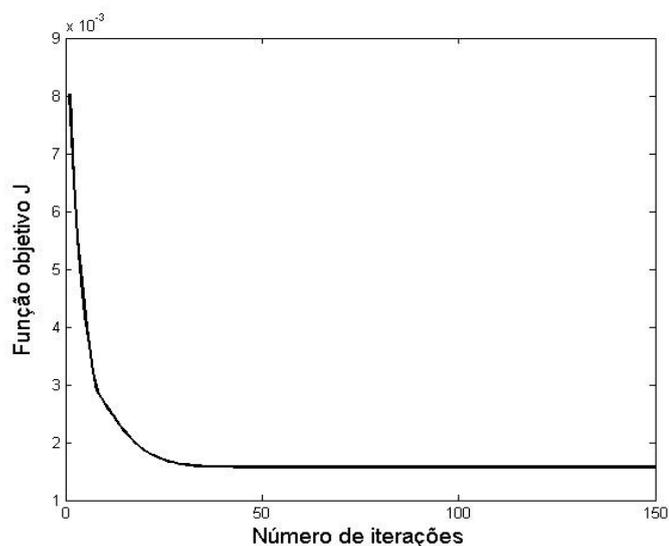


Figura 21: Convergência da função objetivo para o Caso 5.

**Caso 6:** Considerou-se uma viga em balanço sujeita à carga pontual  $f_p$  no seu canto inferior direito, conforme a Figura 22(a). A força é  $f_p = -1 \times 10^8 \mathbf{j}$ .

A Figura 22(b) mostra a topologia ótima da viga representada em (a) para  $\eta_u = 0,5$ , valor este que se manteve o mesmo durante todas as simulações. A topologia obtida na Figura 22(b) representa a distribuição ótima de material de forma a maximizar a rigidez da estrutura.

Para obter a melhor localização para atuadores na estrutura, considerou-se diferentes valores para  $\eta_\phi$ . A Figura 22(c) foi gerada com  $\eta_\phi = 0,02$ , ou seja, apenas 2% de material piezoelétrico está sendo considerado na estrutura, levando a indicação de duas regiões principais simultaneamente próximas aos engastes e às extremidades da viga e de uma região coincidente com o local de aplicação da força  $f_p$ . As Figuras 22(d) e 22(e) indicam as melhores posições para distribuição do material piezoelétrico ao se considerar maiores frações de volume para o material de densidade  $\rho_\phi$ . Estas frações de volume  $\eta_\phi$  foram de 0,05 e 0,1, respectivamente.

A convergência da função objetivo  $J$  é apresentada na Figura 23. Novamente, tal como foi no caso anterior, é possível notar a rápida convergência da função logo após a primeira terça parte de iterações computadas, o que evidencia o bom desempenho computacional da implementação feita.

