

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Centro de Desenvolvimento Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Computação



Dissertação

Consolidação do estudo e análise da robustez de operadores fuzzy considerando a abordagem intuicionista

Rosana Medina Zanotelli

Pelotas, 2015

Rosana Medina Zanotelli

Consolidação do estudo e análise da robustez de operadores fuzzy considerando a abordagem intuicionista

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dra. Renata Hax S. Reiser
Coorientador: Prof. Dra. Simone André C. Cavalheiro

Pelotas, 2015

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

Z33c Zanutelli, Rosana Medina

Consolidação do estudo e análise da robustez de operadores fuzzy considerando a abordagem intuicionista / Rosana Medina Zanutelli; Renata Hax S. Reiser, orientador; Simone André C. Cavalheiro, coorientador. – Pelotas, 2015.

82 f.

Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, 2015.

1. Lógica Fuzzy. 2. Lógica Fuzzy Intuicionista . 3. Robustez. 4. δ -sensibilidade. I. Reiser, Renata Hax S., orient. II. Cavalheiro, Simone André C., coorient. III. Título.

CDD: 005

**Dedico este trabalho ao meu marido Vinicius e minhas filhas
Ana Catarina e Juliana.**

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

- Ao meu marido, amigo e companheiro, pelo seu amor, carinho e compreensão. Pelo apoio e cuidado em momentos de sombra.
- As minhas filhas queridas, que são a luz da minha vida.
- Aos meus pais que me ajudaram com seu apoio e carinho.
- À professora Dr^a. Renata Reiser, minha orientadora, pela dedicação e por tudo que aprendi durante essa caminhada.
- Aos colegas do Lups, pelo carinho e amizade.
- Ao professor Dr. Adenauer Corrêa Yamin, sempre com uma palavra amiga.

**"Não é o que você faz,
mas quanto amor você dedica no que faz
que realmente importa."**

— ANJEZË GONXHE BOJAXHIU (MADRE TERESA DE CALCUTÁ)

RESUMO

ZANOTELLI, Rosana Medina. **Consolidação do estudo e análise da robustez de operadores fuzzy considerando a abordagem intuicionista**. 2015. 82 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2015.

Esta dissertação contribui com a análise da robustez na Lógica Fuzzy, como uma importante fundamentação para modelagem e desenvolvimento de sistemas robustos, estendendo esta abordagem para a lógica intuicionista de Atanassov. Primeiramente, apresenta-se uma introdução à lógica fuzzy, discutindo as negações, funções de agregações, implicações e coimplicações fuzzy, incluindo também os conectivos Xor e derivações. O trabalho também considera a análise da δ -sensibilidade destes conectivos fuzzy e suas construções duais, essencialmente focados em propriedades algébricas e projeções. Começando com a avaliação da sensibilidade de conectivos fuzzy, a proposta estende os resultados para classes de conectivos fuzzy intuicionistas. Como principal contribuição, formalmente estabelece-se que a robustez preserva as construções duais e as funções de projeção relacionadas a conectivos fuzzy intuicionistas representáveis. Mostra-se que a extensão, do trabalho científico proposto por Y. Li e colaboradores, 2005 em "An Approach to Measure the Robustness of Fuzzy Reasoning", para a classe de conectivos fuzzy intuicionistas é preservada pelas construções duais. A presente pesquisa mostra que a análise de robustez pode ser diretamente verificada a partir de operadores fuzzy usando duas estratégias: (i) a δ -sensibilidade de operadores fuzzy baseada na análise da monotonicidade de seus argumentos (negações, agregações, implicações e coimplicações); e ainda (ii) a avaliação do comportamento dos operadores fuzzy nos pontos terminais do intervalo unitário, onde a monotonicidade não pode ser aplicada (conectivos Xor, XNor, bi-implicações e bi-coimplicações).

Palavras-chave: Lógica Fuzzy, Lógica Fuzzy Intuicionista , Robustez, δ -sensibilidade.

ABSTRACT

ZANOTELLI, Rosana Medina. **Consolidating the intuitionistic approach regarding the study and analysis of fuzzy operators robustness**. 2015. 82 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2015.

This dissertation contributes to the robustness analysis in fuzzy logic as an important founding for modeling and developing robust systems, extending such approach to the Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. It begins with the introduction of fuzzy logic, discussing negations, aggregation functions, fuzzy implications and bi-implications, also including Xor connectives and derivations. It also considers the δ -sensitivity analysis of these fuzzy connectives and their dual constructions from a few essentials such as properties and projections. Starting with an evaluation of the sensitivity in representable fuzzy connectives, the results are applied in the intuitionistic connective classes. The main result formally states that the robustness preserves the projection functions of representable intuitionistic fuzzy connectives. It shows an extension of the work in Y. Li et al, 2005 "An Approach to Measure the Robustness of Fuzzy Reasoning" for the class of intuitionistic fuzzy connectives, showing that the robustness of intuitionistic fuzzy sensitivity is preserved by dual constructions. The present research states that robustness analysis of intuitionistic fuzzy operators can be directly verified from fuzzy operators using two strategies: (i) the δ -sensitivity analysis of fuzzy connectives based on monotonicity of their arguments (negations, aggregations, implications and coimplications); and, otherwise (ii) the evaluation of the behaviour related to fuzzy connectives in endpoints of the unit interval, when the monotonicity property is not applied (Xor, XNor, bi-implications e bi-coimplications fuzzy operators).

Keywords: Fuzzy Logic, Intuitionistic Fuzzy Logic, Robustness, δ -sensitivity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Fuzzy Xor E_{S_P, T_P, N_S}	31
Figura 2	Fuzzy XNor D_{T_P, S_P, N_S}	31
Figura 3	Fuzzy f -Xor implicação	36
Figura 4	Fuzzy f -XNor coimplicação	36
Figura 5	Operador de robustez na classe das IFNs representável	62
Figura 6	Análise da robustez na classe IFTs.	65
Figura 7	Operador de robustez na classe das (S,N)-implicações representáveis.	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Exemplificação de normas fuzzy triangulares	27
Tabela 2	Exemplificação de conormas fuzzy triangulares	28
Tabela 3	Implicações, coimplicações fuzzy e dualidade relacionada.	33
Tabela 4	Norma Produto e Soma Probabilística	43
Tabela 5	(S, N) -implicação e (T, N) -coimplicação Fuzzy	44
Tabela 6	QL-Implicação Fuzzy	44
Tabela 7	δ -sensibilidade do conectivo f -Xor nos pontos extremos do intervalo da unidade	49
Tabela 8	Sensibilidade do conectivo f -Xor relacionado com $\delta = 0.1$	51
Tabela 9	Implicações Fuzzy Intuicionistas	58
Tabela 10	Análise de Robustez na Composição de Negações Fuzzy	61
Tabela 11	T-norma e T-conorma Fuzzy Intuicionista definida pelo Produto Algébrico (T_P) e Soma Determinística (S_P)	66
Tabela 12	Implicação e Coimplicação Fuzzy Intuicionista	71
Tabela 13	IQL Fuzzy Intuicionista	71

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LF	Lógica Fuzzy
LFI	Lógica Fuzzy Intuicionista
SFN	Negação Fuzzy Forte
SIFN	Negação Fuzzy Intuicionista Forte
IFS	Agregações Fuzzy Intuicionista
IFN	Negação Fuzzy Intuicionista
IFTs	T-(co)norma Fuzzy Intuicionista representável

LISTA DE SÍMBOLOS

χ	Conjunto Universo
U	Intervalo Unitário
x	Elemento qualquer
f	Função
f_N	Função N-Dual da função f
g	Função
g_N	Função N-Dual da função g
μ	Função de Pertinência
ν	Função de Não-Pertinência
N	Negação Fuzzy
N_S	Negação Padrão ou Negação de Zadeh
A	Função de Agregação Fuzzy
T	T-Norma
S	T-Conorma
I	Implicação Fuzzy
I_N ou J	Coimplicação Fuzzy
E	Xor
D	XNor
π	Índice Fuzzy Intuicionista
N_I	Negação Fuzzy Intuicionista
\tilde{A}	Função de Agregação Fuzzy Intuicionista
\tilde{T}	T-Norma Intuicionista
\tilde{S}	T-Conorma Intuicionista
I_I	Implicação Fuzzy Intuicionista
T_M	T-norma mínimo
S_M	T-conorma máximo

T_P	Produto Algébrico
S_P	Soma Probabilística
T_D	T-norma Drástica
S_D	T-conorma Drástica
T_L	T-norma Łukasiewicz
S_L	T-conorma Łukasiewicz
T_N	T-conorma N Dual de T
S_N	T-norma N Dual de S
M	Função de Agregação
I_{KD}	Implicação Kleene Dienes
J_{KD}	Coimplicação Kleene Dienes
I_{RC}	Implicação Reichenbach
J_{RC}	Coimplicação Reichenbach
I_{LZ}	Implicação Łukasiewicz
J_{LZ}	Coimplicação Łukasiewicz
I_{ZD}	Implicação Zadeh
J_{ZD}	Coimplicação Zadeh
I_{PC}	Implicação PC
J_{PC}	Coimplicação PC
I_{BC}	Implicação BC
J_{BC}	Coimplicação BC
I_{BD}	Implicação BD
J_{BD}	Coimplicação BD
$I_{S,N}$	S-implicação ou implicação forte
$(I_{S,N})_N$	S-coimplicação
$I_{S,N,T}$	QL-implicação
$(I_{S,N,T})_N$	QL-coimplicação
$I_{S,T,N}$	D-implicação
$(I_{S,T,N})_N$	D-coimplicação
$I_{E,T,N}$	f -Xor-implicação
$J_{D,S,N}$	f -Xor-coimplicação
$B_{E,N}$	Bi-implicação
$C_{D,N}$	Bi-coimplicação

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	16
1.2	Motivação	17
1.3	Metodologia	17
1.4	Organização do Texto	18
2	LÓGICA FUZZY - CONECTIVOS E PROPRIEDADES	20
2.1	Aplicações da Lógica Fuzzy	20
2.2	Estudo no Sentido Estrito da Lógica Fuzzy	22
2.3	Conceitos Básicos	24
2.4	Negação Fuzzy	25
2.5	Funções de Agregação Fuzzy	26
2.5.1	T-normas e T-conormas	27
2.6	Conectivos Xor Fuzzy e XNor Fuzzy	28
2.7	Implicação Fuzzy e Coimplicação Fuzzy	31
2.7.1	Classes (Co)Implicação Fuzzy	33
2.7.2	Xor Bi-Implicação fuzzy e Xor Bi-(Co)Implicação fuzzy	36
3	ROBUSTEZ DE CONECTIVOS FUZZY	38
3.1	Robustez dos Conectivos Fuzzy	39
3.2	Robustez dos Conectivos N-Duais Fuzzy	43
3.3	Robustez do conectivo f -Xor fuzzy	46
3.3.1	Estudo da δ -Sensibilidade na Classe de Conectivos f -Xor fuzzy	47
3.3.2	δ -Sensibilidade referente às implicações fuzzy e equivalências fuzzy obtidas a partir do conectivo E_{T_P, S_P, N_S}	48
4	LÓGICA FUZZY INTUICIONISTA	52
4.1	Conjuntos Fuzzy Intuicionistas	52
4.1.1	Conjunto \tilde{U} dos Valores Fuzzy Intuicionista	53
4.1.2	Índice Fuzzy Intuicionista	54
4.2	Negação Fuzzy Intuicionista	54
4.2.1	Relação de Dualidade entre Funções Fuzzy Intuicionistas	55
4.3	Funções de Agregação Fuzzy Intuicionistas	55
4.3.1	T-(co)normas Fuzzy Intuicionistas	55
4.3.2	Propriedades Algébricas e Exemplificação	56
4.3.3	Implicações Fuzzy Intuicionistas Geradas por Agregação de Implicações e Coimplicações	57
4.3.4	Exemplificação	58

5	ROBUSTEZ DE CONECTIVOS FUZZY INTUICIONISTAS	59
5.1	δ-Sensibilidade dos Conectivos Fuzzy Intuicionista	59
5.2	Robustez de Negações Fuzzy Intuicionistas Representáveis	59
5.2.1	Robustez de Conectivos Fuzzy Intuicionista e Relação de Dualidade	62
5.3	Robustez de (Co)Normas Triangulares Intuicionistas	62
5.3.1	Robustez de t-(Co)Normas Intuicionistas e Relação de Dualidade	64
5.4	Robustez de Implicações Fuzzy Intuicionistas	66
6	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	72
	REFERÊNCIAS	74

1 INTRODUÇÃO

A *Lógica Fuzzy* (LF) é uma lógica multivalorada no intervalo $U = [0, 1]$, capaz de modelar de forma mais flexível o raciocínio lógico humano, viabilizando a modelagem de sistemas de inferências que usam conectivos lógicos para operar sobre variáveis linguísticas.

Neste contexto, a LF vem colaborando de forma significativa para o tratamento da incerteza e a determinação de fronteiras/limites, capacitando tanto a absorção de informações vagas e normalmente descritas em uma linguagem natural quanto a transformação de tais informações para um modelo matemático, que viabiliza o cálculo numérico de fácil manipulação computacional.

Ao combinar os conceitos da lógica clássica e os conjuntos de Łukasiewicz, a LF considera os conjuntos fuzzy como concebida por Zadeh (ZADEH, 1965), fazendo uso do conceito de funções de pertinência como extensão das funções características, considerando os modos imprecisos do raciocínio humano e ainda, auxiliando na habilidade humana de tomar decisões.

Novas e abrangentes abordagens fuzzy consideram a teoria dos conjuntos fuzzy do tipo-2 (ou de ordem mais altas) como extensão dos sistemas fuzzy de tipo-1 (DUBOIS; PRADE, 1991, 2005; DESCHRIJVER; KERRE, 2005a,b; CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003).

Dentre as diversas extensões da lógica fuzzy, Krassimir T. Atanassov introduz a teoria dos conjuntos fuzzy intuicionista e os fundamentos da correspondente lógica fuzzy intuicionista (LFI) (LIN; XIA, 2006; DESCHRIJVER; KERRE, 2005b; CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2002). NA LFI, considera-se não somente a função de pertinência, mas também a função de não pertinência, ou seja, cada elemento do conjunto \mathcal{X} é associado um grau de pertinência e um grau de não-pertinência, sendo o complemento do grau de pertinência não necessariamente igual ao grau de não-pertinência.

Neste contexto, tem-se como mensurar esta diferença entre o grau de pertinência e de não-pertinência, medida esta conhecida como grau de hesitação, ampliando a forma de abordagem lógica. Sendo assim, a LFI como concebida por Atanassov, provê fundamentação para aplicações em diversas áreas, como por exemplo a área médica, como mostra a literatura aplicada (LIN; XIA, 2006; ATANASSOV, 1999).

Este trabalho considera o estudo da robustez para análise da sensibilidade nos operadores da LFI, considerando-a como uma propriedade fundamental para que um sistema baseado em LFI

possa garantir que as conclusões não sejam essencialmente alteradas, se as condições assumidas variarem dentro de parâmetros razoáveis. É uma área de pesquisa relevante, com importantes contribuições, como por exemplo, em áreas comerciais e desenvolvimento tecnológico (YING, 1999; ZHANG; CAI, 2004; OBERGUGGENBERGER; SCHMELZER; FELLIN, 2008; ZHENG; LIU; CAI, 2010; LI; LI; XIE, 2011).

A análise baseada na δ -sensibilidade (ou sensibilidade ponto a ponto), conforme apresentado em (LI et al., 2005), pode ser estendida para contemplar resultados análogos para abordagem intuicionista, fornecendo fundamentos lógicos para suportar aplicações fuzzy robustas com base na LFI (ATANASSOV, 1986). Além disso, o estudo da δ -sensibilidade de sistemas de inferência baseada na LFI pode ser estruturado analogamente aos conceitos da LF e abranger ainda soluções para ambas situações: (i) a incerteza inerente aos sistemas computacionais via modelagem de variáveis linguísticas (ATANASSOV; GARGOV, 1989); (ii) a indecisão sobre a relação de pertinência, cuja construção dual não se restringe ao complemento, nas variáveis modeladas (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

Em sistemas baseados em regras fuzzy, cada termo linguístico de uma variável linguística de entrada está associado a um determinado conjunto fuzzy com caracterização altamente subjetiva. Apesar desta subjetividade, tais sistemas fuzzy devem ser estáveis, ou seja, robustos no sentido de que as mudanças suaves realizadas na entrada de parâmetros que definem conjuntos fuzzy resultem em pequenas alterações nos resultados. Desta necessidade em garantir estabilidade aos sistemas baseados em LF e LFI, considera-se a seguinte questão de pesquisa:

- Como garantir a robustez de sistemas baseados em Logica Fuzzy Intuicionista – como proposta em (ATANASSOV, 1994)?

Este trabalho de pesquisa considera que a robustez pode ser verificada diretamente nos operadores fuzzy, a partir de duas estratégias:

- (i) estudo da δ -sensibilidade de operadores fuzzy baseado na análise da monotonicidade de seus argumentos (negações, agregações, implicações e coimplicações);
- (ii) avaliação do comportamento dos operadores fuzzy nos pontos terminais $((0,0),(0,1),(1,0)$ e $(1,1))$, quando a monotonicidade não pode ser aplicada (conectivos Xor, XNor, bi-implicações e bi-coimplicações).

1.1 Objetivos

Este trabalho objetiva colaborar com o estudo da robustez em sistemas baseadas na LFI, analisando a sensibilidade dos conectivos fuzzy intuicionista e avaliando a preservação da δ -sensibilidade ou sensibilidade ponto a ponto na construção dual destes operadores lógicos.

Dentre a diversidade de conectivos da LFI, a proposta considera as negações, normas triangulares e as implicações fuzzy intuicionistas, considerando ainda as construções duais.

Entretanto, este estudo restringe-se à representabilidade destes conectivos a partir de operadores da LF. Portanto, este trabalho está focado no estudo das principais propriedades algébricas de conectivos fuzzy intuicionistas representáveis por conectivos fuzzy, no sentido proposto em (BACZYŃSKI, 2003, Definição 1).

Os objetivos específicos são brevemente descritos a seguir:

- Caracterizar o estado da arte da lógica fuzzy intuicionista e suas aplicações;
- Descrever a relevância do estudo da robustez de conjuntos fuzzy intuicionistas gerados por conectivos fuzzy intuicionistas representáveis;
- Revisar os principais conceitos da lógica fuzzy intuicionista, considerando as principais propriedades algébricas dos conectivos fuzzy intuicionistas representáveis;
- Analisar a extensão da metodologia introduzida em (LI et al., 2005), baseado no conceito de sensibilidade ponto a ponto de operadores fuzzy, para avaliação da robustez de conectivos fuzzy intuicionistas.

1.2 Motivação

A estruturação lógico-formal dos sistemas fuzzy fornece a base para geração de técnicas poderosas para a solução de processos incertos, vagos e nebulosos.

Robustez ou sensibilidade pode ser conceituada como propriedade fundamental destes sistemas lógicos, nos quais, as conclusões não são essencialmente modificadas, se fossem assumidas condições variáveis referentes a um parâmetro (δ) na modelagem do raciocínio fuzzy.

A noção de robustez é importante para compreensão de processos, cujo raciocínio dedutível seja desenvolvido e também para formalizar vias e métodos que incorporam a modelagem de erros e perturbações em um sistema de regras de raciocínio fuzzy.

A compreensão da robustez do raciocínio fuzzy intuicionista considera as medidas semelhantes de robustez de conectivos fuzzy. Assim, tal extensão (da análise da robustez de conectivos fuzzy) para a abordagem intuicionista contribui para evitar resultados inesperados no raciocínio baseado em LFI e motivam o desenvolvimento deste trabalho.

1.3 Metodologia

A metodologia utilizada na realização deste trabalho se resume no desenvolvimento das tarefas descritas a seguir:

1. Revisão bibliográfica e estudo das fundamentações da lógica fuzzy (LF);
 - 1.1 Estudo da negação fuzzy e relação de dualidade.

- 1.2 Estudo das funções de agregação fuzzy, t-normas, t-conormas e suas duais.
- 1.3 Revisão bibliográfica das propriedades inerentes às implicações e coimplicações fuzzy, bem como análise da relação de dualidade entre elas;
2. Estudo da análise da sensibilidade de conectivos da lógica fuzzy;
 - 2.1 Revisão bibliográfica da robustez de conectivos fuzzy, negações, normas e conormas triangulares, implicações e coimplicações fuzzy;
 - 2.2 Análise da robustez dos conectivos fuzzy Xor e XNOr, bi-implicações e bi-coimplicações fuzzy;
 - 2.3 Análise da robustez das construções duais.
3. Revisão bibliográfica e fundamentações da lógica fuzzy intuicionista;
 - 3.1 Estudo do índice fuzzy intuicionista
 - 3.2 Estudo das funções de negação fuzzy intuicionista;
 - 3.3 Revisão bibliográfica e estudo das funções de agregação fuzzy intuicionista;
 - 3.4 Revisão bibliográfica e estudo das propriedades das implicações e coimplicações fuzzy intuicionista;
 - 3.6 Revisão bibliográfica das implicações fuzzy intuicionista geradas por agregadores de implicação e coimplicação;
4. Estudo da robustez dos conectivos fuzzy intuicionista baseado na análise da δ -sensibilidade;
 - 4.1 Estudo da sensibilidade dos conectivos fuzzy intuicionista que são representáveis por composição de operadores fuzzy;
 - 4.2 Estudo da sensibilidade dos conectivos duais fuzzy intuicionista;

Evidencia-se que as atividades de revisão bibliográfica, análise e estudo compreendem:

- (i) estudo individual de várias referências bibliográficas;
- (ii) discussões no grupo de pesquisa;
- (iii) redação de artigos para publicação e contribuição com a área.

1.4 Organização do Texto

A apresentação deste texto está organizada em seis capítulos, brevemente resumidos logo a seguir.

No Capítulo 2, veremos um breve histórico do surgimento da lógica fuzzy e principais aplicações tecnológicas que fazem uso desta abordagem lógica. Mostram-se vantagens e

desvantagens do uso da LF bem como as aplicações e exemplos de onde utilizá-la. Apresentam-se conceitos básicos da LF; negação e a relação de dualidade entre operadores fuzzy, as funções de agregações: t-normas, t-conormas e a sua dualidade. Ainda falaremos das implicações e coimplicações fuzzy, mostrando a relação de dualidade entre eles.

No Capítulo 3, faremos uma análise de robustez na lógica fuzzy, enfatizando a sensibilidade dos conectivos assim como a dualidade fuzzy.