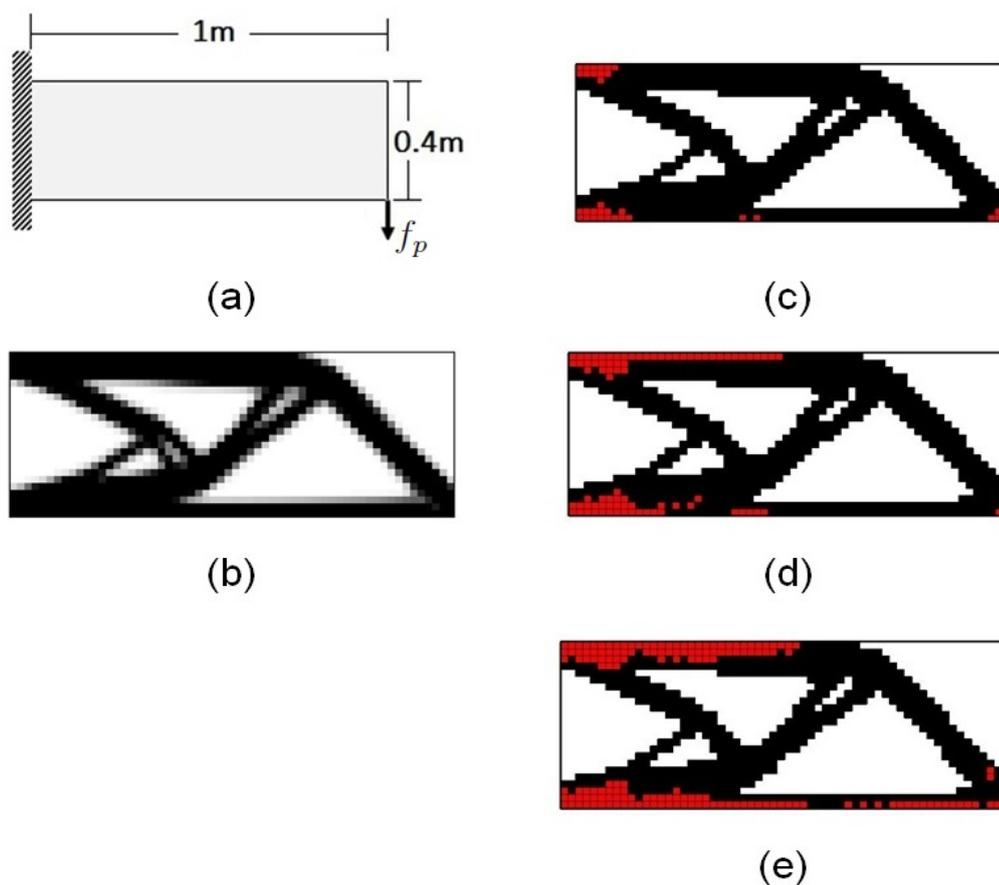


Figura 22: (a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade  $\rho_u$  para  $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade  $\rho_\phi$  (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c)  $\eta_\phi = 0,02$ , (d)  $\eta_\phi = 0,05$  e (e)  $\eta_\phi = 0,1$ .

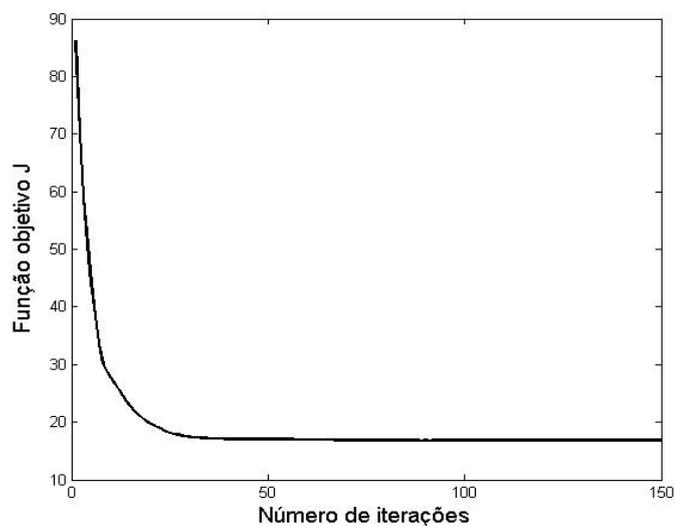


Figura 23: Convergência da função objetivo para o Caso 6.

**Caso 7:** Considerou-se uma viga biengastada com carga pontual  $f_p$  no centro de sua parte superior, conforme a Figura 24(a). A força é  $f_p = -1 \times 10^{10} \mathbf{j}$ .

A Figura 24(b) mostra a topologia ótima da viga representada em (a) para  $\eta_u = 0,5$ . Este valor para  $\eta_u$  não foi alterado para as demais simulações.

Para obter a melhor localização para atuadores na estrutura, considerou-se diferentes valores para  $\eta_\phi$ . A Figura 24(c) foi gerada com  $\eta_\phi = 0,02$  levando a indicação de três regiões (em vermelho) a serem consideradas para distribuição de material piezoelétrico: nos cantos inferiores da viga, onde a concentração de material estrutural é maior, e próximo ao local de aplicação da força  $f_p$ . As Figuras 24(d) e 24(e) indicam as melhores regiões para distribuição de material piezoelétrico ao se considerar maiores frações de volume para o material de densidade  $\rho_\phi$ . Estas frações de volume  $\eta_\phi$  foram de 0,05 e 0,1, respectivamente.

A convergência da função objetivo  $J$  é apresentada na Figura 25. A rápida convergência da função se deve à simetria proveniente da aplicação da força  $f_p$  e dos engastes da estrutura.

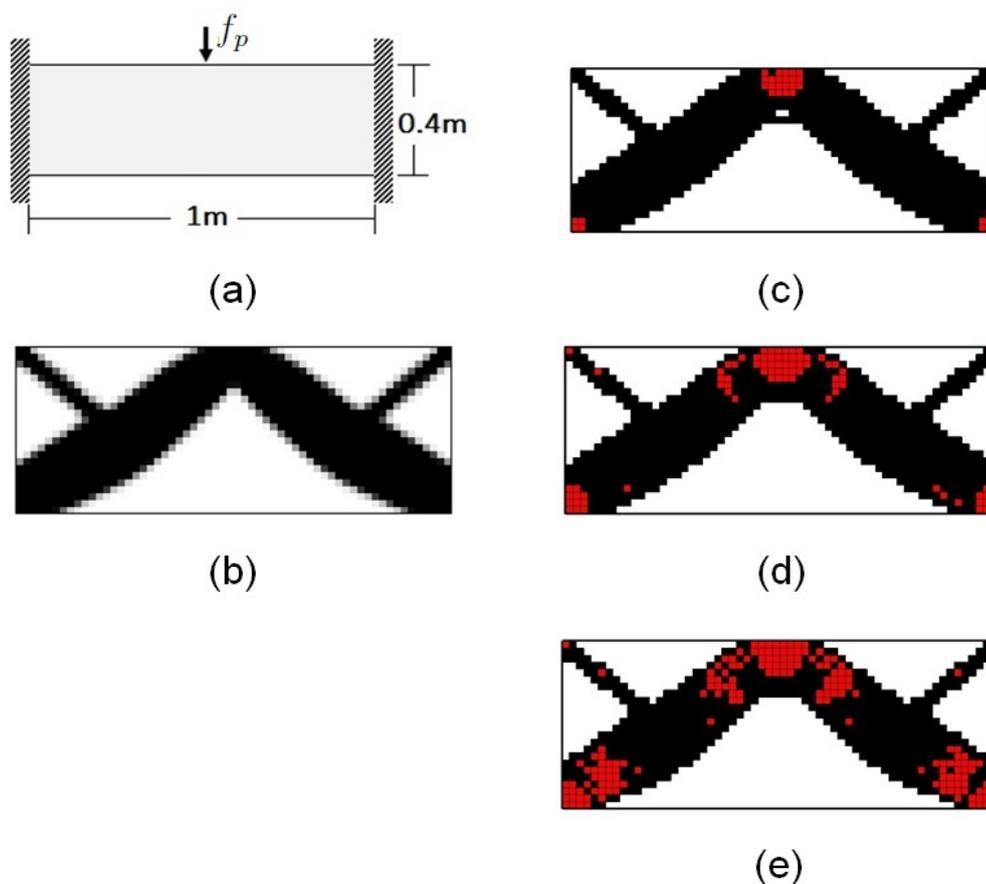


Figura 24: (a) Esquema para viga biengastada sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade  $\rho_u$  para  $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade  $\rho_\phi$  (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c)  $\eta_\phi = 0,02$ , (d)  $\eta_\phi = 0,05$  e (e)  $\eta_\phi = 0,1$ .

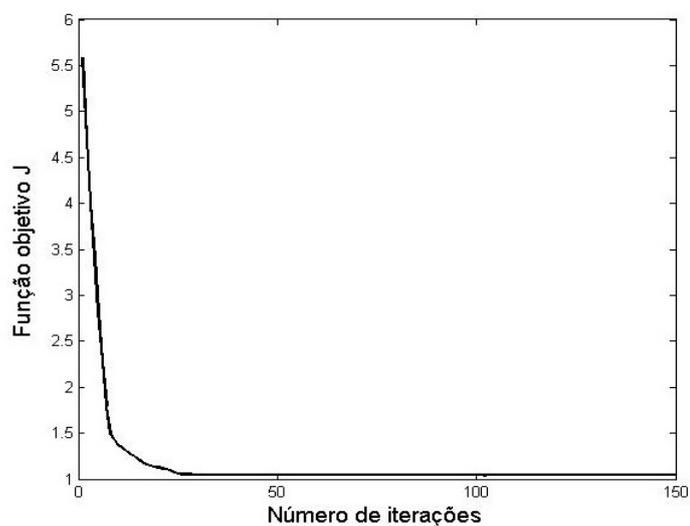


Figura 25: Convergência da função objetivo para o Caso 7.