No Capítulo 4, fundamentais conceitos da LFI e dos conjuntos fuzzy intuicionista são considerados. Descrevemos a negação fuzzy intuicionista e a relação de dualidade entre funções fuzzy intuicionista. Ainda as funções de agregações t-normas e t-conormas fuzzy intuicionista são estudadas e também as implicações fuzzy intuicionista. Introduz-se uma análise das principais propriedades algébricas que estendem a lógica clássica e das propriedades inerentes à LFI, apresentando também alguns exemplos, além de implicações fuzzy intuicionistas geradas por funções de agregação por implicações e coimplicações. Mostramos ainda alguns exemplos presentes na literatura.

O Capítulo 5, discorre sobre a sensibilidade dos conectivos fuzzy intuicionista: robustez de negações fuzzy intuicionistas representáveis e a relação de dualidade; sensibilidade de (co)ormas triangulares intuicionistas e (co)implicações fuzzy intuicionistas.

No Capítulo 6, consideramos a conclusão do nosso trabalho e apresentamos alguns tópicos que poderiam dar continuidade à pesquisa.

2 LÓGICA FUZZY - CONECTIVOS E PROPRIEDADES

A LF é uma lógica multivalorada capaz de prover representação para as modelagens do mundo real pela habilidade em inferir conclusões e gerar respostas baseadas em informações vagas, ambíguas, qualitativamente incompletas e imprecisas (SIVANANDAM; SUMATHI; DEEPA, 2007; LEE, 2005; MCNEIL; THRO, 1994; JENSEN; SHEN, 2008).

Fundamentados na Teoria dos Conjuntos Fuzzy (Zadeh/1965) e com ampla aplicação no gerenciamento e controle de sistemas reais, os sistemas fuzzy têm sua modelagem lógica construída a partir de conectivos da LF, levando à obtenção de sistemas compreensíveis e de fácil manutenção (ZADEH, 1965).

Este capítulo apresenta as principais aplicações da LF considerando ambos os sentidos: (i) numa abordagem mais ampla, a contribuição no desenvolvimento de tecnologias e atividades industriais e comerciais são reportadas; e (ii) no sentido estrito, os conceitos formais referentes à estruturação lógica dos operadores, principais propriedades e construções duais são discutidos.

2.1 Aplicações da Lógica Fuzzy

No início do século 20, o lógico polonês Jan Łukasiewicz, foi reconhecido pelo desenvolvimento de conceitos que admitiam valores lógicos intermediários entre os valores Booleanos: falso (0) e o verdadeiro (1).

A estruturação da Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi introduzida em 1965 pelo matemático Lofti Asker Zadeh, com a publicação do artigo "Fuzzy Sets", combinando os conceitos da lógica clássica e os conjuntos de Łukasiewicz, definindo graus de pertinência aos elementos de um conjunto fuzzy. Ele observou que recursos tecnológicos, baseados na lógica booleana, não eram suficientes para automatizar atividades relacionadas a problemas de natureza industrial, biológica ou química.

A principal vantagem associada ao uso e desenvolvimento de sistemas baseados na Teoria dos Conjunto Fuzzy é obter uma modelagem matemática aos termos linguísticos subjetivos como "aproximadamente" ou "em torno de", viabilizando a produção de cálculos com informações imprecisas ao programar e armazenar conceitos vagos em computadores.

Entre 1970 e 1980 as aplicações industriais da lógica fuzzy aconteceram com maior importância na Europa e após 1980, o Japão iniciou seu uso com aplicações na indústria: (i) primeiramente, destaca-se a aplicação de sistemas fuzzy em um processo para tratamento de água proposto pela empresa Fuji Electric em 1983; (ii) e posteriormente a empresa Hitachi desenvolve um sistema de controle do metrô, baseado em LF, inaugurado em 1987.

Entretanto, foi por volta de 1990 que a LF despertou um maior interesse em empresas dos Estados Unidos.

Devido ao desenvolvimento, às inúmeras possibilidades práticas dos sistemas fuzzy e ao grande sucesso comercial de suas aplicações a LF é considerada hoje uma *teoria técnica* fundamental para uma abordagem com ampla aceitação na área de controle de processos industriais.

Sistemas cuja modelagem consideram a imprecisão e na sua especificação, mostram-se totalmente vagos quanto à resposta de retorno, passam a ser especificados logicamente a partir do uso da Teoria dos Conjuntos Fuzzy. E, neste contexto, sua abordagem lógica é considerada uma ferramenta de apoio à tomada de decisão promovendo maior credibilidade e confiabilidade ao sistema desenvolvido.

Como desvantagens da abordagem clássica, salientam-se:

- (i) impossibilidade de descrever a realidade em sua totalidade utilizando apenas os extremos, o falso (0) ou o verdadeiro (1);
- (ii) dificuldade na modelagem de inferências;
- (iii) rigidez da lei do meio excluído, não há uma interpretação para ‘meio-termo’ em contrapartida, o nosso raciocínio e a linguagem natural usam esse “meio-termo” na tomada de decisões;
- (iv) não aplicabilidade em relação às operações com conceitos subjetivos, resultando em uma modelagem drasticamente imprecisa.

Como vantagens da LF, destacam-se:

- (i) modelagem baseada em palavras e não apenas em números, ou seja, os valores verdadeiros são linguisticamente expressos;
- (ii) melhor tratamento das imprecisões;
- (iii) facilidade na especificação das regras de controle, em linguagem próxima à linguagem natural;
- (iv) uso de variáveis linguísticas nos deixa mais perto do pensamento humano;
- (v) simplificação na busca de solução de problemas.

Aliam-se a estas vantagens o intensivo uso e grande aplicabilidade da LF em sistemas comerciais e de desenvolvimento tecnológico, como no controle e automação de aeronaves (*Rockwell International Corporation*), operacionalização de comandos no Metrô de Sendai (*Hitachi*), inovação nos sistemas de transmissão automática (*Nissan, Subaru e NASA*).

Incluem-se nesta lista de vantagens também sua aplicação no desenvolvimento de sistemas especialistas na previsão do índice IBOVESPA, como direção ou sinal de mudança do nível do preço e/ou auxílio na decisão de investimentos e análise do mercado de ações (*Yamaichi Securities Co., Ltd.*), dentre tanto outros.

Contribuições relevantes devem ainda se reportar às áreas de otimização e planejamento, considerando o desenvolvimento de componentes eletrônicos, como em elevadores (*Hitachi, Fujitech e Mitsubishi*), de análise de sinais, aplicada em ajuste da imagem de TV (*Sony*), autofocus para câmera de vídeo (*Canon*), estabilizador de imagens de vídeo (*Panasonic*) e detecção de fraudes em cartão de crédito.

Seguem exemplos comerciais bem sucedidos que fazem uso de LF:

- (i) *Máquina de lavar*: distinguem o nível de sujeira das roupas e o tipo de tecido, para então determinar automaticamente as necessidades de água, detergente e potência.
- (ii) *Aspirador de pó*: capazes de identificar não apenas a sujeira, mas também a quantidade de pó no chão e variar a pressão da sucção em função disso.
- (iii) *Câmeras de vídeo*: geram imagens 'limpas' eliminando os efeitos distorcidos causados pela imperícia do cinegrafista e objetos em movimento.
- (iv) *Aparelhos condicionadores de ar*: variam a intensidade da operação dependendo do número de pessoas presentes no ambiente, mantendo a temperatura homogênea constantemente. O sistema fuzzy possui, para esse controle, diversificadas regras de aquecimento e de resfriamento, aquecendo e esfriando mais rápido e economizando em potência.

Verifica-se que no sentido mais amplo, o estudo da LF vem colaborando diretamente no desenvolvimento de novas tecnologias. Entretanto, estes avanços estão fundamentados no estudo mais estrito dos aspectos formais desta abordagem lógica.

2.2 Estudo no Sentido Estrito da Lógica Fuzzy

Nesta seção, consideram-se os principais resultados na formalização desta abordagem lógica, reportando aspectos mais teóricos e conceitos fundamentais, relacionados principalmente com as propriedades algébricas dos conectivos e operadores lógicos: negações, agregadores como normas e conormas triangulares, implicações e coimplicações, bi-implicações e bi-coimplicações, conectivos Xor e XNor, e outros.

Esta formalização fundamenta a modelagem de sistemas classificados como inteligentes com o uso por exemplo, de redes neurais e programação evolutiva (DENG FENG; CHUN TIAN, 2002; YE, 2011; MITCHELL, 2005; WANG; XIN, 2005). Tais sistemas são caracterizados como sistemas híbridos, cuja capacidade de aprendizado amplia ainda mais as áreas de aplicação de sistemas fuzzy e motivam a pesquisa mais formal e conceitual.

O estudo no sentido estrito da LF fundamenta uma vasta aplicabilidade na área das engenharias, de processamento de imagens (BUSTINCE et al., 2009), tomada de decisão (WANG; LI; ZHANG, 2012), mineração de dados, planejamento e otimização, como pode ser visto em (ATANASSOV et al., 2003), (HERRERA; MARTÍNEZ; SÁNCHEZ, 2005).

Em 1975 (ZADEH, 1975), os conjuntos fuzzy de tipo-2 (seu surgimento está relacionado com a insuficiência da lógica fuzzy tradicional em modelar as incertezas inerentes à definição das funções de pertinência dos antecedentes e consequentes em um sistema de inferência fuzzy (MENDEL, 2003)) foram apresentados como extensão dos sistemas fuzzy de tipo-1 (ou conjuntos fuzzy) para colaborar mais significativamente na modelagem de sistemas fuzzy envolvendo aproximação de dados aleatórios na evolução temporal. Nesta nova e abrangente abordagem, a incerteza sobre a função de pertinência é definida por um conjunto fuzzy do tipo-2. Tal abordagem contribui com a generalização da teoria dos conjuntos fuzzy, pois, se não há ocorrência de incerteza, então um conjunto fuzzy do tipo-2 se reduz a um conjunto fuzzy do tipo-1 (DUBOIS; PRADE, 1991, 2005; DESCHRIJVER; KERRE, 2005a,b; CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003).

Dentre as diversas extensões da LF, Krassimir T. Atanassov introduz a teoria dos conjuntos fuzzy intuicionista (ATANASSOV, 1986, 1994) e os fundamentos da Lógica Fuzzy Intuicionista (LFI) (LIN; XIA, 2006; DESCHRIJVER; KERRE, 2005b; CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003; CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2002). Esta teoria considera tanto a função de pertinência, como a função de não pertinência. E, diferentemente da teoria os conjuntos fuzzy, o complemento do grau de pertinência não é necessariamente igual ao grau de não-pertinência, sendo assim possível de medir a distância entre o grau de pertinência e de não-pertinência, conhecida como o grau de hesitação. Ampliando-se assim a forma de modelagem lógica.

Na integração destas aboragens lógicas, em (ATANASSOV; GARGOV, 1989), introduz-se os conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares, como uma generalização dos conjuntos intuicionistas, estendendo as funções de pertinência e de não-pertinência para abordagem intervalar. A teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares vêm sendo amplamente discutidas. Estudos apontam modelagem lógica na avaliação ambiental (ZENDEHDEL et al., 2009), seleção de fornecedores (WU et al., 2008), diagnósticos médicos (TSCHAN et al., 2009), políticas públicas (ZARGHAMI et al., 2008), entre outras (GEHRKE; WALKER; WALKER, 1996; G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004; DESCHRIJVER, 2007; LI; WANG; CHEN, 2010).

Incluindo outras extensões da LF do tipo-2, tem-se a Lógica Hesitante (TORRA, 2010; XIA; XU, 2011; XIA; XU; CHEN, 2013; BEDREGAL et al., 2014) e tantas outras obtidas pela

integração de diferentes extensões.

O estudo pode considerar diferentes formas de representação (implícita, explícita) dos conectivos fuzzy. Além desta, como descrito em (MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2005, 2008), outra contribuição poderá ser alcançada para diferentes classes. No caso das implicações fuzzy, tem-se as classes das R-implicações, S- e (S,N)-implicações, QL-implicações, D-implicações, XOR-implicações (DESCRIJVER; KERRE, 2005b; BEDREGAL et al., 2010).

Também pode ser considerado o estudo de correlações entre conjuntos fuzzy definidos a partir das propriedades verificadas por conectivos lógicos (BUSTINCE; BURILLO, 1995; GERSTAENKORN; MAŃKO, 1991). De especial interesse, neste trabalho, tem-se a análise de robustez baseada na sensibilidade dos conectivos fuzzy.

2.3 Conceitos Básicos

A LF estende os conceitos da lógica clássica – quando a teoria dos conjuntos fuzzy trata de “conjunto” no sentido clássico, a relação dicotômica de pertinência de um elemento a um conjunto.

A característica mais evidente da LF é considerar que entre dois valores (0 e 1) podem existir valores intermediários e estes valores são analisados de acordo com um grau de pertinência. Tal análise indica o nível no qual a informação pertence a um conjunto específico em determinado universo de contexto ou domínio (DUBOIS; OSTASIEWICZ; PRADE, 2000; CHEN; PHAM, 2001).

A função de pertinência estabelece uma correspondência entre um elemento x no domínio χ e um valor que indica o grau de pertinência do elemento x no conjunto A , isto é, quanto é possível para um elemento x em um universo X , pertencer ao conjunto fuzzy A .

Definição 2.3.1. Função de Pertinência (ZADEH, 1965): *Seja χ um conjunto universo não vazio. Um conjunto fuzzy A em χ é caracterizado pela função de pertinência $\mu_A : \chi \rightarrow U = [0, 1]$, sendo $\mu_A(x)$ o grau pertinência do elemento x no conjunto fuzzy A para todo $x \in \chi$.*

De acordo com a Definição 2.3.1, um conjunto fuzzy A referente a conjunto universo χ é um conjunto de pares ordenados, cada par consistindo de um elemento genérico x e o correspondente grau de pertinência $\mu_A(x)$:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in \chi\} \quad (1)$$

Os valores $\mu_A(x) = 1$ e $\mu_A(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência plena do elemento x no conjunto fuzzy A .

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos fuzzy referente a conjunto universo χ . O conjunto fuzzy $f[A_1, A_2, \dots, A_n]$ definido por um conetivo fuzzy $f : U^n \rightarrow U$, em relação ao universo \mathcal{X} , é

dado pela expressão

$$A_{f[A_1, A_2, \dots, A_n]} = \{(x, \mu_{A_{f[A_1, A_2, \dots, A_n]}}(x)) : x \in \mathcal{X}\}$$

sempre que $\mu_{A_{f[A_1, A_2, \dots, A_n]}} : \mathcal{X} \rightarrow U$ é uma função definida por:

$$\mu_{f[A_1, A_2, \dots, A_n]}(x) = f(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)), \forall x \in \mathcal{X}. \quad (2)$$

μ_A denota a função de pertinência que define a um conjunto fuzzy A $\mu_A(x)$ é a imagem em U de um elemento $x \in \mathcal{X}$ pela aplicação da função de pertinência que define o conjunto fuzzy A

Os principais conectivos fuzzy são descritos logo a seguir.

2.4 Negação Fuzzy

Apresentaremos as funções de negação fuzzy, também denominadas funções de complemento fuzzy, a partir das principais definições, propriedades e exemplos, considerando conceitos relacionados em (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003; KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000).

A função $N : U \rightarrow U$ é uma **negação fuzzy** se satisfaz as duas seguintes propriedades, para todos os valores $x, y \in U$:

$$N1: N(0) = 1 \text{ e } N(1) = 0;$$

$$N2: \text{ Se } x \geq y \text{ então } N(x) \leq N(y).$$

As negações fuzzy que satisfazem a propriedade involutiva

$$N3: N(N(x)) = x,$$

são chamadas de **negação fuzzy forte**. Além disso, uma negação fuzzy contínua é **estrita**, ou seja, estritamente decrescente, quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$N4: \text{ Se } x > y, \text{ então } N(x) < N(y).$$

Exemplificação 2.4.1. *Seguem alguns exemplos de negação fuzzy:*

1. Um exemplo típico de uma negação fuzzy forte é a **Negação Padrão** (Standard Negation), também conhecida com **Negação de Zadeh** definida pela função $N_S : U \rightarrow U$, dada por

$$N_S(x) = 1 - x. \quad (3)$$

2. Outro exemplo de negação fuzzy forte é dado pela expressão:

$$N_1(x) = \sqrt{1 - x^2}. \quad (4)$$

3. **Negação minimal e negação maximal** $N_m, N_M : U \rightarrow U$, são respectivamente definidas pelas expressões:

$$N_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (5)$$

$$N_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

Neste caso, para qualquer que seja a negação fuzzy $N : U \rightarrow U$, $N_m \leq N \leq N_M$.

Na sequência, considera-se a relação de dualidade entre operadores fuzzy.

Definição 2.4.1. (BAETS, 1997, Definição 12) Sejam N uma negação fuzzy forte em U e $f : U^n \rightarrow U$ uma função real. A **função N -dual de f** é a função definida pela expressão:

$$f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) = N^{-1}(f(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_n))), \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U^n. \quad (7)$$

De acordo com Definição 2.4.1, f e f_N são chamadas **funções mutuamente duais**.

Neste trabalho, tal como considerado em (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2004; LI; FANG, 2009; MAES; BAETS, 2009), quando $N = N_S$, a Equação (7) é dada pela expressão:

$$1 - f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n), \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U^n. \quad (8)$$

2.5 Funções de Agregação Fuzzy

Em (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Definição.2), uma função de agregação $M : U^2 \rightarrow U$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$A1: M(0, 0) = 0 \text{ e } M(1, 1) = 1;$$

$$A2: \text{Se } x \leq z \text{ então } M(x, y) \leq M(z, y), \forall x, y, z \in U;$$

$$A3: M(x, y) = M(y, x), \forall x, y \in U;$$

Funções de agregação satisfazendo a propriedade de idempotência

$$A4: M(x, x) = x, \forall x \in U,$$

são chamadas de *funções de agregação idempotentes*.

Sejam as funções de agregação $\wedge, \vee : U^2 \rightarrow U$, respectivamente definidas em (DESCHRIJVER; KERRE, 2005c, Definição 4.1) pelas expressões:

$$\wedge(x, y) = \min(x, y); \quad (9)$$

$$\vee(x, y) = \max(x, y), \forall x, y \in U. \quad (10)$$

Se M é uma função de agregação forte ou idempotente, então temos:

$$\wedge(x, y) \leq M(x, y) \leq \vee(x, y), \forall x, y \in U.$$

2.5.1 T-normas e T-conormas

As funções de agregação que qualificam as intersecções fuzzy e uniões fuzzy, são geralmente referidas na literatura como t-normas e t-conormas, respectivamente. No contexto da inclusão $\{0, 1\} \subseteq [0, 1]$, as normas e conormas triangulares são extensões das funções que representam a conjunção e disjunção na lógica clássica, respectivamente.

Definição 2.5.1. (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000) Uma **norma triangular** (t-norma) é uma função $T : U^2 \rightarrow U$, satisfazendo as seguintes propriedades, para todo $u, v, x, y, z \in U$:

T1: $T(x, y) = T(y, x)$ (Comutatividade);

T2: $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (Associatividade);

T3: $T(x, y) \leq T(u, v)$, se $x \leq u$ e $y \leq v$ (Monotonicidade);

T4: $T(x, 1) = x$ (Elemento neutro).

Exemplificação 2.5.1. De acordo com (DUBOIS; PRADE, 2000) a Tabela 1 apresenta os exemplos mais referenciados e utilizados de t-normas.

Nome	Expressão Algébrica de t-normas
Intersecção-Padrão:	$T_M(x, y) = \min \{x, y\}$
Produto Algébrico:	$T_P(x, y) = x \cdot y$
Intersecção Drástica:	$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \text{ e } y < 1 \\ \min\{x, y\}, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
Łukasiewicz:	$T_L(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$
Nilpotente Mínimo:	$T_m(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x + y \leq 1 \\ \min\{x, y\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Tabela 1: Exemplificação de normas fuzzy triangulares

Definição 2.5.2. (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000) Uma **t-conorma triangular** (s-norma) é uma função $S : U^2 \rightarrow U$, satisfazendo as seguintes propriedades, para todo $u, v, x, y, z \in U$:

S1: $S(x, y) = S(y, x)$ (Comutatividade);

S2: $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ (Associatividade);

S3: $S(x, y) \leq S(u, v)$ se $x \leq u$ e $y \leq v$ (Monotonicidade);

S4: $S(x, 0) = x$ (Elemento neutro).

Nome	Expressão Algébrica de t-conormas
União Padrão:	$S_M(x, y) = \max\{x, y\}$
Soma Probabilística:	$S_P(x, y) = x + y - xy$
União Drástica:	$S_D(x, y) = S_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \text{ e } 0 < y \\ \max\{x, y\}, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
Łukasiewicz:	$S_L(x, y) = \min\{x + y, 1\}$
Nilpotente Máximo:	$S_m(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x + y \geq 1 \\ \max\{x, y\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Tabela 2: Exemplificação de conormas fuzzy triangulares

Exemplificação 2.5.2. Analogamente, de acordo com (DUBOIS; PRADE, 2000) a Tabela 2 apresenta os principais exemplos de t-conormas.

Logo a seguir, discute-se o conceito de t-norma e t-conorma duais.

Proposição 2.5.1. (ZANOTELLI et al., 2015) A função $T(S) : U^2 \rightarrow U$ é uma t-norma (t-conorma) se, e somente se, existe uma t-conorma T_N (t-norma S_N) tal que para todo $(x, y) \in U^2$, uma das seguintes equivalências são satisfeitas:

$$T_N(x, y) = N(T(N(x), N(y))), \quad (11)$$

$$S_N(x, y) = N(S(N(x), N(y))). \quad (12)$$

A t-conorma T_N dada pela Equação (11) é denominada de t-conorma derivada de T pela relação de dualidade e, analogamente a t-norma S_N dada pela Equação (12) é chamada de t-norma derivada de S pela relação de dualidade, ambas definidas com respeito a negação fuzzy N .

Proposição 2.5.2. (FODOR; ROUBENS, 1994; KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000) Sejam as t-normas e t-conormas apresentadas na Exemplificação 2.5.1 e Exemplificação 2.5.2, respectivamente. Então, tem-se que (T_M, S_M) , (T_P, S_P) , (T_D, S_D) , (T_L, S_L) e (T_nM, S_nM) são pares de t-normas e t-conormas mutuamente duais em relação a N_S (negação padrão).