Para os casos com a viga em balanço, pôde-se perceber que os melhores locais para posicionar atuadores piezoelétricos são aqueles ao longo das partes superior e inferior da topologia ótima, de modo que a incidência de material piezoelétrico varia, sendo maior próximo aos engastes e menor a medida que se afasta da face engastada. Para o caso da viga biengastada, percebe-se a indicação de material piezoelétrico próximo das faces engastadas e na região próxima ao local de aplicação da força.

Atuadores piezoelétricos são amplamente utilizados em estruturas menores e sua correta posição melhora consideravelmente a eficiência no controle. Em virtude disto, pesquisas envolvendo projetos mecânicos otimizados topologicamente e localização de atuadores continuam sendo importantes e relevantes em diversas áreas da mecânica e biomecânica.

Em comparação com outros trabalhos ((DONOSO; SIGMUND, 2009; SILVEIRA, 2012)), observou-se resultados semelhantes quando consideradas otimizações por modos de vibração. Os resultados obtidos nesta dissertação são próximos ou coincidem com aqueles referentes ao primeiro modo de vibração das vigas consideradas nos trabalhos anteriormente citados.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS PARA FUTUROS TRABALHOS

Neste trabalho, desenvolveu-se uma metodologia geral para o projeto simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores em estruturas sujeitas a condições de engastes e carregamentos. A formulação matemática do problema e sua implementação computacional possibilitaram projetar as topologias ótimas para as estruturas consideradas nas simulações, satisfazendo todas as restrições de projeto impostas. Além disso, foi possível obter a melhor localização para atuadores em ambos os problemas e com a mesma metodologia.

A otimização foi feita de forma simultânea pela minimização da flexibilidade e da energia de controle do sistema, diferente de trabalhos analisados até aqui, onde o procedimento se dava sequencialmente, separando as otimizações estrutural e dos atuadores.

As simulações numéricas mostraram que o processo de otimização considerou todas as restrições de uso de material impostas ao problema. A possibilidade de escolha da quantidade dos materiais que compõem a estrutura é uma vantagem da metodologia empregada, pois permite projetar estruturas topologicamente otimizadas através da consideração precisa das porções de material estrutural e de controle.

A metodologia também se mostrou eficiente para a localização ótima para atuadores na topologia otimizada. Para o problema simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores proporcionais, foi possível obter precisamente o melhor elemento finito indicativo da posição ótima para a fixação de atuadores proporcionais do tipo mola. Ressalta-se o fato de que a posição de nenhum atuador foi pré-estabelecida para simular a ação de controle a fim de que a otimização topológica pudesse indicar a melhor localização para atuadores. Também para o problema simultâneo de otimização topológica e localização de atuadores piezoelétricos, obteve-se a distribuição ótima para o material piezoelétrico de modo que não foram utilizadas cerâmicas piezoelétricas com localização e forma pré-definidas.

A apresentação dos problemas na forma clássica de um problema de otimização topológica, a formulação variacional apresentada para cada um deles, a dedução de

todos os cálculos da análise de sensibilidades e a discretização de cada um dos problemas via MEF de forma detalhada proporcionam uma compreensão clara do desenvolvimento matemático necessário para a implementação computacional dos problemas considerados. Assim, este trabalho também teve um propósito didático, servindo de guia para trabalhos futuros que venham considerar a metodologia aqui proposta ou outras metodologias similares.

Utilizando como base o trabalho aqui desenvolvido, sugere-se para trabalhos futuros:

- estender esta metodologia para o controle de vibrações em estruturas;
- empregar a metodologia aqui utilizada para estruturas tridimensionais;
- empregar outros métodos de distribuição de material;
- o estudo de casos onde as estruturas tenham geometria mais complexa e/ou apresentem furos internos;
- a consideração de restrições de manufatura para facilitar a fabricação.