2.6 Conectivos Xor Fuzzy e XNor Fuzzy

(ZANOTELLI et al., 2013) O conectivo fuzzy *ou exclusivo* (Xor) é definido pela função $E : U^2 \rightarrow U$ satisfazendo, para todos $x, y \in U$, as seguintes propriedades:

E0: $E(1, 1) = E(0, 0) = 0$ e $E(1, 0) = 1$;

E1: $E(x, y) = E(y, x)$;

E2 (a) Se $x \leq y$ então $E(0, x) \leq E(0, y)$;
 (b) Se $x \leq y$ então $E(1, x) \geq E(1, y)$.

Analogamente, uma função $D : U^2 \rightarrow U$ é um *nor exclusivo fuzzy* (XNor) se, para todo $x, y \in U$, satisfaz os seguintes:

$$\mathbf{D0:} \quad D(1, 1) = D(0, 0) = 1 \text{ e } D(0, 1) = 0;$$

$$\mathbf{D1:} \quad D(x, y) = D(y, x);$$

$$\mathbf{D2:} \quad (\text{a}) \text{ Se } x \leq y \text{ então } D(0, x) \geq D(0, y);$$

$$(\text{b}) \text{ Se } x \leq y \text{ então } D(1, x) \leq D(1, y).$$

$\mathcal{X}(\mathcal{D})$ denota a família de todos conectivos X(N)or. Para todo $x \in U$, a função $(N_D)N_E : U \rightarrow U$, dada pela

$$(N_D(x) = D(0, x)) \quad N_E(x) = E(1, x),$$

é uma negação fuzzy subjacente ao conectivo fuzzy (XNor D) Xor E.

Algumas propriedades extras podem ser considerados razoáveis para o conectivo XOR fuzzy, a fim de obter uma caracterização de algumas classes de conectivos Xor fuzzy. As propriedades consideradas no presente trabalho estão listados abaixo:

$$\mathbf{E3:} \quad E(x, x) \neq 1;$$

$$\mathbf{E4:} \quad E(x, 0) = x;$$

$$\mathbf{E5:} \quad N_E \text{ é uma negação fuzzy estrita};$$

$$\mathbf{E6:} \quad N_E \text{ é uma negação forte fuzzy};$$

$$\mathbf{E7:} \quad E(x, y) = 1 \rightarrow (x = 1 \text{ e } y = 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ e } y = 1);$$

$$\mathbf{E8:} \quad E(x, y) = 0 \rightarrow (x = 1 \text{ e } y = 1) \text{ ou } (x = 0 \text{ e } y = 0).$$

$$\mathbf{E9:} \quad E(x, y) = E(N(y), N(x)).$$

Analogamente, estas propriedades podem ser reescrita a partir de **D3** a **D9** de modo a obter uma caracterização de algumas classes de conectivos fuzzy XNor .

Proposição 2.6.1. (BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009, Proposição 3.4) Sejam T , S e N , uma t -norma, uma t -conorma e uma negação fuzzy , respectivamente. A função $E_{T,S,N}(D_{S,T,N}) : U^2 \rightarrow U$ é denominada conectivo fuzzy f -X(N)or e definida pela expressão:

$$E_{T,S,N}(x, y) = T(S(x, y), N(T(x, y))); \quad (13)$$

$$D_{S,T,N}(x, y) = S(T(x, y), N(S(x, y))), \forall x, y, z \in U. \quad (14)$$

Proposição 2.6.2. (BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009, Proposição 16) Sejam N uma negação fuzzy forte e T_N (S_N) a função N -dual de uma t -(co)norma T (S). A função $(E_{S,T,N})_N: U^2 \rightarrow U$ dada por

$$(E_{S,T,N})_N(x, y) = D_{T_N, S_N, N}(x, y), \quad \forall x, y \in U, \quad (15)$$

é um conectivo fuzzy X Nor em \mathcal{D} denominado função N -dual de $E_{S,T,N}$.

Baseado na Proposição 2.6.2, $(D_{S,T,N}, E_{T,S,N})$ é dito ser um par funções mútuas N -duais

Portanto, a classe de conectivos f - $X(N)$ or preserva a construção dual, significando que: a partir da negação padrão em conjunto com um par de t -norma e t -conorma N_S -duais, como (T_P, S_P) , podemos obter um par de f -Xor e f -XNor N_S -duais como $(E_{T_P, S_P, N_S}, D_{S_P, T_P, N_S})$.

Proposição 2.6.3. (BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2013, Proposição 9) Uma função $E_{T,S,N}$ ($D_{S,T,N}$) em \mathcal{X} (\mathcal{D}) verifica as propriedades de **E3** (**D3**) para **E8** (**D8**).

Proposição 2.6.4. Sejam N uma SFN, S e T uma t -conorma e uma t -norma tal que (S, T) é um par de funções mútuas N -duais. Para todo $x, y \in U$, o conectivo $X(N)$ or fuzzy $E_{T,S,N}$ ($D_{S,T,N}$) verifica **E9** (**D9**).

Prova. Para todos $x, y \in U$, o seguinte é verificado:

$$\begin{aligned} E_{T,S,N}(N(y), N(x)) &= T(S(N(y), N(x)), N(T(N(y), N(x)))) \\ &= T(S(N(x), N(y)), N(T(N(x), N(y)))) \\ &= T(N(T(x, y), S(x, y))) \\ &= T(S(x, y), N(T(x, y))) = E_{T,S,N}(x, y) \end{aligned}$$

Analogamente, pode se provar que $D_{S,T,N}$ verifica **D9**. Portanto Proposição 2.6.4 é provada.

Proposição 2.6.5. (ZANOTELLI et al., 2013, Proposição 4) Para todo $x, y \in U$, o conectivo Xor e XNor fuzzy E_{T_P, S_P, N_S} e D_{S_P, T_P, N_S} , respectivamente dada como

$$E_{T_P, S_P, N_S}(x, y) = x + y - xy - x^2y - xy^2 + x^2y^2; \quad (16)$$

$$D_{S_P, T_P, N_S}(x, y) = 1 - x - y + xy + xy^2 + x^2y - x^2y^2, \quad (17)$$

são funções mútuas N_S -duais.

A partir das Proposições 2.6.2 e 2.6.5, para todo $x, y \in U$, é válido que

$$(E_{T_P, S_P, N_S})_{N_S}(x, y) = D_{S_P, T_P, N_S}(x, y), \quad (18)$$

$$(D_{S_P, T_P, N_S})_{N_S}(x, y) = E_{T_P, S_P, N_S}(x, y). \quad (19)$$

- Representação gráfica dos conectivos E_{T_P, S_P, N_S} e D_{S_P, T_P, N_S} :

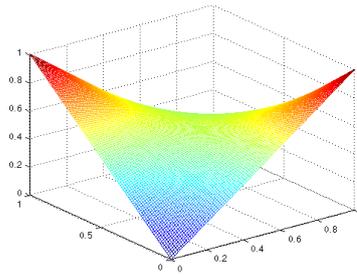


Figura 1: Fuzzy Xor E_{S_P, T_P, N_S}

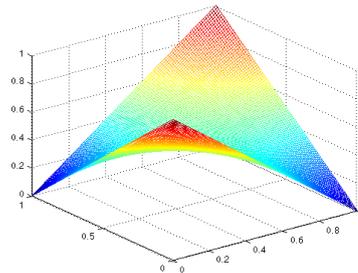


Figura 2: Fuzzy XNor D_{T_P, S_P, N_S}

2.7 Implicação Fuzzy e Coimplicação Fuzzy

Tem-se uma diversidade de aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy, e por consequência, existem diversas maneiras de definir uma implicação fuzzy. Veja, por exemplo, (BALASUBRAMANIAM, 2007; BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003; FODOR; ROUBENS, 1994; FODOR, 1995; RUAN; KERRE, 1993; SAINIO; TURUNEN; MESIAR, 2008; SHI; RUAN; KERRE, 2007; SHI et al., 2008; YAGER, 1983, 1999, 2004; LIN; XIA, 2006).

A literatura mostra um consenso em todas essas definições: uma implicação fuzzy deverá apresentar o comportamento da implicação clássica quando o caso crisp é considerado, ou seja, as implicações fuzzy devem satisfazer as mesmas condições das implicações clássicas para os extremos do intervalo unitário (MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2007; MAS et al., 2007; PEI, 2008; RUIZ-AGUILERA; TORRENS, 2009).

Neste caso, uma implicação fuzzy estende uma implicação clássica da lógica Booleana, geralmente expressa por " $p \Rightarrow q$ " significando que p é suficiente para deduzir q . Esta extensão, refere-se ao fato de que uma implicação fuzzy aplicada aos extremos do intervalo unitário sempre coincide com a implicação clássica, mas considera todas as demais possibilidades deste intervalo como argumentos, modelando a incerteza entre o totalmente verdadeiro (1) e o totalmente falso (0).

Definição 2.7.1. (SHI; RUAN; KERRE, 2007) Uma função binária $I : U^2 \rightarrow U$ é um **implicador fuzzy** desde que satisfaça as seguintes condições de contorno:

$$I1: I(1,1) = I(0,1) = I(0,0) = 1 \quad e \quad I(1,0) = 0.$$

Assim, os implicadores fuzzy são extensões das implicações da lógica clássica (MAS et al., 2007; NAVARA, 1999). Essas condições são, naturalmente, condições mínimas para um operador de implicação. Várias outras propriedades potenciais dos operadores de implicação são listados na literatura (FODOR, 1991; YAGER, 1999).

Uma implicação fuzzy $I : U^2 \rightarrow U$ é um implicador fuzzy, satisfazendo, $\forall x, y, z \in U$, as seguintes condições:

I2: Se $x \leq z$ então $I(x, y) \geq I(z, y)$ (antimonotonicidade no primeiro argumento);

I3: Se $y \leq z$ então $I(x, y) \leq I(x, z)$ (isotonicidade no segundo argumento);

I4: $I(0, y) = 1$ (dominância da falsidade);

I5: $I(x, 1) = 1$ (dominância da verdade do conseqüente);

I6: $I(1, y) = y$ (princípio da neutralidade à esquerda).

Definição 2.7.2. Uma função binária $I : U^2 \rightarrow U$ é uma **implicação fuzzy** segundo (FODOR; ROUBENS, 1994) se ela satisfaz as seguintes propriedades $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$, descritas acima.

Na sequência, tratam-se os conceitos referentes às coimplicações fuzzy, a partir de definição, propriedades, exemplificações e relações entre as propriedades.

Definição 2.7.3. (RUIZ-AGUILERA; TORRENS, 2004) Uma função binária $J : U^2 \rightarrow U$ é chamada **coimplicador fuzzy** se satisfaz as seguintes condições de contorno:

J1: $J(1,1) = J(1,0) = J(0,0) = 0$ e $J(0,1) = 1$.

Esta definição assegura que uma coimplicação fuzzy satisfaz as condições que definem uma coimplicação clássica.

Como considerado em (LIN; XIA, 2006), se uma função de implicação fuzzy satisfaz as propriedades I_1 à I_6 coimplicação fuzzy pode também satisfazer as propriedades correspondentes. Assim, além das condições de contorno na (Definição 2.7.3), $\forall x, y, z \in U$, tem-se que:

J2: Se $x \leq z$ então $J(x, y) \geq J(z, y)$ (antimonotonicidade no primeiro argumento);

J3: Se $y \leq z$ então $J(x, y) \leq J(x, z)$ (isotonicidade no segundo argumento);

J4: $J(1, y) = 0$ (dominância da falsidade);

J5: $J(x, 0) = 0$ (dominância da verdade do conseqüente);

J6: $J(0, y) = y$ (princípio da neutralidade à esquerda).

Logo a seguir, a relação de dualidade entre implicações fuzzy e coimplicações fuzzy é discutida na Proposição 2.7.1, indicando a condição com a qual uma implicação fuzzy dá origem a uma coimplicação fuzzy. Significando que podemos construir uma coimplicação fuzzy I_N como a correspondente estrutura dual da implicação fuzzy I .

Proposição 2.7.1. *A função $(J_N)I_N : U^2 \rightarrow U$ é uma (co)implicação fuzzy, se, e somente se, existem uma coimplicação (implicação) fuzzy $J(I) : U^2 \rightarrow U$ e uma negação fuzzy forte $N : U \rightarrow U$ tais que, $\forall x, y \in U^2$, quaisquer duas igualdades seguintes são funções equivalentes:*

$$I_N(x, y) = N(I(N(x), N(y))) \quad (20)$$

$$J_N(x, y) = N(J(N(x), N(y))) \quad (21)$$

Prova. *Direto da Equação(7), na Definição 2.4.1.*

Exemplificações de funções de implicação coimplicação fuzzy são nominadas em (FEI; XIYANG; HONGXING, 2003; FEI; YANBIN; HONGXING, 2004).

A Tabela 3, apresenta a expressão algébrica das implicações e correspondentes coimplicações consideradas neste texto, considerando \vee como operador máximo na Equação (10) e \wedge como operador mínimo na Equação (9). A cada linha da Tabela 3, associa-se um par (I, J) de funções mutuamente duais, ou seja, cada par de funções I e J satisfaz as Equações (20) e (21), respectivamente.

	Implicação Fuzzy	Coimplicação Fuzzy
KD-Kleene-Dienes:	$I(x, y) = 1 - x \vee y$	$J(x, y) = 1 - x \wedge y$
RC-Reichenbach:	$I(x, y) = 1 - x + xy$	$J(x, y) = y - xy$
LZ-Łukasiewicz:	$I(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y; \\ 1 - x + y & \text{se } x > y. \end{cases}$	$J(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq y; \\ y - x & \text{se } x < y. \end{cases}$
Zadeh:	$I(x, y) = (1 - x) \vee (x \wedge y)$	$J(x, y) = (1 - x) \wedge (x \vee y)$
P.C.:	$I(x, y) = xy$	$J(x, y) = x + y - xy$
B.C.:	$I(x, y) = 0 \vee (x + y - 1)$	$J(x, y) = 1 \wedge (x + y)$
P.D.:	$I(x, y) = x + y - xy$	$J(x, y) = xy$
B.D.:	$I(x, y) = 1 \wedge (x + y)$	$J(x, y) = 0 \vee (x + y - 1)$

Tabela 3: Implicações, coimplicações fuzzy e dualidade relacionada.

2.7.1 Classes (Co)Implicação Fuzzy

A literatura apresenta muitas classes de (co)implicações (veja (BAETS, 1997; DUBOIS; PRADE, 2000; BACZYŃSKI; JAYARAM, 2008; BACZYŃSK; JAYARAM, 2009; MAS et al., 2007; BACZYŃSKI; JAYARAM, 2008) e (MAES; BAETS, 2009)). Neste estudo são consideradas quatro classes descritas logo a seguir.

2.7.1.1 Classe **(S,N)-implicações**

São funções indicadas por $I_{S,N} : U^2 \rightarrow U$ e definidas pelas expressões:

$$I_{S,N}(x, y) = S(N(x), y), \forall x, y \in U, \quad (22)$$

sempre que S é uma t-conorma e N é uma negação fuzzy. Esta classe generaliza a seguinte equivalência clássica: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. Se N é uma negação fuzzy forte, então $I_{S,N}$ é uma implicação forte referida como S-implicação. A correspondente construção N -dual é uma **S-coimplicação** dada por:

$$(I_{S,N})_N(x, y) = S_N(N(x), y), \forall x, y \in U, \quad (23)$$

sendo S_N a função N -dual da t-conorma S .

2.7.1.2 Classe **QL-implicações** (Quantum implicações)

Uma QL-implicação é uma função $I_{S,N,T} : U^2 \rightarrow U$, dada por

$$I_{S,N,T}(x, y) = S(N(x), T(x, y)), \forall x, y \in U, \quad (24)$$

sempre que T é uma t-norma, S uma t-conorma e N uma negação fuzzy. Esta classe provê semântica e o operador de Sasaki: $p \rightarrow_S q \equiv \neg p \vee (p \wedge q)$. Na construção N -dual de uma QL-implicação tem-se QL-coimplicação $(I_{S,T,N})_N : U^2 \rightarrow U$, dada por

$$(I_{S,T,N})_N(x, y) = S_N(N(x), T_N(x, y)), \forall x, y \in U. \quad (25)$$

2.7.1.3 Classe **D-implicação** (Dishkant Implicações)

Uma D-implicação é uma função $I_{S,T,N} : U^2 \rightarrow U$, dada por:

$$I_{S,T,N}(x, y) = S(T(N(x), N(y)), y), \forall x, y \in U, \quad (26)$$

sempre que T é uma t-norma, S uma t-conorma e N uma negação fuzzy.

Esta classe de implicações foi definida a partir do operador de Dishkant: $p \rightarrow q \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee q$. Quando a t-conorma S é contínua, uma QL-implicação e uma D-implicação coincidem se, e somente se, estas funções verificam a simetria contrapositividade (MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2006). A função N -dual de uma D-implicação é uma D-coimplicação dada por

$$(I_{S,T,N})_N(x, y) = S_N(T_N(N(x), N(y)), y), \forall x, y \in U. \quad (27)$$

2.7.1.4 Classe f -Xor Implicação e Coimplicação

A implicação f -Xor é baseada na equivalência lógica clássica $\alpha \rightarrow \beta \equiv \alpha \oplus \neg(\alpha \wedge \beta)$. Em LF, a conjunção e a disjunção de tal equivalência são interpretadas por t -norma (T) e uma t -conorma (S).

Proposição 2.7.2. *Seja $T(S)$, N e $E(D)$ uma t -(co)norma, uma negação fuzzy e um conectivo fuzzy Xor ($XNor$), respectivamente. Uma função $I_{E,T,N}(J_{D,S,N}) : U^2 \rightarrow U$, chamada como fuzzy f -Xor-(co)implicação, é dada por*

$$I_{E,T,N}(x, y) = E(x, N(T(x, y))); \quad (28)$$

$$J_{D,S,N}(x, y) = D(x, N(S(x, y))). \quad (29)$$

Prova. *Conclui-se que $I_{E,T,N}$ satisfaz as propriedades:*

$$I_{E,T,N}(0, 0) = E(0, 1) = 1; \text{ e } I_{E,T,N}(0, 1) = E(0, 1) = 1;$$

$$I_{E,T,N}(1, 1) = E(1, 0) = 1; \text{ e } I_{E,T,N}(1, 0) = E(1, 1) = 0.$$

Portanto, $I_{E,T,N}$ é uma implicação fuzzy.

Funções Duais de f -Xor implicação são obtidas pela composição da negação fuzzy e conectivos fuzzy (f -Xor, t -normas, t -conormas) definida como coimplicações, também obtidas pela composição de funções duais de tais conectivos.

Proposição 2.7.3. *(BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2013, Proposição 39) Sejam N uma SFN, $(S_N)T_N$ e $(D_N)E_N$ funções N -duais de uma (t -conorma S) t -norma T e um ($XNor$ D) Xor E fuzzy. A função $(J_{D,S,N})_N (I_{E,T,N})_N : U^2 \rightarrow U$, dada por*

$$(J_{D,S,N})_N(x, y) = I_{D_N,S_N,N}(x, y); \quad (30)$$

$$(I_{E,T,N})_N(x, y) = J_{E_N,T_N,N}(x, y), \quad (31)$$

para todos $x, y \in U$, é uma (co)implicação fuzzy chamada f - $X(N)or$ (co)implicação fuzzy.

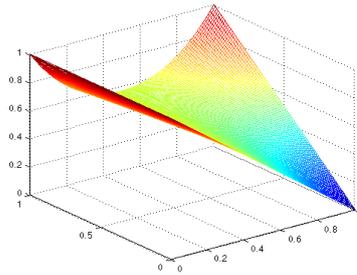
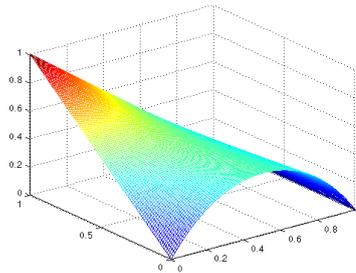
Proposição 2.7.4. *(ZANOTELLI et al., 2013, Proposição 8) As funções $I_{E_{T_P,S_P,N_S},T_P,N_S}$ e $(J_{D_{S_P,T_P,N_S},S_P,N_S})$, dada para todos $x, y \in U$, pelas seguintes expressões*

$$I_{E_{T_P,S_P,N_S},T_P,N_S}(x, y) = (1 - xy + x^2y)(1 - x + x^2y); \quad (32)$$

$$J_{D_{S_P,T_P,N_S},S_P,N_S}(x, y) = (x - (x-1)^2)(y-1)((x-1)(y-1) + (x-1)^2(y-1) - 1) + 1. \quad (33)$$

*são uma f -Xor implicação fuzzy e uma f -XNor coimplicação fuzzy respectivamente, verificando **I1 (J1)**, **I2 (J2)** e **I3 (J3)**.*

- Representação gráfica: f -Xor implicação e f -XNor coimplicação

Figura 3: Fuzzy f -Xor implicaçãoFigura 4: Fuzzy f -XNor coimplicação

2.7.2 Xor Bi-Implicação fuzzy e Xor Bi-(Co)Implicação fuzzy

Na lógica clássica, a negação de um conectivo Xor resulta em uma bi-implicação (ou equivalência). Em (BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2013), considera-se um Xor E fuzzy e uma negação N , a função $B_{E,N} : U^2 \rightarrow U$ é uma **bi-implicação fuzzy** (ou **fuzzy equivalente**) dada por:

$$B_{E,N}(x, y) = N(E(x, y)), \forall x, y, \in U. \quad (34)$$

que satisfaz as seguintes propriedades, para todos $x, y \in U$:

B0: $B(1, 1) = B(0, 0) = 1$ e $B(1, 0) = 0$;

B1: $B(x, y) = B(y, x)$;

B2 Se $x \leq y$ então $B(0, x) \geq B(0, y)$; Se $x \leq y$ então $B(1, x) \leq B(1, y)$.

Dualmente, uma função $C_{D,N} : U^2 \rightarrow U$ é uma **fuzzy bi-(co)implicação** se, para todos $x, y \in U$, mantenha as seguintes propriedades:

C0: $C(1, 1) = C(0, 0) = 0$ e $C(0, 1) = 1$;

C1: $C(x, y) = C(y, x)$;

C2: Se $x \leq y$ então $C(0, x) \leq C(0, y)$; Se $x \leq y$ então $C(1, x) \geq C(1, y)$.