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics - fundamentals and applications**. Boston, Boca Raton: CRC Press, 2005.

ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, A.; SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. **Structural Multi-disciplinary Optimization**, v.43, p.1–16, 2011.

BASSEVILLE, M.; BENVENISTE, A.; MOUSTAKIDES, G. V.; ROUGEE, A. Optimal sensor location for detecting changes in dynamical behavior. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-32, p.1067–1075, 1987.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements: an introduction - volume 1**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1981.

BEGG, D.; LIU, X. On simultaneous optimization of smart structures - Part II: algorithms and examples. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.184, p.25–37, 2000.

BENDSØE, M. P. **Optimization of structural topology, shape and material**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1995.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.71, p.197–224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, v.69, n.9-10, p.635–654, 1999.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization - theory, methods and applications**. Berlin: Springer, 2003.

BURGREEN, G. W.; ANTAKI, J. F.; WU, Z. J.; HOLMES, A. J. Computational fluid dynamics as a development tool for rotary blood pumps. **Artificial Organs**, v.25, n.5, p.336–340, 2001.

CANFIELD, R. A.; MEIROVITCH, L. Integrated structural design and vibration suppression using independent modal space control. **AIAA Journal**, v.32, p.2054–2060, 1994.

CARBONARI, R. C.; SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S. Optimum placement of piezoelectric material in piezoactuator design. **Smart Materials and Structures**, v.16, p.207–220, 2007.

CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. O. An incremental Lagrangian formulation to the analysis of piezoelectric bodies subjected to geometric non-linearities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.59, p.963–987, 2004.

CHENG, K. T.; OLHOFF, N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. **International Journal of Solids and Structures**, v.16, n.3, p.305–323, 1981.

CHENG, K. T.; OLHOFF, N. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates. **International Journal of Solids and Structures**, v.18, n.2, p.153–170, 1982.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis**. New York: John Wiley and Sons, 1989.

DARIVANDI, N. N.; MORRIS, K.; KHAJEPOUR, A. An algorithm for LQ optimal actuator location. **Smart Materials and Structures**, v.22, n.3, 2013. DOI 10.1088/0964-1726/22/3/035001.

DEVASIA, S.; ELEFThERIOU, E.; MOHEIMANI, S. O. R. A survey of control issues in nanopositioning. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v.15, n.5, p.799–823, 2007.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. **Structural Optimization**, v.10, p.40–45, 1995.

DONOSO, A.; SIGMUND, O. Optimization of piezoelectric bimorph actuators with active damping for static and dynamic loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.38, p.171–183, 2009.

GAWRONSKI, W. K.; LIM, K. B. Balanced actuator and sensor placement for flexible structures. **International Journal of Control**, v.65, p.131–145, 1996.

GOODMAN, J.; KOHN, R. V.; REYNA, L. Numerical study of a relaxed variational problem from optimal design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.57, p.107–127, 1986.

HAC, A.; LIU, L. Sensor and actuator location in motion control of flexible structures. **Journal of Sound and Vibration**, v.167, n.2, p.239–261, 1993.

HALE, A.; LISOWSKI, R.; DAHL, W. Optimal simultaneous structural and control design of maneuvering flexible spacecraft. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v.8, n.1, p.86–93, 1985.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.11, p.127–140, 1963.

HEYWANG, W.; LUBITZ, K.; WERSING, W. **Piezoelectricity**: evolution and future of a technology. New York: Springer, 2008.

HIRAMOTO, K.; DOKI, H.; OBINATA, G. Optimal sensor/actuator placement for active vibration control using explicit solution of algebraic Riccati equation. **Journal of Sound and Vibration**, v.229, n.5, p.1057–1075, 2000.

IEEE. **ANSI/IEEE Std 176-1987, Standard on piezoelectricity**. New York: Inc. The Institute of Electrical and Eletronics Engineers, 1988.

JANG, G.-W.; JEONG, J. H.; KIM, Y. Y.; SHEEN, D.; PARK, C.; KIM, M.-N. Checkerboard-free topology optimization using non-conforming finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.57, p.1717–1735, 2003.