De acordo com (BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2013, Teorema2), o conectivo fuzzy Xor E determina uma classe de equivalência fuzzy mais geral do que a equivalência fuzzy descrita em (FODOR, 1991) e (FODOR; ROUBENS, 1994).

Baseado no princípio da dualidade, as seguintes proposições mostram que a bi-implicação fuzzy $B_{E,N}$ pode ser expressa como um conectivo fuzzy XNor $D_{S,T,N}$, na classe dos conectivos f -Xor.

Teorema 2.7.1. *Sejam N uma SFN, $(S_N)T_N$ e $(D_N)E_N$ funções N -duais de uma $(t$ -conorma S) t -norma T e um $(XNor D)$ Xor E fuzzy. A função $B_{E_{S,T,N,N}}(C_{D_{T,S,N,N}})_N : U^2 \rightarrow U$, definida pela expressão*

$$B_{E_{S,T,N,N}}(x, y) = D_{S,T,N}(x, y); \quad (35)$$

$$C_{D_{S,T,N,N}}(x, y) = E_{T,S,N}(x, y); \quad (36)$$

para todos $x, y \in U$, é uma bi-(co)implicação fuzzy chamada **fuzzy f -X(N)or bi-(co)implicação**. Adicionalmente, eles são funções N -duais:

$$(B_{E,N})_N(x, y) = C_{D_{N,N}}(x, y); \quad (37)$$

$$(C_{D,N})_N(x, y) = B_{E_{N,N}}(x, y), \quad (38)$$

Prova. *A prova resulta dos resultados apresentados nas Proposições 2.6.2, 2.6.3 e 2.6.4. Desde que N seja uma SFN, E e D sejam funções N -duais verificando as propriedades da comutatividade e contra-simetria.*

3 ROBUSTEZ DE CONECTIVOS FUZZY

Análise de robustez na LF tem sido relevante para a área de controle fuzzy, contribuindo para análise de estabilidade de controladores fuzzy (JIN; LI; LI, 2007). Trabalhos significativos foram desenvolvidos nesta área de controle fuzzy, cujo problema principal de investigação está relacionado com a análise de estabilidade e robustez dos controladores fuzzy, veja exemplos em (CAI, 2001; LI, 2008; ZHANG; CAI, 2004). Em (YING, 1999), foram propostos os conceitos de robustez máxima e média para operadores sobre conjuntos fuzzy.

A análise de sensibilidade tornou-se uma ferramenta importante na avaliação da confiabilidade de estruturas de engenharia. Dado um sistema de produção, a questão de quanto a perturbação nas variáveis de entrada têm influência mais decisiva sobre a perturbação nas variáveis de saída é sempre importante. Em (OBERGUGGENBERGER; SCHMELZER; FELLIN, 2008), métodos de correlações de modelagem e interatividade em tais sistemas são investigados. Em (LI; LI; XIE, 2011), a propriedade fundamental da robustez do valor de intervalo de inferência fuzzy é discutida. Além disso, o intervalo robusto para matrizes sobre a (\max, \min) -Álgebra (envolvendo matrizes fuzzy) é estudado e condições equivalentes para abordagem intervalar de matrizes fuzzy são apresentadas em (MOLNAROVA; MYSKOVA; PLAVKA, 2013).

A noção de δ -sensibilidade de conjuntos fuzzy é usada em (CAI, 2001) para estudar a robustez de raciocínio fuzzy baseado em operadores de implicação fuzzy, incluindo inferência *modus tollens* e *modus ponens* generalizadas. Nesta abordagem, $\delta \in U$ denota a maior perturbação sobre as variáveis do sistema. Outras relações entre a robustez do raciocínio fuzzy, conjunções fuzzy e classes de operadores de implicação fuzzy foram apresentados em (JIN; LI; LI, 2007).

Este capítulo discute o estudo da robustez com base na δ -sensibilidade e dualidade nas principais classes de (co)implicações fuzzy enfatizando a análise da robustez dos conectivos Xor e XNor, X(N)or (co)implicação e X(N)or bi-(co)implicação.

3.1 Robustez dos Conectivos Fuzzy

O estudo da δ -sensibilidade de uma função $f : U^n \rightarrow U$ no ponto \mathbf{x} , ou análogo, a sensibilidade ponto a ponto de $f : U^n \rightarrow U$ está baseada no trabalho proposto em (LI et al., 2005). Neste estudo, tem-se a ênfase na classe de (co)implicações fuzzy.

Definição 3.1.1. (LI et al., 2005, Definição 1) *Sejam $f : U^n \rightarrow U$, $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in U^n$. Tem-se que:*

(i) *a δ -sensibilidade de f no ponto \mathbf{x} , indicado por $\Delta_f(\mathbf{x}, \delta)$, é definida por*

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| : |x_i - y_i|_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \leq \delta\}. \quad (39)$$

(ii) *a δ -sensibilidade máxima de f é definida pela expressão:*

$$\Delta_f(\delta) = \bigvee_{\mathbf{x} \in U^n} \Delta_f(\mathbf{x}, \delta);$$

(iii) *f é pelo menos tão robusto quanto g no ponto \mathbf{x} , significa que*

$$\delta > 0 \Rightarrow \Delta_f(\mathbf{x}, \delta) \leq \Delta_g(\mathbf{x}, \delta);$$

(iv) *f e g são igualmente robusto no ponto \mathbf{x} , significa que*

$$\delta > 0 \Rightarrow \Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_g(\mathbf{x}, \delta);$$

(v) *f é mais robusto do que g no ponto \mathbf{x} , significa que*

$$\delta > 0 \Rightarrow \Delta_f(\mathbf{x}, \delta) < \Delta_g(\mathbf{x}, \delta);$$

A robustez pode ser concebida como uma propriedade associada à modelagem lógica de sistemas computacionais, cujo principal objetivo é garantir que as conclusões não são essencialmente alteradas, se as condições de premissas variarem dentro de parâmetros razoáveis.

E, uma vez que conectivos fuzzy (principalmente implicações e co-implicações) são elementos importantes no raciocínio em sistemas fuzzy, a investigação correspondente da δ -sensibilidade dos conectivos fuzzy, discutida neste Capítulo, nos termos da Definição 3.1.1(i), fundamenta a abordagem fuzzy intuicionista considerada nos próximos capítulos.

Na Definição 3.1.1, comparamos também a robustez de duas funções, $f, g : U^n \rightarrow U$ com base em sua δ -sensibilidade no ponto $\mathbf{x} \in U^n$. Desse modo, analisamos a δ -sensibilidade no ponto $\mathbf{x} \in U^n$ de conectivos fuzzy considerando a propriedade de (anti, iso, mono)tonicidade

em seus argumentos. Esta análise de robustez baseada na δ -sensibilidade se direciona às principais classes de (co)implicações fuzzy.

Observação 3.1.1. A análise da robustez baseada na δ -sensibilidade de uma função $f : U^n \rightarrow U$ em um ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U^n$, com $\delta \in U$ se reporta à análise da monotonicidade de seus n argumentos x_1, x_2, \dots, x_n , sempre que $x_i \in U, 1 \leq i \leq n$.

Neste contexto, para facilitar a expressão matemática dos termos referentes a esta análise, na sequência deste texto, consideramos $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$ e as seguintes notações:

$$f[\mathbf{x}] \equiv f((x - \delta) \vee 0, (y - \delta) \vee 0); \quad (40)$$

$$f[\underline{\mathbf{x}}] \equiv f((x - \delta) \vee 0, (y + \delta) \wedge 1); \quad (41)$$

$$f[\overline{\mathbf{x}}] \equiv f((x + \delta) \wedge 1, (y - \delta) \vee 0); \quad (42)$$

$$f[\mathbf{x}] \equiv f((x + \delta) \wedge 1, (y + \delta) \wedge 1). \quad (43)$$

Observação 3.1.2. Seja $f : U^n \rightarrow U$. Tem-se que:

(i) f é uma **função iso(anti)monotônica na i -ésima componente** se, e somente se, $\forall x_i, x_i \in U$ e i inteiro tal que $1 \leq i$, tem-se que

$$x_i \leq x'_i \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \leq f(x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_n); \quad (44)$$

$$x_i \leq x'_i \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \geq f(x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_n), \quad (45)$$

(ii) f é uma **função monotônica** se, e somente se, $\forall x_i, x'_i \in U$ e i inteiro, tal que $1 \leq i \leq n$ tem-se que

$$x_i \leq x'_i \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_n). \quad (46)$$

(iii) f é uma **função de ordem reversa** se, $\forall x_i, x'_i \in U$, tal que $1 \leq i \leq n$, tem-se que

$$x_i \leq x'_i \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n). \quad (47)$$

(iv) Em particular, $f : U \rightarrow U$ é denominada **função de ordem reversa**, se $i = 1$ na Eq.(45), ou seja, f satisfaz a condição

$$x \leq y \rightarrow f(x) \geq f(y), \forall x \in U.$$

Proposição 3.1.1. (LI et al., 2005, Teorema 2) Sejam $\delta \in U, x \in U$ e $f : U \rightarrow U$ uma função de ordem reversa. A δ -sensibilidade de f no ponto \mathbf{x} é dada por

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = [f(x) - f((x + \delta) \wedge 1)] \vee [f((x - \delta) \vee 0) - f(x)]. \quad (48)$$

Proposição 3.1.2. (LI et al., 2005, Teorema 1) Considere $f : U^2 \rightarrow U$, $\delta \in U$, $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$ e $x', y' \in U$ tais que $x - \delta \leq x' \leq x + \delta$ e $y - \delta \leq y' \leq y + \delta$.

(i) Se f é monotônica, então a δ -sensibilidade de f no ponto \mathbf{x} é dada por

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = (f(\mathbf{x}) - f[\mathbf{x}]) \vee (f[\mathbf{x}] - f(\mathbf{x})); \quad (49)$$

(ii) Se f é antitônica no primeiro argumento e isotônica no segundo argumento, então a sensibilidade de f no ponto \mathbf{x} é dada por

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = (f(\mathbf{x}) - f[\mathbf{x}]) \vee (f[\mathbf{x}] - f(\mathbf{x})); \quad (50)$$

(iii) Se f é isotônica no segundo argumento, então a δ sensibilidade de f no ponto \mathbf{x} é dada por

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = \bigvee |f(x, (y - \delta) \vee 0) - f(\mathbf{x})| \vee \bigvee |f(x, (y + \delta) \wedge 1) - f(\mathbf{x})|; \quad (51)$$

(iv) Se f antitônica no primeiro argumento, então a sensibilidade de f no ponto \mathbf{x} é dada por

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = \bigvee |f(\mathbf{x}) - f((x - \delta) \vee 0, y)| \vee \bigvee |f(\mathbf{x}) - f((x + \delta) \wedge 1, y)|. \quad (52)$$

Proposição 3.1.3. Considere $f : U^2 \rightarrow U$, $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$.

(i) (LI et al., 2005, Corolário 1) A δ sensibilidade de uma t -(co)norma $T(S) : U^2 \rightarrow U$ é dada pela Equação (49);

(ii) (LI et al., 2005, Corolário 1) A δ sensibilidade de uma S -(co)implicação $I_{S,N}(J_{T,N}) : U^2 \rightarrow U$ é dada pela Equação (50);

(iii) (LI et al., 2005, Corolário 1) A δ sensibilidade de uma QL -(co)implicação $I_{S,N,T}(J_{T,N,S}) : U^2 \rightarrow U$ é dada pela Equação (51);

(iv) (REISER; BEDREGAL, 2012, Proposição 3) A δ sensibilidade de uma D -(co)implicação $I_{S,T,N}(J_{T,S,N}) : U^2 \rightarrow U$ é dada pela Equação (52).

Corolário 3.1.1. (LI et al., 2005, Corolário 1) Seja a função $f : U^2 \rightarrow U$.

(1) Se f é uma t -(co)norma, então

$$\begin{aligned} \Delta_f((0, 0), \delta) &= f(\delta, \delta); \\ \Delta_f((0, 1), \delta) &= \Delta_f((1, 0), \delta) = \delta; \\ \Delta_f((1, 1), \delta) &= 1 - f(1 - \delta, 1 - \delta). \end{aligned}$$

(2) Se f é uma (S, N) -implicação, então

$$\begin{aligned}\Delta_f((0, 0), \delta) &= 1 - N(\delta); \\ \Delta_f((0, 1), \delta) &= 1 - S(N(\delta), 1 - \delta); \\ \Delta_f((1, 0), \delta) &= S(N(1 - \delta), \delta); \\ \Delta_f((1, 1), \delta) &= 1.\end{aligned}$$

Em particular, se $N = N_S$, então

$$\begin{aligned}\Delta_f((0, 0), \delta) &= \delta; \\ \Delta_f((0, 1), \delta) &= 1 - S(1 - \delta, 1 - \delta); \\ \Delta_f((1, 0), \delta) &= S(\delta, \delta); \\ \Delta_f((1, 1), \delta) &= \delta.\end{aligned}$$

(3) Se f é uma QL implicação então

$$\begin{aligned}\Delta_f((0, 0), \delta) &= N_S(N(\delta)); \\ \Delta_f((0, 1), \delta) &= N_S(N(\delta)); \\ \Delta_f((1, 0), \delta) &= S(N(1 - \delta), \delta); \\ (N_S(S((N_S((N_S(\delta)), N_S(\delta)))) \vee \delta) &\leq \Delta_f((1, 1), \delta) \leq N_S(T(N_S(\delta), N_S(\delta))).\end{aligned}$$

Em particular, se $N = N_S$ então

$$\begin{aligned}\Delta_f((0, 0), \delta) &= \delta; \\ \Delta_f((0, 1), \delta) &= \delta; \\ \Delta_f((1, 0), \delta) &= S(\delta, \delta); \\ N_S(S(\delta, N_S(\delta))) \vee \delta &\leq \Delta_f((1, 1), \delta) \leq S(\delta, \delta).\end{aligned}$$

Corolário 3.1.2. (LI et al., 2005, Corolário 2)

(1) Se $f = \vee$ ou \wedge , então $\Delta_f((x, y), \delta) = \delta$ para todo $x, y \in U$.

(2) Seja f a implicação de Łukasiewicz (I_{LK} na Tabela 3), então tem-se que:

$$\begin{aligned}\Delta_f(0, 0) &= \delta; \\ \Delta_f((0, 1), \delta) &= 0; \\ \Delta_f((1, 0), \delta) &= 2\delta \wedge 1; \\ \Delta_f((1, 1), \delta) &= \delta.\end{aligned}$$

Tabela 4: Norma Produto e Soma Probabilística

X	$\Delta_{TP}(x, \delta)$	$\Delta_{SP}(x, \delta)$
(0,0)	$\delta_1\delta_2$	$\delta_1 + \delta_2 - \delta_1\delta_2$
(0,1)	δ_1	δ_2
(1,0)	δ_2	δ_1
(1,1)	$\delta_1 + \delta_2 - \delta_1\delta_2$	$\delta_1\delta_2$

(3) Se f é a implicação de Kleene-Dienes (veja I_{KD} na Tabela 3), então tem-se:

$$\Delta_f((x, y), \delta) = \delta, \forall x, y \in \{0, 1\}.$$

(4) Se f é a implicação de Zadeh (veja I_{ZD} na Tabela 3), então obtém-se:

$$\Delta_f((x, y), \delta) = \delta, \forall x, y \in \{0, 1\}.$$

Teorema 3.1.1. (LI et al., 2005, Teorema 5) Seja $f : U^2 \rightarrow U$, então tem-se que:

(1) $\Delta_f(\delta) \leq \Delta_S(\Delta_N(\delta))$;

(2) Se N é SIFN e f uma (S, N) -implicação, então $\Delta_f(\delta) = \Delta_S(\delta)$.

Exemplificação 3.1.1. (1) Seja $I_{KL}(x, y) = (1 - x) \vee y$. Então $\Delta_{I_{KL}} = \delta$.

(2) Seja $I_{RC}(x, y) = 1 - x + xy$. Então I_{RC} tem a mesma sensibilidade da t -norma produto e portanto $\Delta_{I_{RC}}(\delta) = 2\delta - \delta^2$.

(3) Se $I(x, y) = (1 - x + y) \wedge 1$, então $\Delta_I(\delta) = 2\delta \wedge 1$.

Observação 3.1.3. Com base nos resultados apresentados nos Corolários 3.1.1 e 3.1.2, as tabelas a seguir ilustram uma análise de robustez considerando, por exemplo, que a δ -sensibilidade do 1º argumento (δ_1) seja possivelmente diferente da δ -sensibilidade do 2º argumento (δ_2). E assim, não se considera $\delta = \delta_1 \vee \delta_2$ mas os correspondentes valores associados às perturbações dos argumentos.

Neste caso, na Tabela 4 é analisada a sensibilidade de operadores como a t -norma produto (Δ_{TP}) e a t -conorma soma probabilística (Δ_{SP}). Na Tabela 5 consideram-se a implicação fuzzy de Riechenbach ($\Delta_{I_{SP,NS}}$) e a correspondente coimplicação fuzzy ($\Delta_{J_{TP,NS}}$). E ainda, na Tabela 6, a QL-implicação fuzzy ($\Delta_{I_{SP,NS,TP}}(x, \delta)$) e a QL-coimplicação fuzzy ($\Delta_{J_{TP,NS,SP}}(x, \delta)$).

3.2 Robustez dos Conectivos N-Duais Fuzzy

Proposição 3.2.1. (REISER; BEDREGAL, 2012, Proposição 6) Seja $f : U^2 \rightarrow U$ uma

Tabela 5: (S, N) -implicação e (T, N) -coimplicação Fuzzy

X	$\Delta_{I_{S_P, N_S}}(x, \delta)$	$\Delta_{J_{T_P, N_S}}(x, \delta)$
(0,0)	δ_1	δ_2
(0,1)	$\delta_1\delta_2$	$\delta_1 + \delta_2 - \delta_1\delta_2$
(1,0)	$\delta_1 + \delta_2 - \delta_1\delta_2$	$\delta_1\delta_2$
(1,1)	δ_2	δ_1

Tabela 6: QL-Implicação Fuzzy

X	$\Delta_{I_{S_P, N_S, T_P}}(x, \delta)$	$\Delta_{J_{T_P, N_S, S_P}}(x, \delta)$
(0,0)	$-\delta_1 + \delta_1^2\delta_2$	$\delta_1 - \delta_1^2 + \delta_2 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_1^2\delta_2$
(0,1)	$\delta_1^2 - \delta_1$	δ_2
(1,0)	δ_2	$\delta_1^2 - \delta_1$
(1,1)	$\delta_1 - \delta_1^2 + \delta_2 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_1^2\delta_2$	$-\delta_1 + \delta_1^2\delta_2$

função de segunda ordem, $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$, $N_S(\mathbf{x}) = (N_S(x), N_S(y))$ onde $f(N_S(\mathbf{x})) = f(N_S(x), N_S(y))$. As seguintes equações são verificadas:

$$\begin{aligned} (i) f_{N_S}[\mathbf{x}] &= N_S(f[N_S(\mathbf{x})]); & (ii) f_{N_S}[\mathbf{x}] &= N_S(f[N_S(\mathbf{x})]); \\ (iii) f_{N_S}[\mathbf{x}] &= N_S(f[N_S(\mathbf{x})]); & (iv) f_{N_S}[\mathbf{x}] &= N_S(f[N_S(\mathbf{x})]). \end{aligned}$$

Prova. Seja $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$. Tem-se que:

$$\begin{aligned} (i) f_N[\mathbf{x}] &= f_N((x - \delta) \vee 0, (y - \delta) \vee 0) = N(f(N((x - \delta) \vee 0), N((y - \delta) \vee 0))) \\ &= N(f((1 - x + \delta) \wedge 1, (1 - y + \delta) \wedge 1)) \\ &= N(f((N(x) + \delta) \wedge 1, (N(y) + \delta) \wedge 1)) = N(f[N(x), N(y)]) \end{aligned}$$

Portanto, significa que $f_N[\mathbf{x}] = N(f[N(\mathbf{x})])$. As demais equações podem ser provadas de forma análoga. \square

Se N é uma SIFN, o Teorema 3.2.1 afirma que a sensibilidade de uma função f em um ponto \mathbf{x} é igual à sensibilidade da correspondente função dual f_N .

Teorema 3.2.1. (REISER; BEDREGAL, 2012, Teorema 1) Considere $f : U^2 \rightarrow U$, $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$. Seja $\Delta_f(\mathbf{x}, \delta)$ a expressão da sensibilidade de f no ponto \mathbf{x} . Se N é a negação fuzzy padrão ($N = N_S$ na Equação (3)) e f_N é a função N -dual de f , então a sensibilidade de f_N no ponto \mathbf{x} é dada por

$$\Delta_{f_N}(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_f((N(\mathbf{x})), \delta). \quad (53)$$

Proposição 3.2.2. Sejam N uma negação fuzzy padrão, f_N a função N -dual relacionada com a função $f : U^2 \rightarrow U$, $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$. A sensibilidade de f_N no ponto \mathbf{x} é definida pelos seguintes casos:

(i) se f é crescente com respeito às suas variáveis, então:

$$\begin{aligned}\Delta_{f_N}(\mathbf{x}, \delta) &= (f(N(\mathbf{x})) - f[N(\mathbf{x})]) \vee (f[N(\mathbf{x})] - f(N(\mathbf{x}))) \\ &= (f_N[\mathbf{x}] - f_N(\mathbf{x})) \vee (f_N[\mathbf{x}] - f_N(\mathbf{x}));\end{aligned}\quad (54)$$

(ii) se f é decrescente com respeito à sua primeira variável e incrementada com a segunda variável então

$$\begin{aligned}\Delta_{f_N}(\mathbf{x}, \delta) &= (f(N(\mathbf{x})) - f[N(\mathbf{x})]) \vee (f[N(\mathbf{x})] - f(N(\mathbf{x}))) \\ &= (f_N[\mathbf{x}] - f_N(\mathbf{x})) \vee (f_N[\mathbf{x}] - f_N(\mathbf{x}));\end{aligned}\quad (55)$$

(iii) se f é crescente com a segunda variável então:

$$\begin{aligned}\Delta_{f_n}(\mathbf{x}, \delta) &= \bigvee_{x-\delta \leq x' \leq x+\delta} |f(N(\mathbf{x})) - f(N(x'), (N(y) + \delta) \wedge 1)| \vee \\ &\quad \bigvee_{x-\delta \leq x' \leq x+\delta} |f(N(\mathbf{x})) - f(N(x'), (N(y) - \delta) \vee 0)|;\end{aligned}\quad (56)$$

(iv) se f é decrementada com respeito a sua primeira variável:

$$\begin{aligned}\Delta_{f_N}(\mathbf{x}, \delta) &= \bigvee_{y-\delta \leq y' \leq y+\delta} |f((N(x) + \delta) \wedge 1, N(y')) - f(N(\mathbf{x}))| \vee \\ &\quad \bigvee_{y-\delta \leq y' \leq y+\delta} |f((N(x) - \delta) \vee 0, N(y')) - f(N(\mathbf{x}))|.\end{aligned}\quad (57)$$

Prova. Direto da Proposição 3.2.1 e Teorema 3.2.1.