JOG, C. S.; HABER, R. B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.130, p.203–226, 1996.

KIM, Y.; JUNKINS, J. L. Measure of controllability for actuator placement. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.14, p.895–902, 1991.

KOHN, R. V.; STRANG, G. Optimal-design and relaxation of variational problems. 1. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v.39, p.1–25, 1986.

KUMAR, K. R.; NARAYANAN, S. Active vibration control of beams with optimal placement of piezoelectric sensor/actuator pairs. **Smart Materials and Structures**, v.17, p.1–15, 2008.

LIMA JR., J. J. **Modelagem de sensores e atuadores piezelétricos com aplicações em controle ativo de estruturas**. 1999. Tese de Doutorado — Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

LIU, K.; TOVAR, A. An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. **Structural Multidisciplinary Optimization**, 2014. DOI 10.1007/s00158-014-1107-x.

LIU, W.; GAO, W.; SUN, Y.; XU, M. Optimal sensor placement for spatial lattice structure based on genetic algorithms. **Journal of Sound and Vibration**, v.317, p.175–189, 2008.

LIU, X.; BEGG, D. On simultaneous optimisation of smart structures - Part I: theory. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.184, p.15–24, 2000.

LURIE, K. A.; FEDOROV, A. V.; CHERKAEV, A. V. Regularization of optimal design problems for bars and plates, Part I. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.37, n.4, p.499–521, 1982a.

LURIE, K. A.; FEDOROV, A. V.; CHERKAEV, A. V. Regularization of optimal design problems for bars and plates, Part II. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.37, n.4, p.523–543, 1982b.

MAXWELL, J. C. On reciprocal figures, frames and diagrams of forces. **Trans Royal Soc. Edinb.**, v.26, n.1, 1872.

MICHELL, A. G. M. The limits of economy of material in framed structures. **Philosophical Magazine, Series 6**, v.8, p.589–597, 1904.

MILLER, D.; SHIM, J. Gradient-based combined structural and control optimization. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v.10, n.3, p.291–298, 1987.

MILMAN, M.; SALAMAN, M.; SCHEID, R.; BRUNO, R.; GIBSON, J. Combined control-structural optimization. **Computational Mechanics**, v.8, p.1–18, 1991.

MOHEIMANI, S. O. R.; FLEMING, A. J. **Piezoelectric transducers for vibration control and damping**. Germany: Springer, 2006.

MOLTER, A. **Controle de manipuladores robóticos flexíveis usando atuadores e sensores piezelétricos otimizados**. 2008. Tese de Doutorado — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS.

MOLTER, A.; SILVEIRA, O. A. A.; BOTTEGA, V.; FONSECA, J. S. O. Integrated topology optimization and optimal control for vibration suppression in structural design. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v.47, p.389–397, 2013.

OHLOFF, N.; BENDSØE, M. P.; RASMUSSEN, J. On CAD-integrated structural topology and design optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.89, p.259–279, 1991.

OU, J.-S.; KIKUCHI, N. Optimal design of controlled structures. **Structural Optimization**, v.11, p.19–28, 1996a.

OU, J.-S.; KIKUCHI, N. Integrated optimal structural and vibration control design. **Structural Optimization**, v.12, p.209–216, 1996b.

PIEFORT, V. **Finite element modelling of piezoelectric active structures**. 2001. Thesis submitted in candidature for the degree of doctor in applied sciences — Université Libre de Bruxelles., Brussels/Bélgica.

PORTO, E. C. B. **Método de homogeneização aplicado a otimização estrutural topológica**. 2006. Dissertação de Mestrado — Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

QI, H.; FANG, D.; YAO, Z. FEM analysis of electro-mechanical coupling effect of piezoelectric materials. **Computational Materials Science**, v.8, p.283–290, 1997.

RAJA, M.; NARAYANAN, S. Simultaneous optimization of structures and control of smart tensigrity structures. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v.20, n.1, p.109–117, 2009.

ROZVANY, G. I. N.; ONG, T. G.; SZETO, W. T.; OHLOFF, N.; BENDSØE, M. P. Least-weight design of perforated plates-I. **International Journal of Solids and Structures**, v.23, p.521–536, 1987a.