Proposição 3.2.3. Sejam $(T)_N$, $(S)_N$, $(I_{S,N})_N$, $I_{S,N,T}$ e $(I_{S,T,N})_N$ as funções N -duais de uma t -norma T , uma t -conorma S , uma S -implicação $I_{S,N}$, uma QL -implicação $I_{S,N,T}$ e uma D -implicação $I_{S,T,N}$, respectivamente. Quando $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$ e $\delta \in U$, seguem as seguintes declarações:

(i) $\Delta_{(T)_N}(\mathbf{x}, \delta)$ e $\Delta_{(S)_N}(\mathbf{x}, \delta)$ são ambos definidos pela Equação (54);

(ii) $\Delta_{I_{(S,N)}_N}(\mathbf{x}, \delta)$ é definido pela Equação (55);

(iii) $\Delta_{(I_{S,N,T})_N}(\mathbf{x}, \delta)$ é definido pela Equação (56);

(iv) $\Delta_{(I_{S,T,N})_N}(\mathbf{x}, \delta)$ é definido pela Equação (57).

Prova. Prova segue da Proposição 3.2.2.

Proposição 3.2.4. Sejam N a negação fuzzy padrão e $f_N : U^2 \rightarrow U$ a função N -dual de um conectivo binário $f : U^2 \rightarrow U$. Então a sensibilidade máxima de f e f_N são dadas por:

$$\Delta_{f_N}(\delta) = \Delta_f(\delta).\quad (58)$$

Prova. Do Teorema 3.2.1, temos o seguinte:

$$\Delta_{f_N}(\delta) = \bigvee_{\mathbf{x} \in U^2} \Delta_{f_N}(\mathbf{x}, \delta) = \bigvee_{N(\mathbf{x}) \in U^2} \Delta_f(N(\mathbf{x}), \delta) = \Delta_f(\delta).$$

Proposição 3.2.5. (REISER; BEDREGAL, 2012, Proposição 10) Seja (f, f_N) e (g, g_N) pares de funções N -duais. Tem-se que:

- (i) (f_N, f) é um par tão robusto como (g_N, g) em \tilde{x} se f é tão robusta quanto g no mesmo ponto;
- (ii) (f_N, f) é um par mais robusta do que (g_N, g) em um ponto \tilde{x} se f é mais robusta que g no mesmo ponto;
- (iii) (f_N, f) é um par tão robusta como (g_N, g) se f é tão robusta quanto g ;
- (iv) (f_N, f) é mais robusta que (g_N, g) se f é mais robusta do que g .

3.3 Robustez do conectivo f -Xor fuzzy

A análise da robustez baseada na sensibilidade média pode ser utilizada em operadores que não apresentam comportamento monotônico nos seus argumentos. Tem-se então uma alternativa para análise de sensibilidade de forma a selecionar os operadores fuzzy que sujeitos a uma pequena mudança nos argumentos de entrada apresentam (na média) apenas uma pequena alteração no resultado da operação.

Em (HERNANDEZ; NAVA, 2011), o estudo da sensibilidade média referente aos conectivos Xor e XNor, nas correspondentes famílias \mathcal{X} e \mathcal{D} , fornece os seguintes resultados:

- (i) o menos sensível (ou o mais robusto) operador fuzzy X(N)or em \mathcal{X} (\mathcal{D}). Com base nos principais resultados em (HERNANDEZ; NAVA, 2011), a operação menos sensível, em média, com respeito às famílias \mathcal{X} e \mathcal{D} é definida como conectivo f -Xor $E_{T,S,N}$ e f -XNor $D_{S,T,N}$, neste texto apresentada nas expressões de Equação (13) e Equação (14), respectivamente;
- (ii) a sensibilidade média do conectivo fuzzy X(N)or f , dada pela expressão:

$$S_f(\delta) = \int_0^1 \int_0^1 \Delta_f(\mathbf{x}, \delta) dx dy$$

Uma vez que um conectivo f -X(N)or pode ser definido explicitamente em termos de agregações e negações fuzzy, consideramos nesta seção uma outra possibilidade de explorar o estudo da sensibilidade ponto a ponto (δ -sensibilidade), focando nos pontos terminais de U .

Primeiramente, alguns resultados preliminares já verificados em (REISER; BEDREGAL, 2012) são reportados. Tais relatos estão relacionados à análise de robustez a partir do estudo de t-(co)normas e negações fuzzy, e são estendidos para a sensibilidade de conectivos $X(N)$ or. Neste caso, o estudo da robustez está focado no conectivo f - $X(N)$ or indicado por E_{T_P, S_P, N_S} (D_{S_P, T_P, N_S}), obtido pela t-norma produto T_P , soma probabilística S_P e negação padrão.

Outras contribuições nesta seção se reportam à robustez do conectivo f - X or considerando a (co)implicação f - $X(N)$ or e a bi-(co)implicação f - $X(N)$ or correspondente.

O estudo da δ -sensibilidade da (co)implicação f - $X(N)$ or e bi-(co)implicação f - $X(N)$ or é restrito aos pontos terminais de U , já que um conectivo f - $X(N)$ or não é uma função monotônica com respeito aos dois argumentos.

Em particular, consideramos (co)implicação f - $X(N)$ or e bi-(co)implicação f - $X(N)$ or obtida pela soma probabilística, t-norma produto e a negação padrão.

3.3.1 Estudo da δ -Sensibilidade na Classe de Conectivos f - X or fuzzy

No que se segue, com base em (LI et al., 2005) e (REISER; BEDREGAL, 2012), o estudo da δ sensibilidade do conectivo f - X or fuzzy no ponto \mathbf{x} (ou sensibilidade ponto a ponto) no domínio U é considerado.

Proposição 3.3.1. *Seja $\delta \in U$. Então, tem-se que:*

(i) (LI et al., 2005, Teorema 1) *Se $f : U^2 \rightarrow U$ é uma função monotônica, i.e.*

$$x \leq x', y \leq y' \Rightarrow f(x, y) \leq f(x', y'), \forall x, y \in U^2, \quad (59)$$

então a sensibilidade de f no ponto $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$ é dada como

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = (f(\mathbf{x}) - f[\mathbf{x}]) \vee (f[\mathbf{x}] - f(\mathbf{x})) \quad (60)$$

(ii) (LI et al., 2005, Teorema 2) *Se $f : U \rightarrow U$ é uma função de ordem reversa, tal que $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, a sensibilidade de f no ponto $x \in U$ é dada por*

$$\Delta_f(x, \delta) = [f(x) - f(x + \delta) \wedge 1] \vee [f((x - \delta) \vee 0) - f(x)] \quad (61)$$

(iii) (REISER; BEDREGAL, 2012, Teorema 1) *Se N é a negação padrão fuzzy ($N = N_S$) e $f_N : U^2 \rightarrow U$ é a função N -dual de $f : U^2 \rightarrow U$ então a sensibilidade de f_N no ponto $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$ é dada por*

$$\Delta_{f_N}(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_f((N(\mathbf{x})), \delta) \quad (62)$$

Corolário 3.3.1. *Seja g a função N_S -dual de $f : U^2 \rightarrow U$ e $\delta \in U$. Então f e g são igualmente robustas em $x = 0.5$, ou seja, no ponto de equilíbrio N_S .*

Prova. Direto da Proposição 3.3.1(iii).

Agora, baseado na Equação (62) a sensibilidade ponto a ponto de T_P e S_P nos pontos terminais de U é reportada por:

Proposição 3.3.2. (ZANOTELLI et al., 2013, Proposição 11) Consideramos $S_P, T_P : U^2 \rightarrow U$, $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$. Então, é válido que:

$$\begin{aligned}\Delta_{S_P}((0, 0), \delta) &= \delta(2-\delta) = \Delta_{T_P}((1, 1), \delta); \\ \Delta_{S_P}((1, 1), \delta) &= \delta^2 = \Delta_{T_P}((0, 0), \delta); \\ \Delta_{S_P}((0, 1), \delta) &= \delta = \Delta_{T_P}((1, 0), \delta); \\ \Delta_{S_P}((1, 0), \delta) &= \delta = \Delta_{T_P}((0, 1), \delta).\end{aligned}$$

Proposição 3.3.3. (ZANOTELLI et al., 2013, Proposição 12) Consideramos $f : U^2 \rightarrow U$ e $\delta \in U$. A sensibilidade de E_{S_P, T_P, N_S} no ponto \mathbf{x} é dada por

(i) Se $\mathbf{x}=(0, 0)$ então $\Delta_{E_{S_P, T_P, N_S}}(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_{S_P}(\mathbf{x}, \delta) - \Delta_{T_P}(\mathbf{x}, \delta)$;

(ii) Se $\mathbf{x}=(1, 1)$ então $\Delta_{E_{S_P, T_P, N_S}}(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_{S_P}(\mathbf{x}, \delta) + \Delta_{T_P}(\mathbf{x}, \delta)$.

A seguir, analisamos a δ -sensibilidade dos conectivos f -Xor, considerando ambas construções, (co)implicações e bi-(co)implicações.

Teorema 3.3.1. Se N é a negação fuzzy padrão ($N = N_S$), então o seguinte é verificado:

$$\begin{aligned}\Delta_{E_N}(\mathbf{x}, \delta) &= \Delta_D((N(\mathbf{x})), \delta) \text{ e } \Delta_E((N(\mathbf{x}))) = \Delta_{D_N}(\mathbf{x}, \delta); \\ \Delta_{I_N}(\mathbf{x}, \delta) &= \Delta_J((N(\mathbf{x})), \delta) \text{ e } \Delta_I((N(\mathbf{x})), \delta) = \Delta_{J_N}(\mathbf{x}, \delta); \\ \Delta_{B_N}(\mathbf{x}, \delta) &= \Delta_C((N(\mathbf{x})), \delta) \text{ e } \Delta_B((N(\mathbf{x})), \delta) = \Delta_{C_N}(\mathbf{x}, \delta).\end{aligned}$$

Prova. Direto da Proposição 3.3.1(iii).

3.3.2 δ -Sensibilidade referente às implicações fuzzy e equivalências fuzzy obtidas a partir do conectivo E_{T_P, S_P, N_S}

Visto que $E_{T_P, S_P, N_S} : U^2 \rightarrow U$ não verifica a propriedade da monotonicidade, como descrito na Equação.(59), precisamos analisar a perturbação em ambos os argumentos de \mathbf{x} ($x \pm \delta$ and $y \pm \delta$). No entanto, deve ser executado ao longo da unidade do intervalo.

Tabela 7: δ -sensibilidade do conectivo f -Xor nos pontos extremos do intervalo da unidade

$[x]$	$[x]$	$[x]$	$[x]$
$E[0,0]=0$	$E[0,0]=\delta$	$E[0,0]=\delta$	$E[0,0]=(2-\delta)(\delta-\delta^3)$
$E[0,1]=1-\delta$	$E[0,1]=1$	$E[0,1]=1-(\delta-\delta^2)(2-\delta+\delta^2)$	$E[0,1]=1-\delta$
$E[1,0]=1-\delta$	$E[1,0]=1-(\delta-\delta^2)(2-\delta+\delta^2)$	$E[1,0]=1$	$E[1,0]=1-\delta$
$E[1,1]=(2-\delta)(\delta-\delta^3)$	$E[1,1]=\delta$	$E[1,1]=\delta$	$E[1,1]=0$
$D[0,0]=1$	$D[0,0]=1-\delta$	$D[0,0]=1-\delta$	$D[0,0]=1-(2-\delta)(\delta-\delta^3)$
$D[0,1]=\delta$	$D[0,1]=0$	$D[0,1]=(\delta-\delta^2)(2-\delta+\delta^2)$	$D[0,1]=\delta$
$D[1,0]=\delta$	$D[1,0]=(\delta-\delta^2)(2-\delta+\delta^2)$	$D[1,0]=0$	$D[1,0]=\delta$
$D[1,1]=1-(2-\delta)(\delta-\delta^3)$	$D[1,1]=1-\delta$	$D[1,1]=1-\delta$	$D[1,1]=1$
$I[0,0]=1$	$I[0,0]=1$	$I[0,0]=1-\delta$	$I[0,0]=(1-\delta^2+\delta^3)(1-\delta+\delta^3)$
$I[0,1]=1$	$I[0,1]=1$	$I[0,1]=(1-\delta+2\delta^2-\delta^3)(1-\delta+\delta^2-\delta^3)$	$I[0,1]=(1-\delta+\delta^2)^2$
$I[1,0]=\delta$	$I[1,0]=(1-\delta^2+\delta^3)(2\delta-2\delta^2+\delta^3)$	$I[1,0]=0$	$I[1,0]=\delta$
$I[1,1]=(1-\delta+4\delta^2-\delta^3)(1-2\delta+3\delta^2-\delta^3)$	$I[1,1]=(1-\delta+\delta^2)^2$	$I[1,1]=1-\delta$	$I[1,1]=1$
$J[0,0]=0$	$J[0,0]=\delta$	$J[0,0]=1-(1-\delta+\delta^2)^2$	$J[0,0]=1-(1-\delta+4\delta^2-\delta^3)(1-2\delta+3\delta^2-\delta^3)$
$J[0,1]=1-\delta$	$J[0,1]=1$	$J[0,1]=1-(1-\delta^2+\delta^3)(2\delta-2\delta^2+\delta^3)$	$J[0,1]=1-\delta$
$J[1,0]=1-(1-\delta+\delta^2)^2$	$J[1,0]=1-(1-\delta+2\delta^2-\delta^3)(1-\delta+\delta^2-\delta^3)$	$J[1,0]=0$	$J[1,0]=0$
$J[1,1]=1-(1-\delta^2+\delta^3)(1-\delta+\delta^3)$	$J[1,1]=\delta$	$J[1,1]=0$	$J[1,1]=0$
$B[0,0]=1$	$B[0,0]=1-\delta$	$B[0,0]=1-\delta$	$B[0,0]=1-(2-\delta)(\delta-\delta^3)$
$B[0,1]=\delta$	$B[0,1]=0$	$B[0,1]=(\delta-\delta^2)(2-\delta+\delta^2)$	$B[0,1]=\delta$
$B[1,0]=\delta$	$B[1,0]=(\delta-\delta^2)(2-\delta+\delta^2)$	$B[1,0]=0$	$B[1,0]=\delta$
$B[1,1]=1-(2-\delta)(\delta-\delta^3)$	$B[1,1]=1-\delta$	$B[1,1]=1-\delta$	$B[1,1]=1$
$C[0,0]=0$	$C[0,0]=\delta$	$C[0,0]=\delta$	$C[0,0]=(2-\delta)(\delta-\delta^3)$
$C[0,1]=1-\delta$	$C[0,1]=1$	$C[0,1]=1-(\delta-\delta^2)(2-\delta+\delta^2)$	$C[0,1]=1-\delta$
$C[1,0]=1-\delta$	$C[1,0]=1-(\delta-\delta^2)(2-\delta+\delta^2)$	$C[1,0]=1$	$C[1,0]=1-\delta$
$C[1,1]=(2-\delta)(\delta-\delta^3)$	$C[1,1]=\delta$	$C[1,1]=\delta$	$C[1,1]=0$

Na Tabela 7, resumem-se as possíveis avaliações do conectivo f -Xor por meio das Equações (40) até (43).

As colunas indicam a perturbação no ponto $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$ e as linhas são agrupadas por cada conectivo f -X(N) or visto nesta dissertação. Para isso, a fim de reduzir a notação, consideramos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} E &= E_{T_P, S_P, N_S}; \\ D &= D_{S_P, T_P, N_S}; \\ I &= I_{E_{T_P, S_P, N_S}, T_P, N_S}; \\ J &= J_{D_{S_P, T_P, N_S}, S_P, N_S}; \\ B &= B_{E_{T_P, S_P, N_S}, N_S}; \\ C &= C_{D_{S_P, T_P, N_S}, N_S}. \end{aligned}$$

Com base na proposição 2.6.4, indicando a contra-positiva dos operadores E e D, os dados no primeiro grupo coincidem com os dados no último grupo.

Além disso, os resultados principais são relatados nos Teoremas 3.3.2 e 3.3.3 fornecendo uma análise de tais avaliações.

Teorema 3.3.2. *Considere $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$.*

(i) *Se $E = E_{T_P, S_P, N_S}$ e $C = C_{D_{S_P, T_P, N_S}, N_S}$, então tem-se que:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \{(0, 0), (1, 1)\} &\Rightarrow \Delta_E(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_C(\mathbf{x}, \delta) = (2 - \delta)(\delta - \delta^3); \\ \mathbf{x} \in \{(0, 1), (1, 0)\} &\Rightarrow \Delta_E(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_C(\mathbf{x}, \delta) = 1 - (\delta - \delta^2)(2 - \delta + \delta^2). \end{aligned}$$

(ii) *Se $D = D_{S_P, T_P, N_S}$ e $B = B_{E_{T_P, S_P, N_S}, N_S}$, então tem-se que:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \{(0, 0), (1, 1)\} &\Rightarrow \Delta_E(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_C(\mathbf{x}, \delta) = 1 - (2 - \delta)(\delta - \delta^3); \\ \mathbf{x} \in \{(0, 1), (1, 0)\} &\Rightarrow \Delta_E(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_C(\mathbf{x}, \delta) = (\delta - \delta^2)(2 - \delta + \delta^2). \end{aligned}$$

Prova. *Considere os resultados referentes ao conectivo $f = E_{T_P, S_P, N_S}$ descritos desde a Equação(40) até a Equação(43). Então, tem-se que:*

$$\begin{aligned} E[0, 0] &= B[0, 0] = E(0, 0) = 0; \quad E[0, 0] = B[0, 0] = E(0, \delta) = \delta; \\ E[0, 0] &= B[0, 0] = E(\delta, 0) = \delta; \quad E[0, 0] = B[0, 0] = E(\delta, \delta) = (2 - \delta)(\delta - \delta^3). \end{aligned}$$

Tomando $E(0, 0) = 0$ na Equação(39), Definição 3.1.1(i), obtemos que: $\Delta_E((0, 0), \delta) = \Delta_B((0, 0), \delta) = (2 - \delta)(\delta - \delta^3)$. Analogamente, os demais casos podem ser provados.

Teorema 3.3.3. *Considere $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$.*

(i) Se $I = I_{E_{TP,SP,NS}, TP, NS}$ e $J = J_{D_{SP,TP,NS}, SP, NS}$, então tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = (0, 0) &\Rightarrow \Delta_I(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_J(N_S(\mathbf{x}), \delta) = 1 - (1 - \delta^2 + \delta^3)(1 - \delta + \delta^3); \\ \mathbf{x} = (0, 1) &\Rightarrow \Delta_I(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_J(N_S(\mathbf{x}), \delta) = 1 - (1 - \delta + 2\delta^2 - \delta^3)(1 - \delta + \delta^2 - \delta^3); \\ \mathbf{x} = (1, 0) &\Rightarrow \Delta_I(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_J(N_S(\mathbf{x}), \delta) = 1 - (1 - \delta^2 + \delta^3)(2\delta - 2\delta^2 + \delta^3); \\ \mathbf{x} = (1, 1) &\Rightarrow \Delta_E(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_C(\mathbf{x}, \delta) = 1 - (1 - \delta + 4\delta^2 - \delta^3)(1 - 2\delta + 3\delta^2 - \delta^3). \end{aligned}$$

Prova. Ao aplicarmos a função $I_{E_{TP,SP,NS}, TP, NS}$ nas expressões das Equações (40) à (43), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} I[0, 0] &= I(0, 0) = 1; \quad I[0, 0] = I(0, \delta) = \delta; \\ I[0, 0] &= I(\delta, 0) = \delta; \quad I[0, 0] = I(\delta, \delta) = (2 - \delta^2 + \delta^3)(1 - \delta - \delta^3). \end{aligned}$$

Tabela 8: Sensibilidade do conectivo f -Xor relacionado com $\delta = 0.1$

f	\mathbf{x}	$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta)$	$\delta = 0.1$
E; C	(0, 0)	$(2 - \delta)(\delta - \delta^3)$	0.1881
	(0, 1)	$1 - (\delta - \delta^2)(2 - \delta + \delta^2)$	0.1719
	(1, 0)	$1 - (\delta - \delta^2)(2 - \delta + \delta^2)$	0.1719
	(1, 1)	$(2 - \delta)(\delta - \delta^3)$	0.1881
D; B	(0, 0)	$1 - (2 - \delta)(\delta - \delta^3)$	0.8119
	(0, 1)	$(\delta - \delta^2)(2 - \delta + \delta^2)$	0.8281
	(1, 0)	$(\delta - \delta^2)(2 - \delta + \delta^2)$	0.8281
	(1, 1)	$1 - (2 - \delta)(\delta - \delta^3)$	0.8119
I	(0, 0)	$1 - (1 - \delta^2 + \delta^3)(1 - \delta + \delta^3)$	0.107109
	(0, 1)	$1 - (1 - \delta + 2\delta^2 - \delta^3)(1 - \delta + \delta^2 - \delta^3)$	0.164629
	(1, 0)	$1 - (1 - \delta^2 + \delta^3)(2\delta - 2\delta^2 + \delta^3)$	0.179371
	(1, 1)	$1 - (1 - \delta + 4\delta^2 - \delta^3)(1 - 2\delta + 3\delta^2 - \delta^3)$	0.221569
J	(0, 0)	$(1 - \delta + 4\delta^2 - \delta^3)(1 - 2\delta + 3\delta^2 - \delta^3)$	0.778931
	(0, 1)	$(1 - \delta^2 + \delta^3)(2\delta - 2\delta^2 + \delta^3)$	0.820629
	(1, 0)	$(1 - \delta^2 + \delta^3)(2\delta - 2\delta^2 + \delta^3)$	0.835371
	(1, 1)	$(1 - \delta^2 + \delta^3)(1 - \delta + \delta^3)$	0.892891

Tabela 8 descreve $\Delta_f(\mathbf{x}, \delta)$ tomando $\delta = 0.1$, assumindo que f seja um conectivo f -Xor e \mathbf{x} esteja relacionado aos pontos terminais do intervalo da unidade. Podemos observar que as perturbações relacionadas com $\delta = 0.1$ são mais intensas quando os operadores D, B e J são considerados. É também imediato que:

$$\Delta_I((0, 0), \delta) = 1 - (1 - \delta^2 + \delta^3)(1 - \delta + \delta^3); \quad \text{e} \quad \Delta_J((1, 1), \delta) = (1 - \delta^2 + \delta^3)(1 - \delta + \delta^3).$$

Se $\delta = 0.1$, tem-se que: $\Delta_I((0, 0), 0.1) + \Delta_J((1, 1), 0.1) = 0.107109 + 0.892891 = 1.0$

4 LÓGICA FUZZY INTUICIONISTA

Este capítulo apresenta os conceitos fundamentais para o estudo da robustez de sistemas baseados na LFI, considerando a δ -sensibilidade referente aos conectivos fuzzy intuicionistas. Tais conectivos são amplamente utilizados por sistemas especialistas baseados no raciocínio aproximativo (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004). A redução do número de regras utilizadas por esses sistemas devido à abordagem fuzzy intuicionista é obtida pela aplicação de regras geradas através do uso das principais propriedades algébricas dos conectivos fuzzy intuicionistas.

Além disso, esta análise da robustez mostra-se capaz de preservar as propriedades de sistemas baseados em LF quanto a construção de conectivos fuzzy representáveis, ou seja, operadores que estendem as propriedades relevantes e permitem a flexibilidade quanto à relação de complemento fuzzy.

Primeiramente, estuda-se o índice fuzzy intuicionista e conceitos relacionados aos conjuntos fuzzy intuicionistas. Na sequência, revisamos alguns conectivos da lógica fuzzy intuicionistas, tais como negações, t-normas e t-conormas. E então focamos no estudo de implicações fuzzy intuicionistas e nas principais propriedades algébricas, incluindo exemplificações.

4.1 Conjuntos Fuzzy Intuicionistas

De acordo com Atanassov (ATANASSOV, 1986), um conjunto fuzzy intuicionista A_I é representado por um par $\langle \mu_A, \nu_A \rangle$ (pertinência e não pertinência), e indicado por um conjunto de tuplas que satisfazem uma restrição natural :

$$A_I = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in \mathcal{X} \text{ e } \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1\}. \quad (63)$$

Podemos então pensar em um conjunto fuzzy como um caso especial de um conjunto fuzzy intuicionista, onde o grau de não pertinência não necessita ser igual ao seu complemento.

No contexto da LFI, cada elemento $x \in \mathcal{X}$ está associado um elemento $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in U \times U$, onde nem sempre o grau de não pertinência $\nu_A(x) = x_2$ é menor ou igual ao complemento do correspondente grau de pertinência $\mu_A(x) = x_1$. Ou ainda, na LFI a equação $\nu_A(x) +$

$\mu_A(x) = 1$ é estendida pela inequação:

$$0 \leq \nu_A(x) + \mu_A(x) \leq 1. \quad (64)$$

Como $\nu(x), \mu(x) \in U$, pode-se então expressar a Equação (64) da seguinte forma:

$$\nu(x) \leq N_S(\mu_A(x)) \text{ ou ainda } \mu_A(x) \leq N_S(\nu_A(x)). \quad (65)$$

Exemplificando uma aplicação, vejamos em (CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003), a descrição de um procedimento de votação, onde as pessoas têm de expressar seu sentimento a uma série de propostas. É óbvio que, enquanto um pode ser a favor, outro vote em desfavor de uma proposta da mesma maneira que um terceiro pode abster. Usando somente o grau de pertinência torna-se um trabalho árduo e de difícil compreensão a separação de um defensor e de um adversário da proposta. Para tal, parece natural aplicar uma modelagem baseada em conjuntos fuzzy intuicionistas. Nesta abordagem, modelam-se a cada proposta, o número de defensores e de adversários à proposta permitindo que o cardinal do complemento do conjunto de defensores não seja exatamente igual ao cardinal do complemento do conjunto de adversos à proposta.

4.1.1 Conjunto \tilde{U} dos Valores Fuzzy Intuicionista

O conjunto de todos os pares contendo o grau de pertinência e de não-pertinência associado a um elemento x é indicado por \tilde{U} é definido pela expressão:

$$\tilde{U} = \{\tilde{x} = (x_1, x_2) \in U^2 \text{ e } 0 \leq x_1 + x_2 \leq 1\}. \quad (66)$$

De acordo com (ATANASSOV; GARGOV, 1998), as seguintes relações são consideradas em \tilde{U} :

(i) para todos $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, têm-se as relações de ordem:

$$(x_1, x_2) \leq_{\tilde{U}} (y_1, y_2) \text{ se e somente se } x_1 \leq y_1 \text{ e } x_2 \geq y_2; \quad (67)$$

$$(x_1, x_2) \preceq_{\tilde{U}} (y_1, y_2) \text{ se e somente se } x_1 \leq y_1 \text{ e } x_2 \leq y_2. \quad (68)$$

(ii) para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$, tem-se que

$$\tilde{0} = (0, 1) \leq_{\tilde{U}} \tilde{x} \leq_{\tilde{U}} \tilde{1} = (1, 0); \quad (69)$$

(iii) para todo $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \tilde{U}^n$, tal que $\tilde{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}) \in \tilde{U}$, com $0 \leq i \leq n$, tem-se

as projeções $l_I, r_I : \tilde{U}^n \rightarrow U$, cujas correspondentes definições são dadas por:

$$l_I((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)) = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}); \quad (70)$$

$$r_I((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)) = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}). \quad (71)$$

4.1.2 Índice Fuzzy Intuicionista

Segundo (XU; YAGER, 2009), o índice fuzzy intuicionista $\pi_A(x)$, também chamado de grau de hesitação, ou grau de indeterminação de x em A , é definido pela expressão a seguir:

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x), \forall x \in \chi. \quad (72)$$

Portanto, para todo $x \in \chi$ tem-se associado $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$ tal que $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) = 1 - x_1 - x_2$. E portanto, quando $\pi_A(x) = 0$, o conjunto fuzzy intuicionista se reduz a um conjunto fuzzy (SZMIDT; KACPRZYK, 2004).

4.2 Negação Fuzzy Intuicionista

Nesta seção apresentaremos as funções de negação fuzzy intuicionista, suas propriedades algébricas, exemplos e conceitos relacionados.

De acordo com (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004), $N_I : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ é uma *negação fuzzy intuicionista* (IFN) se satisfaz as seguintes condições:

$$N_{I1} : N_I(\tilde{0}) = \tilde{1} \text{ e } N_I(\tilde{1}) = \tilde{0};$$

$$N_{I2} : \text{Se } \tilde{x} \geq \tilde{y} \text{ então } N_I(\tilde{x}) \leq N_I(\tilde{y}), \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{U}.$$

Negações fuzzy intuicionistas fortes (SIFN) são *negações fuzzy intuicionistas* que satisfazem a propriedade involutiva (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003):

$$N_{I3} : N_I(N_I(\tilde{x})) = \tilde{x}, \forall \tilde{x} \in \tilde{U}.$$

Teorema 4.2.1. (BACZYŃSKI, 2003; DESCHRIJVER; KERRE, 2005c) *Uma negação fuzzy intuicionista $N_I : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ é forte, se e somente se, existe uma negação fuzzy forte $N : U \rightarrow U$ tal que:*

$$N_I(\tilde{x}) = (N_S(N_S(x_2)), N_S(N_S(x_1))), \forall \tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U} \quad (73)$$

Exemplificação 4.2.1. *Um exemplo de negação fuzzy intuicionista forte é obtida considerando a **Negação Padrão** na Equação (3). Tem-se então que $N_{IS}(\tilde{x}) = (N_S(N_S(x_2)), N_S(N_S(x_1))) = (x_2, x_1)$.*

4.2.1 Relação de Dualidade entre Funções Fuzzy Intuicionistas

Definição 4.2.1. *Seja N_I uma negação fuzzy intuicionista forte em \tilde{U} . Para todo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \tilde{U}^n$, se N_I é involutiva então $(\tilde{f}_{N_I})_{N_I} = \tilde{f}$, ou seja, \tilde{f} e \tilde{f}_{N_I} são mutuamente duais. A **função intuicionista N_I -dual** de uma função $f_I : \tilde{U}^n \rightarrow \tilde{U}$ é dada pela expressão:*

$$f_{I_{N_I}}(\tilde{\mathbf{x}}) = N_I(f_I(N_I(\tilde{x}_1), \dots, N_I(\tilde{x}_n))). \quad (74)$$

4.3 Funções de Agregação Fuzzy Intuicionistas

Uma função $A_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é denominada função de agregação idempotente se, para todos $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$ satisfazem as seguintes propriedades (BACZYŃSKI, 2003; CALVO et al., 2002):

$$A_I1: A_I(\tilde{0}, \tilde{0}) = \tilde{0} \text{ e } A_I(\tilde{1}, \tilde{1}) = \tilde{1} \text{ (condições de Borda em } \tilde{U}\text{);}$$

$$A_I2: \text{ Se } \tilde{x} \leq \tilde{z}, \text{ então } A_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq A_I(\tilde{z}, \tilde{y}) \text{ (Monotonicidade);}$$

$$A_I3: A_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = A_I(\tilde{y}, \tilde{x}) \text{ (Comutatividade).}$$

Uma função de agregação idempotente satisfaz também a seguinte propriedade (BACZYŃSKI, 2003):

$$A_I4: A_I(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{x}.$$

Exemplificação 4.3.1. *As funções $\wedge_{\tilde{U}}, \vee_{\tilde{U}} : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$, definidas pela expressão:*

$$\vee_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\vee_U(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \vee_U(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)); \quad (75)$$

$$\wedge_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\wedge_U(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \wedge_U(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)). \quad (76)$$

são funções de agregação em \tilde{U}^2 .

Além disso, sempre que A_I é uma função de agregação idempotente, tem-se que:

$$\wedge_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq_{\tilde{U}} A_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq_{\tilde{U}} \vee_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}), \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{U}.$$

4.3.1 T-(co)normas Fuzzy Intuicionistas

Funções que qualificam as intersecções fuzzy intuicionista e uniões fuzzy intuicionista são também referidas na literatura como t-normas e t-conormas fuzzy intuicionistas, respectivamente.

Definição 4.3.1. *Em (BACZYŃSKI, 2003) uma **t-norma intuicionista** é uma função $T_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$, satisfazendo as seguintes propriedades, para todo $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$:*

$$T_I1: T_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = T_I(\tilde{y}, \tilde{x}) \text{ (Comutatividade);}$$

$T_I2: T_I(\tilde{x}, T_I(\tilde{y}, \tilde{z})) = T_I(T_I(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z})$ (Associatividade);

$T_I3: T_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq_{\tilde{U}} T_I(\tilde{u}, \tilde{v})$, se $\tilde{x} \leq_{\tilde{U}} \tilde{u}$ e $\tilde{y} \leq_{\tilde{U}} \tilde{v}$ (Monotonicidade);

$T_I4: T_I(\tilde{x}, \tilde{1}) = \tilde{x}$ (Elemento neutro).

Definição 4.3.2. Uma **t-conorma intuicionista** é uma função $S_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$, satisfazendo as seguintes propriedades, para todo $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$:

$S_I1: S_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = S_I(\tilde{y}, \tilde{x})$ (Comutatividade);

$S_I2: S_I(\tilde{x}, S_I(\tilde{y}, \tilde{z})) = S_I(S_I(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z})$ (Associatividade);

$S_I3: S_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq S_I(\tilde{u}, \tilde{v})$ se $\tilde{x} \leq \tilde{u}$ e $\tilde{y} \leq \tilde{v}$ (Monotonicidade);

$S_I4: S_I(\tilde{x}, \tilde{0}) = \tilde{x}$ (Elemento neutro).

Com base nos resultados apresentados em (BACZYŃSKI, 2003, Definição 1), a Proposição 4.3.1 reporta à definição de t-representabilidade na LFI, veja mais detalhadamente os resultados em (DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004) e (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

Proposição 4.3.1. (BACZYŃSKI, 2003, Lemma 1) Uma t-(co)norma fuzzy intuicionista $(S_I), T_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma **t-(co)norma t-representável em LFI** se existem ambas, uma t-norma $T : U^2 \rightarrow U$ e uma t-conorma $S : U^2 \rightarrow U$, de tal modo que, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, $(S_I)T_I$ é expressa pela equação:

$$S_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = S_I((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)); \quad (77)$$

$$T_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = T_I((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)), \quad (78)$$

sempre que $T(x_1, y_1) \leq N_S(S(N_S(x_2), N_S(y_2)))$.

Nos casos apresentados na Proposição 4.3.1, diz-se que T_I e S_I são t-representáveis por pares (T, S) e (S, T) , respectivamente (DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004).

4.3.2 Propriedades Algébricas e Exemplificação

A seguir é considerada a extensão fuzzy intuicionista para as principais propriedades das implicações fuzzy.

$$I_I1 : I_I(\tilde{1}, \tilde{0}) = \tilde{0};$$

$$I_I2 : \tilde{x} \leq_{\tilde{U}} \tilde{z} \Rightarrow I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq_{\tilde{U}} I_I(\tilde{z}, \tilde{y});$$

$$I_I3 : \tilde{y} \leq_{\tilde{U}} \tilde{z} \Rightarrow I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq_{\tilde{U}} I_I(\tilde{x}, \tilde{z});$$

$$I_{I4} : I_I(\tilde{0}, \tilde{y}) = \tilde{1};$$

$$I_{I5} : I_I(\tilde{x}, \tilde{1}) = \tilde{1};$$

I_{I6} : Se $(\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)) \in \tilde{U}^2$, tais que $x_1 + x_2 = 1$ e $y_1 + y_2 = 1$, então $\pi_{I_I((x_1, x_2), (y_1, y_2))} = 0$;

Em (DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004) e (ATANASSOV; GARGOV, 1998) uma implicação fuzzy intuicionistas $I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma função que satisfaz I_{I1} , I_{I2} e I_{I3} .

Em (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Definição 3), estende-se a definição proposta por J. Fodor e M. Roubens (FODOR; ROUBENS, 1994), uma implicação fuzzy intuicionistas $I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma função que satisfaz as propriedades I_{I2} , I_{I3} , I_{I4} , I_{I5} e I_{I6} incluindo a condição de contorno $I_{I1}(\tilde{1}, \tilde{0}) = \tilde{0}$.

4.3.3 Implicações Fuzzy Intuicionistas Geradas por Agregação de Implicações e Coimplicações

Encontramos diversos trabalhos sobre formas de representação de implicações inerentemente intencionistas e estudos de propriedades (IFS) (LIN; XIA, 2006; G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004; BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004). Esta seção baseia-se na forma de representação proposta por (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004), considerando-se a negação padrão, Equação (3), e funções de agregação idempotentes (M_1, M_2, M_3, M_4) e e pares de funções duais (I, I_N) para a obtenção da definição de implicações fuzzy intuicionistas.

Em (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004), é demonstrado que uma implicação fuzzy intuicionista I_I pode ser gerada por um conjunto finito de funções de agregação \mathcal{M} e por pares de funções mutuamente duais (I, I_N) , no caso, a implicação I e sua correspondente coimplicação I_N , obtida a partir da negação forte N .

Proposição 4.3.2. (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Proposição 3) *Sejam I uma implicação fuzzy (FODOR; ROUBENS, 1994) e I_N a coimplicação associada a implicação I obtida por uma negação forte. Considere $\mathcal{M}_i : U^2 \rightarrow U$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, um conjunto de funções de agregação idempotentes tais que, para todo $x, y \in U$, verificam-se as condições:*

$$M_1(x, y) + M_3(N_S(x), N_S(y)) \geq 1; \quad (79)$$

$$M_2((x, y) + M_4(N_S(x), N_S(y)) \leq 1. \quad (80)$$

Então, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, a função binária $I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma implicação fuzzy intuicionista dada pela expressão:

$$I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (I(M_1(x_1, N_S(x_2)), M_2(y_1, N_S(y_2))), I_N(M_3(N_S(x_1), x_2), M_2(N_S(y_1), y_2))). \quad (81)$$

Para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, $I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ são definidas as seguintes expressões:

$$l_{\tilde{U}}(I_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) = I(M_1(x_1, N_S(x_2)), M_2(y_1, N_S(y_2))); \quad (82)$$

$$r_{\tilde{U}}(I_I)(\tilde{x}, \tilde{y}) = I_N(M_3(N_S(x_1), x_2), M_2(N_S(y_1), y_2)). \quad (83)$$

Com base (BACZYŃSKI, 2003, Teorema 4) e (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004), uma função $I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma (S, N) -**implicação intuicionista representável** baseada na negação forte $N_I : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ se e somente se existirem (S, N) -implicações $I_a, I_b : U^2 \rightarrow U$, tais que para todos $\tilde{x} = (x_1, x_2)$ e $\tilde{y} = (y_1, y_2) \in U$, I_I é expressa como:

$$I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (I_a(N_S(x_2), y_1), N_S(I_b(x_1, N_S(y_2)))). \quad (84)$$

Dualmente, pela Equação (74), uma coimplicação fuzzy intuicionista J_I pode ser definida. Além do mais, uma função $J_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma (T, N) -coimplicação intuicionista representável baseada na negação forte N_I se existirem (T, N) -coimplicações $J_a, J_b : U^2 \rightarrow U$, tais que para todos $\tilde{x} = (x_1, x_2)$ e $\tilde{y} = (y_1, y_2) \in U$, J_I é expressa como:

$$J_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (J_b(N_S(x_2), y_1), N_S(J_a(x_1, N_S(y_2)))). \quad (85)$$

Quando $N = N_S$, $J_a = I_{aN}$ e $J_b = I_{bN}$, é válido que $J_I = I_{IN_I}$ é um operador N_I -dual fuzzy intuicionista.

4.3.4 Exemplificação

Para as implicações fuzzy intuicionistas definidas, têm-se alguns dos principais exemplos presentes na literatura. Considerando a notação: $\wedge_{\tilde{U}}$ para a operação de mínimo, Equação (76) e $\vee_{\tilde{U}}$ para a operação de máximo, Equação (75).

	Implicação Fuzzy Intuicionista
KD-Kleene-Dienes:	$I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_2 \vee y_1, x_1 \wedge y_2)$
RC-Reichenbach:	$I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_2 + y_1 - x_2y_1, x_1y_2)$
LZ-Łukasiewicz:	$I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1 \wedge (x_2 + y_1), 0 \vee (x_1 + y_2 - 1))$
Zadeh:	$I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_2 \vee ((1 - x_2) \wedge y_1), x_1 \wedge ((1 - x_1) \vee y_2))$
P.C.:	$I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (y_1 - y_1x_2, 1 - x_1 + x_1y_2)$
B.C.:	$I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0 \vee (y_1 - x_2), 1 \wedge (1 - x_1 + y_2))$
P.D.:	$I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1 - x_2 + x_2y_1, y_2 - y_2x_1)$
B.D.:	$I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1 \wedge (1 - x_2 + y_1), 0 \vee (y_2 - x_1))$

Tabela 9: Implicações Fuzzy Intuicionistas

5 ROBUSTEZ DE CONECTIVOS FUZZY INTUICIONISTAS

Este capítulo estende o estudo da robustez integrando o conceito de δ -sensibilidade de conectivos fuzzy como concebida por (LI et al., 2005), com a abordagem introduzida pela Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas, proposta por Atanassov (ATANASSOV, 1994).

5.1 δ -Sensibilidade dos Conectivos Fuzzy Intuicionista

O estudo da δ -sensibilidade de operadores fuzzy intuicionista no ponto de \mathbf{x} e domínio \tilde{U}^2 é considerado nesta seção, estendendo os resultados já apresentados em (LI et al., 2005), mas focando principalmente na classe dos conectivos fuzzy intuicionista que são representáveis, ou seja, podem ser definidos por composição de conectivos fuzzy.

Consideramos $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \in \tilde{U}^n$ sendo que para cada $\tilde{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}) \in \tilde{U}^2$, $a_{i1} + a_{i2} \leq 1$ sempre que $i = 1, 2, \dots, n$.

Definição 5.1.1. *Seja $f_I : \tilde{U}^n \rightarrow \tilde{U}$ uma função de n -ordem, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n$. A δ -sensibilidade de f_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$, denotado por $\Delta_{f_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)$, é definida por:*

$$\Delta_{f_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \sup\{|f_I(\tilde{\mathbf{x}}) - f_I(\tilde{\mathbf{y}})| : \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n, \bigvee(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1, \bigwedge(r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\} \quad (86)$$

sempre que $\bigvee(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}$ e $\bigwedge(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}$.

De acordo com a Definição 5.1.1, a δ -sensibilidade de conectivos fuzzy intuicionistas é preservada pela aplicação de funções-projeção, sempre que os conectivos fuzzy intuicionistas são representáveis no mesmo sentido proposto em (BACZYŃSKI, 2003; G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004). Neste contexto, a abordagem intuicionista estende o estudo da robustez segundo a abordagem fuzzy.