ROZVANY, G. I. N.; ONG, T. G.; SZETO, W. T.; OHLOFF, N.; BENDSØE, M. P. Least-weight design of perforated plates-II. **International Journal of Solids and Structures**, v.23, p.537–550, 1987b.

ROZVANY, G. I. N.; ZHOU, M. The COC algorithm, part I: cross-section optimization or sizing. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.89, p.281–308, 1991.

RUBIO, W. M. **Otimização topológica de transdutores piezelétricos com gradação funcional de material**: projeto, simulação, análise e fabricação. 2010. Tese de Doutorado — Universidade de São Paulo, São Paulo/SP.

SALAMA, M.; GARBA, J.; DEMSETZ, L.; UDWADIA, F. Simultaneous optimization of controled structures. **Computational Mechanics**, v.3, p.275–282, 1988.

SIENZ, J.; HINTON, E. Reliable structural optimization with error estimation, adaptivity and robust sensitivity analysis. **Computers and Structures**, v.64, p.31–63, 1997.

SIGMUND, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. **Mechanics of Structures and Machines**, v.25, p.495–526, 1997.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v.21, p.120–127, 2001.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.33, p.401–424, 2007.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, v.16, p.68–75, 1998.

SILVA, E. C. N. **Otimização aplicada ao projeto de sistemas mecânicos**. [S.l.]: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/notas.html>>. Acesso em: 13 out. 2014.

SILVEIRA, O. A. A. **Projeto simultâneo de otimização topológica e controle para redução de vibrações utilizando material piezelétrico**. 2012. Tese de Doutorado — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS.

SILVEIRA, O. A. A.; FONSECA, J. O. S.; SANTOS, I. M. Actuator topology design using controllability Gramian. **Structural Multidisc Optimization**, 2014. DOI 10.1007/s00158-014-1121-z.

SIMONETTI, H. L. **Otimização topológica de estruturas bidimensionais**. 2009. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto/MG.

SORIANO, H. L. **Elementos finitos**: Formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. Modelling topology optimization problems as mixed linear 0-1 programs. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.57, p.723–739, 2003.

SUN, D.; MILLS, J. K.; SHAN, J.; TSO, S. K. A PZT actuator control of a single-link flexible manipulator based on linear velocity feedback and actuator placement. **Mechatronics**, v.14, n.4, p.381–401, 2004.

TALISCHI, C.; PAULINO, G.; LE, C. Honeycomb wachspress finite elements for structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.37, p.569–583, 2009.

TANG, P.-S.; CHANG, K.-H. Integration of topology and shape optimization for design of structural components. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.22, p.65–82, 2001.

TIERSTEN, H. F. Hamilton's principle for linear piezoelectric media. **Proceedings of the IEEE**, v.55, n.8, p.1523–1524, 1967.

VENKATARAMAN, P. **Applied optimization with MATLAB programming**. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., 2009.

WANG, Z.; CHEN, S.; HAN, W. Integrated structural and control optimization of intelligent structures. **Engineering Structures**, v.21, p.183–191, 1999.

WU, T.; RO, P. I.; KINGON, A. I.; MULLING, J. F. Piezoelectric resonating structures for microelectronic cooling. **Smart Materials and Structures**, v.12, n.2, p.181–187, 2003.

XU, B.; OU, J. P.; JIANG, J. S. Integrated optimization of structural topology and control for piezoelectric smart plate based on genetic algorithm. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.64, p.1–12, 2013.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. The COC algorithm, part II: topological, geometry and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.89, p.309–336, 1991.

ZORIĆ, N. D.; SIMONOVIĆ, A. M.; MITROVIĆ, A. S.; STUPAR, S. N. Optimal vibration control of smart composite beams with optimal size and location of piezoelectric sensing and actuation. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v.24, n.4, p.499–526, 2013.

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA SIMULTÂNEA À  
LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES EM ESTRUTU-  
RAS** – Lucas dos Santos Fernandez



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**  
Instituto de Física e Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA SIMULTÂNEA À  
LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES EM ESTRUTURAS**

**LUCAS DOS SANTOS FERNANDEZ**

Pelotas, 2015