5.2 Robustez de Negações Fuzzy Intuicionistas Representáveis

A Proposição 5.2.1 logo a seguir mostra que a δ -sensibilidade é preservada pela aplicação das funções de projeção que definem uma negação fuzzy intuicionista representável,

considerando os resultados em (BACZYŃSKI, 2003; DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004) e (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

Proposição 5.2.1. *Seja $N_I : \tilde{U}^n \rightarrow \tilde{U}$ uma IFN. Sempre que $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \in \tilde{U}^n$, a δ -sensibilidade de N_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ é definida por*

$$\Delta_{N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_{N \circ N_S}(x_2, \delta_2), \Delta_{N_S \circ N}(x_1, \delta_1)). \quad (87)$$

Prova. *Para todo $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n$ tais que $\tilde{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}), x_{i1} \leq N_S(x_{i2})$ e $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)$, $\tilde{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}), y_{i1} \leq N_S(y_{i2})$ tem-se que :*

$$\begin{aligned} \Delta_{N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) &= \sup\{|N_I(\tilde{\mathbf{x}}) - N_I(\tilde{\mathbf{y}}) : \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n \text{ e} \\ &\quad \bigvee(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1, \bigwedge(r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\} \quad \text{Equação (86)} \\ &= \sup\{|N_I((x_{11}, x_{12}), \dots, (x_{n1}, x_{n2})) - N_I((y_{11}, y_{12}), \dots, (y_{n1}, y_{n2}))| : \\ &\quad \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n, \bigvee(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1, \bigwedge(r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\} \\ &= \sup\{|(N \circ N_S(x_{12}), N_S \circ N(x_{11})), \dots, (N \circ N_S(x_{n2}), N_S \circ N(x_{n1})) - \\ &\quad (N \circ N_S(y_{12}), N_S \circ N(y_{11})), \dots, (N \circ N_S(y_{n2}), N_S \circ N(y_{n1}))| : \\ &\quad \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n, \bigvee(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1, \bigwedge(r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\} \quad \text{Equação (73)} \\ &= \sup\{|(N \circ N_S(x_{12}), N_S \circ N(x_{11})) - (N \circ N_S(y_{12}), N_S \circ N(y_{11}))|, \dots, \\ &\quad |(N \circ N_S(x_{n2}), N_S \circ N(x_{n1})) - (N \circ N_S(y_{n2}), N_S \circ N(y_{n1}))| : \\ &\quad \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n, \bigvee(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1, \bigwedge(r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\} \\ &= (\sup\{|(N \circ N_S(x_{12}) - N \circ N_S(y_{12})|, \dots, |(N \circ N_S(x_{n2}) - N \circ N_S(y_{n2})|\} : \\ &\quad \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n, \bigwedge(r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\}, \\ &\quad \sup\{|(N \circ N_S(x_{11}) - N \circ N_S(y_{11})|, \dots, |(N \circ N_S(x_{n1}) - N \circ N_S(y_{n1})|\} : \\ &\quad \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n, \bigvee(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1\}) \\ &= (\Delta_{N \circ N_S}(r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta_2), \Delta_{N_S \circ N}(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta_1)) \quad \text{Equação (39)} \end{aligned}$$

Portanto a Equação(87) é satisfeita.

Corolário 5.2.1. *Seja $N_I : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ uma IFNS representável. Sempre que $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$, $N_I = N_{S_I}$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^n$, a δ -sensibilidade de N_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$, também pode ser expressa como*

$$\Delta_{l_{\tilde{U} \circ N_I}(r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}}(\tilde{\delta}))} = l_{\tilde{U}}(\Delta_{N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta})); \quad (88)$$

$$\Delta_{r_{\tilde{U} \circ N_I}(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\tilde{\delta}))} = r_{\tilde{U}}(\Delta_{N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta})) \quad (89)$$

Prova. *A prova segue a partir da Definição 5.1.1 e Proposições 3.1.1 e 5.2.1.*

Corolário 5.2.2. *Seja $N_I : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ uma negação fuzzy intuicionista forte (SIFN) representável, definida pela Equação(73). Sempre que $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$, $N_I = N_{S_I}$ e*

$\tilde{x} \in \tilde{U}$, a δ -sensibilidade de N_I no ponto \tilde{x} é dada por

$$\Delta_{N_{SI}}(\tilde{x}, \delta) = (\delta_2, \delta_1). \quad (90)$$

Prova. Segue da Proposição 5.2.1.

Observação 5.2.1. Os resultados apresentados na sequência, no Corolário 5.2.3, foram obtidos a partir da análise de robustez baseada na δ -sensibilidade de operadores obtidos por composições entre as negações fuzzy $N_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $N_S(x) = 1-x$, tabulados na Tabela 10.

Tabela 10: Análise de Robustez na Composição de Negações Fuzzy

x	$\Delta_{N_1}(x, \delta)$	$\Delta_{N_S}(x, \delta)$	$\Delta_{N_1 \circ N_S}(x, \delta)$	$\Delta_{N_S \circ N_1}(x, \delta)$
$x = 0$	$1 - \sqrt{1 - \delta^2}$	δ	$\sqrt{2\delta - \delta^2}$	$1 - \sqrt{1 - \delta^2}$
$x = 1$	$\sqrt{2\delta - \delta^2}$	δ	$1 - \sqrt{1 - \delta^2}$	$\sqrt{2\delta - \delta^2}$

Corolário 5.2.3. Seja $N_1(x) = \sqrt{1-x^2}$. Sempre que $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $N_I = N_{1I}$, tem-se a expressão da δ -sensibilidade de N_I nos pontos $\tilde{0}$ e $\tilde{1}$ dadas por

$$\Delta_{N_{1I}}(\tilde{0}, \tilde{\delta}) = \left(1 - \sqrt{1 - \delta_2^2}, 1 - \sqrt{1 - \delta_1^2} \right); \quad (91)$$

$$\Delta_{N_{1I}}(\tilde{1}, \delta) = \left(\sqrt{2\delta_2 - \delta_2^2}, \sqrt{2\delta_1 - \delta_1^2} \right). \quad (92)$$

Prova. Seja $N_{1I}(x) = (\sqrt{2x-x^2}, 1 - \sqrt{1-x^2})$. Logo, obtém-se que

$$\begin{aligned} l_{\tilde{U}}(\Delta_{N_{1I}}(\tilde{x}, \delta)) &= \Delta_{N_1 \circ N_S}(x_2, \delta_2) \text{ pela Equação(88)} \\ &= \left(\sqrt{2((x_2 + \delta_2) \wedge 1) - ((x_2 + \delta_2) \wedge 1)^2} - \sqrt{2x_2 - x_2^2} \right) \vee \\ &\quad \left(\sqrt{2x_2 - x_2^2} - \sqrt{2((x_2 - \delta_2) \vee 0) - ((x_2 - \delta_2) \vee 0)^2} \right) \text{ pela Equação(61)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{\tilde{U}}(\Delta_{N_{1I}}(\tilde{x}, \delta)) &= \Delta_{N_S \circ N_1}(x_1, \delta_1) \text{ pela Equação(89)} \\ &= \left(\sqrt{1 - x_1^2} - \sqrt{1 - (x_1 + \delta_1 \wedge 1)^2} \right) \vee \\ &\quad \left(\sqrt{1 - (x_1 - \delta_1 \vee 0)^2} - \sqrt{1 - x_1^2} \right) \text{ pela Equação(61)} \end{aligned}$$

Concluindo, $\Delta_{N_{1I}}(\tilde{0}, \delta) = \left(1 - \sqrt{1 - \delta_2^2}, 1 - \sqrt{1 - \delta_1^2} \right)$ e a Equação(91) é verificada. Analogamente, Equação(92) pode ser provada.

A Figura 5 apresenta o diagrama que graficamente resume os principais resultados obtidos na Proposição 5.2.1 e Corolários 5.2.1 e 5.2.2 – a robustez das IFN representável pode ser expressa em termos de robustez dos correspondentes argumentos.

$$\begin{array}{ccc}
(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) & \xrightarrow{\text{Eq. (87)}} & \Delta_{N_{SI}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) \\
\downarrow \text{Eqs. (70)(71)} & & \downarrow \text{Eqs. (88)(89)} \\
(r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta), l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) & \xrightarrow{\text{Eq. (86)}} & (\Delta_{r_{\tilde{U}} \circ N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta), \Delta_{l_{\tilde{U}} \circ N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta))
\end{array}$$

Figura 5: Operador de robustez na classe das IFNs representável .

5.2.1 Robustez de Conectivos Fuzzy Intuicionista e Relação de Dualidade

Esta seção estabelece que a δ -sensibilidade é preservada pela construção N_I -dual de conectivos fuzzy intuicionista que são representáveis no mesmo sentido proposto em (BACZYŃSKI, 2003; G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

Proposição 5.2.2. *Sejam $f_I : \tilde{U}^n \rightarrow \tilde{U}$ e $\Delta_{f_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)$ a expressão da δ -sensibilidade de f_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$. Sempre que $\delta \in U^2$, $N_I = N_{IS}$ e $f_{I_{N_I}}$ a função N_I -dual de f_I , a δ -sensibilidade de $f_{I_{N_I}}$ no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ é dado por*

$$\Delta_{(f_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = N_{SI}(\Delta_{f_I}(N_{SI}(\tilde{\mathbf{x}}), N_{SI}(\delta))). \quad (93)$$

Prova. Para todo $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n$, é válido que:

$$\begin{aligned}
\Delta_{(f_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) &= (r_{\tilde{U}}(\Delta_{(f_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)), l_{\tilde{U}}(\Delta_{(f_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta))) \text{ pelas Equações (88) e (89)} \\
&= (\Delta_{r_{\tilde{U}} \circ f_I}(r_{\tilde{U}} \circ N_I(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}} \circ N_I(\delta)), \Delta_{l_{\tilde{U}} \circ f_I}(l_{\tilde{U}} \circ N_I(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}} \circ N_I(\delta))) \\
&= (\Delta_{r_{\tilde{U}} \circ f_I}(l_{\tilde{U}}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)), \Delta_{l_{\tilde{U}} \circ f_I}(r_{\tilde{U}}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}}(\delta))) \text{ pela Equação (62)} \\
&= (r_{\tilde{U}}(\Delta_{f_I}(N_I(\tilde{\mathbf{x}}), N_I(\delta))), l_{\tilde{U}}(\Delta_{f_I}(N_I(\tilde{\mathbf{x}}), N_I(\delta)))) \text{ pela Equação (87)} \\
&= N_{SI}(\Delta_{f_I}(N_{SI}(\tilde{\mathbf{x}}), N_{SI}(\delta))) \text{ pelas Equações (70)(71)}.
\end{aligned}$$

Portanto Equação(93) é verificada.

5.3 Robustez de (Co)Normas Triangulares Intuicionistas

Esta seção apresenta uma análise da robustez baseada na δ -sensibilidade das t-(co)normas intuicionistas que são t-representáveis no sentido proposto em (BACZYŃSKI, 2003; G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

Proposição 5.3.1. *Seja $(S_I)T_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ uma t-(co)norma fuzzy intuicionista representável como definido pela Equação (77) Equação (78). Considere $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$. A δ -sensibilidade de $(S_I)T_I$ no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$, denotada por $(\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) \Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)$, é definida por*

$$\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_S((l_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1), \Delta_T((r_{\tilde{U}}, r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2)); \quad (94)$$

$$\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_T((l_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1), \Delta_S((r_{\tilde{U}}, r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2)). \quad (95)$$

Prova. Sejam $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^2$ de tal modo que $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $\tilde{x}_1 = (x_{11}, x_{12})$, $x_{11} \leq N_S(x_{12})$ e $\tilde{x}_2 = (x_{21}, x_{22})$, $x_{21} \leq N_S(x_{22})$; $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, de tal modo que $\tilde{y}_1 = (y_{11}, y_{12})$, $y_{11} \leq N_S(y_{12})$ e $\tilde{y}_2 = (y_{21}, y_{22})$, $y_{21} \leq N_S(y_{22})$. Segue que:

$$\begin{aligned}
\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) &= \sup\{|T_I(\tilde{\mathbf{x}}) - T_I(\tilde{\mathbf{y}})| : |x_{ij} - y_{ij}|_{i,j \in \{1,2\}} \leq \delta_j\} \text{ pela Equação (86)} \\
&= \sup\{|T_I((x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})) - T_I((y_{11}, y_{12}), (y_{21}, y_{22}))| : |x_{ij} - y_{ij}|_{i,j \in \{1,2\}} \leq \delta_j\} \\
&= \sup\{|(T(x_{11}, x_{21}), S(x_{12}, x_{22})) - (T(y_{11}, y_{21}), S(y_{12}, y_{22}))| : \\
&\quad |x_{1j} - y_{1j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_1, |x_{2j} - y_{2j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_2\} \text{ pela Equação (78)} \\
&= \sup\{(|T(x_{11}, x_{21}) - T(y_{11}, y_{21})|, |S(y_{12}, y_{22}) - S(x_{12}, x_{22})| : \\
&\quad |x_{1j} - y_{1j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_1, |x_{2j} - y_{2j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_2\} \\
&= (\sup\{|T(x_{11}, x_{21}) - T(y_{11}, y_{21})| : |x_{1j} - y_{1j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_1\}, \\
&\quad \sup\{|S(x_{12}, x_{22}) - S(y_{12}, y_{22})| : |x_{2ij} - y_{2j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_2\}) \\
&= (\Delta_T((l_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1), \Delta_S(r_{\tilde{U}}, r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2)) \text{ pela Equação (39) e Equação (74)}.
\end{aligned}$$

Portanto, verifica-se que Equação (94) é válida. Da mesma forma, pode ser provada a Equação (95).

No que segue, o estudo da δ -sensibilidade de uma t-(co)norma intuicionista no ponto $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = ((x_{11}, x_{12}), (x_{11}, x_{12}))$ no domínio \tilde{U}^2 estende o trabalho introduzido em (LI et al., 2005) ao aplicar as funções de projecção na classe de tais conectivos fuzzy intuicionista binários para expressá-los a partir de seus correspondentes conectivos fuzzy (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004). Com base nas projeções, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 5.3.2. A δ -sensibilidade de $(S_I) T_I$ no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$, denotado por $(\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta))$ $\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)$, pode ser definida pelas projeções:

$$l_{\tilde{U}}(\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_T((l_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1) \quad e \quad r_{\tilde{U}}(\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_S((r_{\tilde{U}}, r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2); \quad (96)$$

$$r_{\tilde{U}}(\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_S((l_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1) \quad e \quad l_{\tilde{U}}(\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_T((r_{\tilde{U}}, r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2). \quad (97)$$

Prova. Segue direto da Proposição 5.3.1.

Analogamente, seguem os mesmos resultados, considerando as componentes de cada argumento em $\tilde{\mathbf{x}}$:

Corolário 5.3.1. Quando $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) \in \tilde{U}^2$, tem-se que:

$$\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_T((x_{11}, x_{21}), \delta_1), \Delta_S((x_{12}, x_{22}), \delta_2)); \quad (98)$$

$$\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_S((x_{11}, x_{21}), \delta_1), \Delta_T((x_{12}, x_{22}), \delta_2)). \quad (99)$$

Prova. Segue da Proposição 5.3.2 e Equação (78) que:

$$\begin{aligned} l_{\tilde{U}}(\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) &= \Delta_{l_{\tilde{U}} \circ T_I}(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_T((x_{11}, x_{21}), \delta_1); \\ r_{\tilde{U}}(\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) &= \Delta_{r_{\tilde{U}} \circ T_I}(r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_S((x_{12}, x_{22}), \delta_2). \end{aligned}$$

Portanto a Equação (98) é válida. De modo análogo, a Equação (99) pode ser provada.

Os resultados discutidos no Corolário (5.3.3) estendem os resultados apresentados em (LI et al., 2005, Corolário1(i)).

Corolário 5.3.2. Seja $f_I: \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ uma t-(co)norma fuzzy intuicionista. Então, tem-se:

$$\Delta_{f_I}((\tilde{0}, \tilde{1}), \delta) = \Delta_{f_I}((\tilde{1}, \tilde{0}), \delta) = \delta; \quad (100)$$

$$\Delta_{f_I}((\tilde{0}, \tilde{0}), \delta) = f_I(\delta, \delta); \quad (101)$$

$$\Delta_{f_I}((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta) = (f_{N_S}(\delta_1, \delta_1), f_{N_S}(\delta_2, \delta_2)) \quad (102)$$

Prova. Pelos resultados apresentados no Corolário 5.3.1, segue que:

$$\begin{aligned} \Delta_{f_I}((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta) &= (\Delta_f((1, 1), \delta_1), \Delta_f((0, 0), \delta_2)) \\ &= (N_S(f(N_S(\delta_1), N_S(\delta_1))), f_{N_S}(\delta_2, \delta_2)) = (f_{N_S}(\delta_1, \delta_1), f_{N_S}(\delta_2, \delta_2)) \end{aligned}$$

Portanto, Equação (102) é verificada. Da mesma forma, as demais expressões nas Equações (100)(101) podem ser verificadas.

5.3.1 Robustez de t-(Co)Normas Intuicionistas e Relação de Dualidade

Esta seção descreve a ação do operador dual na classe das t-(co)normas fuzzy intuicionistas que são representáveis.

Proposição 5.3.3. Seja $(S_I)T_I: \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ uma t-(co)norma fuzzy intuicionista representável como definido pela Equação (77) e Equação (78). Considerando $N = N_S$, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$, a δ -sensibilidade de $(S_I)N_{S_I}$ e $T_I N_{S_I}$ no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ são definidas por

$$\Delta_{(T_I)N_{S_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = N_{S_I}(\Delta_{T_I}(N_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}), N_{S_I}(\delta))); \quad (103)$$

$$\Delta_{(S_I)N_{S_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = N_{S_I}(\Delta_{S_I}(N_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}), N_{S_I}(\delta))). \quad (104)$$

Prova. Segue pela aplicação da Equação (93), na Proposição 5.2.2.

Na sequência, tem-se a expressão da relação dual de t-(co)normas fuzzy intuicionistas em termos dos argumento de $\tilde{\mathbf{x}}$:

Corolário 5.3.3. Seja $(S_I)T_I: \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ uma t-(co)norma fuzzy intuicionista representável como definida pela Equação (77) e Equação (78). Considerando $N = N_S$, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$

e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$, a δ -sensibilidade de $(S_{I_{N_{S_I}}}) T_{I_{N_{S_I}}}$ no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ podem ser definidas pelas expressões

$$\Delta_{(T_I)_{N_{S_I}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \left(\Delta_{T_{N_S}}((x_{11}, x_{21}), \delta_1), \Delta_{S_{N_S}}((x_{12}, x_{22}), \delta_2) \right); \quad (105)$$

$$\Delta_{(S_I)_{N_{S_I}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \left(\Delta_{S_{N_S}}((x_{11}, x_{21}), \delta_1), \Delta_{T_{N_S}}((x_{12}, x_{22}), \delta_2) \right). \quad (106)$$

Prova. Segue da Proposição 5.3.3.

A Proposição 5.3.4 mostra que, quando $N = N_I$, as funções de projecções preservam a construção N_I -dual de t-(co)normas fuzzy intuicionistas que são representáveis segundo abordagem em (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

Proposição 5.3.4. *Seja $(S_I)T_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ uma t-(co)norma fuzzy intuicionista representável como definida pela (Equação (77)) Equação (78). Considerando $N = N_S$, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$, tem-se que:*

$$l_{\tilde{U}^2} \left(\Delta_{(T_I)_{N_{S_I}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) \right) = \Delta_{l_{\tilde{U}^2} \circ T_{I_{N_{S_I}}}}(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_{T_{N_S}}((x_{11}, x_{21}), \delta_1) \quad (107)$$

$$r_{\tilde{U}^2} \left(\Delta_{(T_I)_{N_{S_I}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) \right) = \Delta_{r_{\tilde{U}^2} \circ T_{I_{N_{S_I}}}}(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_{S_{N_S}}((x_{12}, x_{22}), \delta_2) \quad (108)$$

$$l_{\tilde{U}^2} \left(\Delta_{(S_I)_{N_{S_I}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) \right) = \Delta_{l_{\tilde{U}^2} \circ S_{I_{N_{S_I}}}}(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_{S_{N_S}}((x_{11}, x_{21}), \delta_1) \quad (109)$$

$$r_{\tilde{U}^2} \left(\Delta_{(S_I)_{N_{S_I}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) \right) = \Delta_{r_{\tilde{U}^2} \circ S_{I_{N_{S_I}}}}(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_{T_{N_S}}((x_{12}, x_{22}), \delta_2) \quad (110)$$

Prova. Segue direto do Corolário 5.3.3.

A Figura 6 apresenta as relações que preservam a robustez de construções duais na classe das t-normas fuzzy intuicionistas. Analogamente, também podem ser verificadas as correlações na classe t-conormas fuzzy intuicionistas.

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\mathbf{x}}, \delta) & \xrightarrow{\text{Eq. (87)}} & \Delta_{N_{S_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) \\ \left| \text{Eq. (95)} \right. & & \left. \text{Eq. (103)} \right. \\ \left. \Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) \right. & \xrightarrow{\text{Eqs. (109)(110)}} & \left. \Delta_{(T_I)_{N_{S_I}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) \right. \end{array}$$

Figura 6: Análise da robustez na classe IFTs.

Observação 5.3.1. *Em analogia do que foi descrito na Observação 3.1.3, podemos considerar valorações diferenciadas para a perturbação $\delta = (\delta_1, \delta_2) = ((\delta_{11}, \delta_{12}), (\delta_{21}, \delta_{22}))$ referente a um argumento $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = ((x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22}))$, respectivamente.*

Tabela 11: T-norma e T-conorma Fuzzy Intuicionista definida pelo Produto Algébrico (T_P) e Soma Determinística (S_P)

\tilde{x}	$\Delta_{T_P}(\tilde{x}, \tilde{\delta})$	$\Delta_{S_P}(\tilde{x}, \tilde{\delta})$
$(\tilde{0}, \tilde{0})$	$(\delta_{11}\delta_{12}, \delta_{12}\delta_{22})$	$(\delta_{11} + \delta_{21} - \delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12} + \delta_{22} - \delta_{12}\delta_{22})$
$(\tilde{0}, \tilde{1})$	$(\delta_{11}, \delta_{21})$	$(\delta_{12}, \delta_{22})$
$(\tilde{1}, \tilde{0})$	$(\delta_{12}, \delta_{22})$	$(\delta_{11}, \delta_{21})$
$(\tilde{1}, \tilde{1})$	$(\delta_{11} + \delta_{21} - \delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12} + \delta_{22} - \delta_{12}\delta_{22})$	$(\delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12}\delta_{22})$

Neste contexto, aplicando a Equação (49) resulta em que:

$$\begin{aligned}
\Delta_{T_P}((0, 0), (\delta_{11}, \delta_{21})) &= (T_P(0 + \delta_{11} \wedge 1, 0 + \delta_{21} \wedge 1) - T_P(0, 0)) \\
&\quad \vee (T_P(0, 0) - T_P(0 - \delta_{11} \vee 0, 0 - \delta_{21} \vee 0)) \\
&= T_P(\delta_{11}, \delta_{21}) \vee 0 = T_P(\delta_{11}, \delta_{21}) = (\delta_{11}, \delta_{21}) \\
\Delta_{S_P}((1, 1), (\delta_{21}, \delta_{22})) &= (\delta_{21}, \delta_{22}) \\
\Delta_{S_P}((0, 0), (\delta_{21}, \delta_{22})) &= (S_P(0 + \delta_{12} \wedge 1, 0 + \delta_{22} \wedge 1) - S_P(0, 0)) \\
&\quad \vee (S_P(0, 0) - S_P(0 - \delta_{12} \vee 0, 0 - \delta_{22} \vee 0)) \\
&= S_P(\delta_{12}, \delta_{22}) \vee 0 = S_P(\delta_{12}, \delta_{22}) = \delta_{12} + \delta_{22} - \delta_{12}\delta_{22} \\
\Delta_{T_P}((1, 1), (\delta_{11}, \delta_{21})) &= \delta_{11} + \delta_{21} - \delta_{11}\delta_{21}
\end{aligned}$$

E na sequência, aplicando as Equações (98) e (99), obtemos também que:

$$\begin{aligned}
\Delta_{T_{P_I}}(\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\delta}) &= \Delta_{T_{P_I}}((\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{0}}), (\delta_1, \delta_2)) = (\Delta_{T_P}((0, 0), (\delta_{11}, \delta_{21})), \Delta_{S_P}((1, 1), (\delta_{21}, \delta_{22}))) \\
&= (T_P(\delta_{11}, \delta_{21}), 1 - S_P(1 - \delta_{21}, 1 - \delta_{22})) \\
&= (T_P(\delta_{11}, \delta_{21}), T_P(\delta_{21}, \delta_{22})) = (\delta_{11}\delta_{21}, \delta_{21}\delta_{22}) \\
\Delta_{S_{P_I}}(\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\delta}) &= \Delta_{S_{P_I}}((\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{0}}), (\delta_1, \delta_2)) = (\Delta_{S_P}((0, 0), (\delta_{11}, \delta_{21})), \Delta_{T_P}((1, 1), (\delta_{21}, \delta_{22}))) \\
&= (S_P(\delta_{11}, \delta_{21}), 1 - S_T(1 - \delta_{21}, 1 - \delta_{22})) \\
&= (S_P(\delta_{11}, \delta_{21}), S_P(\delta_{21}, \delta_{22})) = (\delta_{11} + \delta_{21} - \delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12} + \delta_{22} - \delta_{12}\delta_{22})
\end{aligned}$$

A Tabela 11 apresenta outros exemplos desta aplicação.

5.4 Robustez de Implicações Fuzzy Intuicionistas

A discussão sobre a δ -sensibilidade de uma (S, N) -implicação representável I_I no ponto $\tilde{x} \in \tilde{U}^2$ é introduzida em (REISER; BEDREGAL, 2015). Nesta seção, os principais resultados são relatados e outras proposições são estudadas.

Com base nas funções de projeção em \tilde{U}^2 , veja nas Equações (70) e (71), a Proposição 5.4.2 estende os resultados em (REISER; BEDREGAL, 2015, Proposição 10), proporcionando uma expressão para a δ -sensibilidade de uma (S, N) -implicação intuicionista obtida por t-(co)normas representáveis.

Agora, estudamos a δ -sensibilidade de uma (S, N) -implicação intuicionista no ponto $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$.

Proposição 5.4.1. *Seja $I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ uma (S, N) -implicação fuzzy intuicionista como definida pela Equação (84). Considerando $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$, a δ -sensibilidade de I_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ é definida por*

$$\Delta_{I_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_{I_a}((N_S \circ r_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1), \Delta_{I_b}((l_{\tilde{U}}, N_S \circ r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2)). \quad (111)$$

Prova. *Seja I_I uma (S, N) -implicação representável obtida por (S, N) -implicações fuzzy I_a, I_b e a negação fuzzy padrão N_S , definida pela Equação (84). Para todos $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^2$, segue que:*

$$\begin{aligned} \Delta_{I_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) &= \\ &= \sup\{|I_I(\tilde{\mathbf{x}}) - I_I(\tilde{\mathbf{y}})| : |x_{ij} - y_{ij}|_{i,j \in \{1,2\}} \leq \delta\} \text{ pela Equação (86)} \\ &= \sup\{|I_I((x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})) - I_I((y_{11}, y_{12}), (y_{21}, y_{22}))| : |x_{ij} - y_{ij}|_{i,j \in \{1,2\}} \leq \delta\} \\ &= \sup\{|(I_a(N_S(x_{12}), x_{21}), N_S(I_b(x_{11}), N_S(x_{22}))) - (I_a(N_S(y_{12}), y_{21}), N_S(I_b(y_{11}), N_S(y_{22}))))| : \\ &\quad |x_{1j} - y_{1j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_1, |x_{2j} - y_{2j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_2\} \text{ pela Equação (84)} \\ &= \sup\{|(I_a(N_S(x_{12}), x_{21}) - I_a(N_S(y_{12}), y_{21}))|, |N_S(I_b(y_{11}), N_S(y_{22})) - N_S(I_b(x_{11}), N_S(x_{22})))| : \\ &\quad |x_{1j} - y_{1j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_1, |x_{2j} - y_{2j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_2\} \\ &= (\sup\{|I_a(N_S(x_{12}), x_{21}) - I_a(N_S(y_{12}), y_{21})| : |x_{1j} - y_{1j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_1\}, \\ &\quad \sup\{|N_S(I_b(y_{11}), N_S(y_{22})) - N_S(I_b(x_{11}), N_S(x_{22})))| : |x_{2j} - y_{2j}|_{j \in \{1,2\}} \leq \delta_2\}) \\ &= (\Delta_{I_a}((N_S \circ r_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1), \Delta_{I_b}((l_{\tilde{U}}, N_S \circ r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2)) \text{ pela Equação (39)} \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que $l_{\tilde{U}}(\Delta_{I_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_{I_a}((N_S \circ r_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1)$ e analogamente, temos que $r_{\tilde{U}}(\Delta_{I_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_{I_b}((l_{\tilde{U}}, N_S \circ r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2)$.

Proposição 5.4.2. *Seja $I_I(J_I) : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ uma intuicionista t-representável (S, N) -implicação $((T, N)$ -implicação), como dadas pelas Equações (84) e (85). Se $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}^2$, a δ -sensibilidade de I_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ é dada por*

$$\Delta_{I_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}) = (\Delta_{I_a}((N_S(x_{12}), x_{21}), \delta_1), \Delta_{N_S \circ I_b}((x_{11}, N_S(x_{22})), \delta_2)). \quad (112)$$

Analogamente, a δ -sensibilidade de J_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ é dada por

$$\Delta_{J_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_{J_a}((N_S(x_{12}), x_{21}), \delta_1), \Delta_{N_S \circ J_b}(x_{11}, N_S(x_{22}), \delta_2),). \quad (113)$$

Prova. Segue-se a partir de:

$$\begin{aligned}
\Delta_{I_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) &= \Delta_{S_I}((N_I(x_1), x_2), \delta) \\
&= \Delta_{S_I}(((x_{21}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})))\delta) \\
&= (\Delta_{S_a}((x_{12}, x_{21}), \delta_1), \Delta_{S_b N_S}(x_{11}, x_{22}), \delta_2) \\
&= (\Delta_S((x_{12}, x_{21}), \delta_1), \Delta_{N_S \circ S_b}(N_S(x_{11}), N_S(x_{22})), \delta_2) \\
&= (\Delta_{I_a}(N_S(x_{12}), x_{21}), \delta_1, \Delta_{N_S \circ I_b}(x_{11}, N_S(x_{22})), \delta_2).
\end{aligned}$$

Analogamente, a Equação (113) pode ser provada.

Ao considerar S-implicação fuzzy intuicionista, o próximo corolário estende a lógica fuzzy intuicionista proposta por Atanassov para aproximar os resultados apresentados em (LI et al., 2005, Corolário 1(iii)):

Corolário 5.4.1. *Seja $f_I: \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ uma (S, N) -implicação (ou (T, N) -coimplicação) fuzzy intuicionista. Então:*

$$\begin{aligned}
\Delta_{f_I}((\tilde{0}, \tilde{1}), \delta) &= N_{S_I} f_I(\delta, N_I(\delta)); & \Delta_{f_I}((\tilde{0}, \tilde{0}), \delta) &= N_{S_I}(N_I(\delta)); \\
\Delta_{f_I}((\tilde{1}, \tilde{0}), \delta) &= f_I(N \circ N_{S_I}(\delta), \delta); & \Delta_{f_I}((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta) &= \delta.
\end{aligned}$$

Prova. Pelo Corolário 5.3.3, temos que:

$$\Delta_{f_I}((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta) = (\Delta_f((1, 1), \delta_1), \Delta_f((0, 0), \delta_2)) = (\delta_1, \delta_2) = \delta$$

Analogamente, as demais expressões podem ser provadas.

Corolário 5.4.2. *Seja $f_I: \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ uma (S, N) -implicação (ou (T, N) -coimplicação) fuzzy intuicionista e f_{N_I} a sua construção dual. Quando $N = N_S$, as seguintes expressões são verificadas: (i) $\Delta_f((\tilde{0}, \tilde{1}), \delta) = f_{N_I}(N_I(\delta), \delta)$; (ii) $\Delta_f((\tilde{1}, \tilde{0}), \delta) = f(\delta, \delta)$; (iii) $\Delta_f((\tilde{0}, \tilde{0}), \delta) = \Delta_f((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta) = \delta$.*

Prova. Direto do Corolário 5.4.1.

Proposição 5.4.3. *Seja $(J_I)I_I : \tilde{U}^n \rightarrow \tilde{U}$ uma (co)implicação fuzzy intuicionista representável e $(\Delta_J(\mathbf{x}, \delta)) \Delta_I(\mathbf{x}, \delta)$ a δ -sensibilidade de uma (co)implicação $(J) I$ no ponto \mathbf{x} . De acordo com a Proposição 5.2.2, quando N é uma negação fuzzy padrão ($N = N_S$ na Equação (3)) e $(J_N)I_N$ é a função N -dual de $(J) I$, a δ -sensibilidade de I_{I_N} no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ é dada por*

$$\Delta_{I_{I_N}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_{N_S \circ I_b}((x_{12}, N_S(x_{21})), \delta_1), \Delta_{I_a}((N_S(x_{11}), x_{22}), \delta_2)); \quad (114)$$

Dualmente, a δ -sensibilidade de $J_{I_{N_I}}$ no ponto \tilde{x} é dada por

$$\Delta_{J_{I_{N_I}}}(\tilde{x}, \delta) = (\Delta_{N_S \circ J_b}((x_{12}, N_S(x_{21})), \delta_1), \Delta_{J_a}((N_S(x_{11}), x_{22}), \delta_2)). \quad (115)$$

Prova. A partir de Equação(93) na Proposição 5.2.2, temos que:

$$\begin{aligned} \Delta_{I_{N_I}}(\tilde{x}, \delta) &= N_I(\Delta_{I_I}(N_I(\tilde{x}), N_I(\delta))) = N_I(\Delta_{I_I}((x_{12}, x_{11}), (x_{22}, x_{21})), (\delta_2, \delta_1)) \\ &= N_I(\Delta_{I_a}((N_S(x_{11}), x_{22}), \delta_2), \Delta_{N_S \circ I_b}((x_{12}, N_S(x_{21})), \delta_1)) \\ &= (\Delta_{N_S \circ I_b}((x_{12}, N_S(x_{21})), \delta_1), \Delta_{I_a}((N_S(x_{11}), x_{22}), \delta_2)) \end{aligned}$$

Analogamente, Equação (115) também pode ser provada.

Corolário 5.4.3. As declarações a seguir são verificadas:

- (i) quando $\tilde{x} = (\tilde{0}, \tilde{0})$ ou $\tilde{x} = (\tilde{1}, \tilde{1})$, tem-se $\Delta_{I_{N_I}}(\tilde{x}, \delta) = \Delta_{J_{I_{N_I}}}(\tilde{x}, \delta) = \delta$;
- (ii) quando $\tilde{x} = (\tilde{0}, \tilde{1})$ então $\Delta_{I_{N_I}}(\tilde{x}, \delta) = \Delta_{T_I}((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta)$; e $\Delta_{J_{I_{N_I}}}(\tilde{x}, \delta) = \Delta_{S_I}((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta)$.
- (iii) quando $\tilde{x} = (\tilde{1}, \tilde{0})$, tem-se $\Delta_{I_{N_I}}(\tilde{x}, \delta) = \Delta_{T_I}((\tilde{0}, \tilde{0}), \delta)$; e $\Delta_{J_{I_{N_I}}}(\tilde{x}, \delta) = \Delta_{S_I}((\tilde{0}, \tilde{0}), \delta)$.

A Figura 7 apresenta um diagrama comutativo com os principais resultados discutidos nas Proposições 5.4.2 e 5.4.3.

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{x}, \delta) & \xrightarrow{\text{Eq. (87)}} & \Delta_{N_{S_I}}(\tilde{x}, \delta) \\ \downarrow \text{Eq. (112)} & & \downarrow \text{Eq. (114)} \\ \Delta_{I_I}(\tilde{x}, \delta) & \xrightarrow{\text{Eq. (111)}} & \Delta_{I_{N_{S_I}}}(\tilde{x}, \delta) \end{array}$$

Figura 7: Operador de robustez na classe das (S,N)-implicações representáveis.

O Teorema a seguir estende os resultados em (LI et al., 2005, Teorema 2) considerando a abordagem intuicionista proposta por Atanassov.

Teorema 5.4.1. Seja uma (S, N)-implicação fuzzy intuicionista tal que $I_{S_P, N_S}(\tilde{x}, \tilde{y}) = S_{P_I}(N_{S_I}(\tilde{x}), \tilde{y})$, S_I é uma t-conorma fuzzy intuicionista e N_I é uma negação fuzzy intuicionista. Então:

- (i) $\Delta_I((\tilde{0}, \tilde{0}), \tilde{\delta}) = 1 - N_{S_I}(\tilde{\delta})$; (ii) $\Delta_I((\tilde{0}, \tilde{1}), \tilde{\delta}) = 1 - S_{P_I}(N_{S_I}(\tilde{\delta}), 1 - \tilde{\delta})$;
- (iii) $\Delta_I((\tilde{1}, \tilde{0}), \tilde{\delta}) = S_{P_I}(N_{S_I}(1 - \tilde{\delta}), \tilde{\delta})$; (iv) $\Delta_I((\tilde{1}, \tilde{1}), \tilde{\delta}) = \tilde{\delta}$.

Prova. Pela Proposição 5.4.2, segue que:

(iv) Seja $\tilde{\delta} \in \tilde{U}^2$. Então tem-se que $\Delta_I((\tilde{1}, \tilde{1}), \tilde{\delta}) = (\Delta_{I_a}((N(0), 1), \delta_1), \Delta_{I_b}((1, N(0)), \delta_2))$.

$\begin{aligned} &\Delta_{I_a}((1, 1), \delta_1) \\ &I_a(1, 1) = 1 \\ &I_a[1, 1] = I_a(1 - \delta_1 \vee 0, 1 + \delta_1 \wedge 1) \\ &= I_a(1 - \delta_1, 1) \\ &= 1 - 1 + \delta_1 + 1 - \delta_1 = 1 \\ \\ &I_a[1, 1] = I_a(1 + \delta \wedge 1, 1 - \delta \vee 0) \\ &= I_a(1, 1 - \delta) \\ &= 1 - 1 + 1 - \delta = 1 - \delta \\ &(I_a(1, 1) - I_a[1, 1]) \vee (I_a[1, 1] - I_a(1, 1)) \\ &1 - 1 + \delta \vee 1 - 1 = \delta \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\Delta_{I_b}((1, 1), \delta_2) \\ &I_b(1, 1) = 0 \\ &I_b[1, 1] = I_b(1 - \delta_2 \vee 0, 1 + \delta_2 \wedge 1) \\ &= I_b(1 - \delta_2, 1) \\ &= 1 - 1 + \delta_2 = \delta_2 \\ \\ &I_b[1, 1] = I_b(1 + \delta \wedge 1, 1 - \delta \vee 0) \\ &= I_b(1, 1 - \delta) \\ &= 1 - \delta - 1 + \delta = 0 \\ &(I_b(1, 1) - I_b[1, 1]) \vee (I_b[1, 1] - I_b(1, 1)) \\ &0 - 0 \vee \delta - 0 = \delta \end{aligned}$
--	--

Portanto, conclui-mos que $\Delta_I(\tilde{1}, \tilde{1}) = \tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$

(i) $\Delta_{I_{S_P, N_{S_I}}}((\tilde{0}, \tilde{0}), \tilde{\delta}) = (\Delta_{I_a}((N(1), 0), \delta_1), \Delta_{I_b}((0, N(1)), \delta_2))$. Logo, temos que:

$\begin{aligned} &\Delta_{I_a}((0, 0), \delta_1) \\ &I_a(0, 0) = 1 \\ &I_a[0, 0] = I_a(0 - \delta \vee 0, 0 + \delta \wedge 1) \\ &= I_a(0, \delta) = 1 \\ \\ &I_a[0, 0] = I_a(0 + \delta \wedge 1, 0 - \delta \vee 0) \\ &= I_a(\delta, 0) = 1 - \delta + 0 = 1 - \delta \\ \\ &(I_a(0, 0) - I_a[0, 0]) \vee (I_a[0, 0] - I_a(0, 0)) \\ &1 - 1 + \delta \vee 1 - 1 = \delta \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\Delta_{I_b}((0, 0), \delta_2) \\ &I_b(0, 0) = 0 \\ &I_b[0, 0] = I_b(0 - \delta \vee 0, 0 + \delta \wedge 1) \\ &= I_b(0, \delta) = \delta \\ \\ &I_b[0, 0] = I_b(0 + \delta \wedge 1, 0 - \delta \vee 0) \\ &= I_b(\delta, 0) = 0 \\ \\ &(I_b(0, 0) - I_b[0, 0]) \vee (I_b[0, 0] - I_b(0, 0)) \\ &0 - 0 \vee \delta - 0 = \delta \end{aligned}$
---	--

$\Delta_{I_{S_P, N_{S_I}}}((\tilde{0}, \tilde{0}), \tilde{\delta}) = 1 - N_{S_I}(\tilde{\delta})$.

(iii) $\Delta_{I_{S_P, N_{S_I}}}((\tilde{1}, \tilde{0}), \tilde{\delta}) = (\Delta_{I_a}((N(0), 0), \delta_1), \Delta_{I_b}((1, N(1)), \delta_2))$. Logo, temos que:

$\begin{aligned} &\Delta_{I_a}((1, 0), \delta_1) \\ &I_a(1, 0) = 0 \\ &I_a[1, 0] = I_a(1 - \delta \vee 0, 0 + \delta \wedge 1) \\ &= I_a(1 - \delta_1, \delta) \\ &= 1 - 1 + \delta_1 + \delta_1 - \delta_1^2 = 2\delta_1 - \delta_1^2 \\ &I_a[0, 0] = I_a(0 + \delta \wedge 1, 0 - \delta \vee 0) \\ &= I_a(\delta, 0) = 1 - \delta + 0 = 1 - \delta \\ \\ &(I_a(0, 0) - I_a[0, 0]) \vee (I_a[0, 0] - I_a(0, 0)) \\ &1 - 1 + \delta \vee 1 - 1 = \delta \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\Delta_{I_b}((1, 0), \delta_2) \\ &I_b(1, 0) = 0 \\ &I_b[1, 0] = I_b(1 - \delta \vee 0, 0 + \delta \wedge 1) \\ &= I_b(1 - \delta_2, \delta_2) \\ &\delta_2 - \delta_2 + \delta_2^2 = \\ &I_b[0, 0] = I_b(0 + \delta \wedge 1, 0 - \delta \vee 0) \\ &= I_b(\delta, 0) = 0 \\ \\ &(I_b(0, 0) - I_b[0, 0]) \vee (I_b[0, 0] - I_b(0, 0)) \\ &0 - 0 \vee \delta - 0 = \delta \end{aligned}$
---	--

Tabela 12: Impliçaõ e Coimpliçaõ Fuzzy Intuicionista

X	$\Delta_{I_{SP,NS_I}}(\tilde{x}, \tilde{\delta})$	$\Delta_{J_{TP,NS_I}}(\tilde{x}, \tilde{\delta})$
$(\tilde{0}, \tilde{0})$	$(\delta_{11}, \delta_{21})$	$(\delta_{12}\delta_{22})$
$(\tilde{0}, \tilde{1})$	$(\delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12}\delta_{22})$	$(\delta_{11} + \delta_{21} - \delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12} + \delta_{22} - \delta_{12}\delta_{22})$
$(\tilde{1}, \tilde{0})$	$(\delta_{11} + \delta_{21} - \delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12} + \delta_{22} - \delta_{12}\delta_{22})$	$(\delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12}\delta_{22})$
$(\tilde{1}, \tilde{1})$	$(\delta_{12}, \delta_{22})$	$(\delta_{11}, \delta_{21})$

Portanto, $\Delta_{I_{SP,NS_I}}((\tilde{1}, \tilde{0}), \tilde{\delta}) = \delta$.

Observaçaõ 5.4.1. As Tabelas 12 e 13 apresentam os resultados da análise de robustez referente a extensãõ intuicionista da Impliçaõ e Coimpliçaõ Fuzzy (de Reichenbach) a partir da aplicaçaõ da Equaçãõ (111), considerando novamente valorações diferenciadas para a perturbaçaõ $\delta = (\delta_1, \delta_2) = ((\delta_{11}, \delta_{12}), (\delta_{21}, \delta_{22}))$, ou seja, referente ao argumento $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = ((x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22}))$.

Tabela 13: IQL Fuzzy Intuicionista

X	$\Delta_{I_{SP,NS,TP_I}}(\tilde{x}, \tilde{\delta})$	$\Delta_{J_{TP,NS,SP_I}}(\tilde{x}, \tilde{\delta})$
$(\tilde{0}, \tilde{0})$	$((-\delta_{11} + \delta_{11}^2\delta_{21}), (-\delta_{12} + \delta_{12}^2\delta_{22}))$	$((\delta_{11} - \delta_{11}^2 + \delta_{21} - 2\delta_{11}\delta_{21} + \delta_{11}^2\delta_{21}),$ $(\delta_{12} - \delta_{12}^2 + \delta_{22} - 2\delta_{12}\delta_{22} + \delta_{12}^2\delta_{22}))$
$(\tilde{0}, \tilde{1})$	$((\delta_{11}^2 - \delta_{11}), (\delta_{21}^2 - \delta_{21}))$	$(\delta_{12}, \delta_{22})$
$(\tilde{1}, \tilde{0})$	$(\delta_{12}, \delta_{22})$	$((\delta_{11}^2 - \delta_{11}), (\delta_{21}^2 - \delta_{21}))$
$(\tilde{1}, \tilde{1})$	$((\delta_{11} - \delta_{11}^2 + \delta_{21} - 2\delta_{11}\delta_{21} + \delta_{11}^2\delta_{12}),$ $(\delta_{12} - \delta_{12}^2 + \delta_{22} - 2\delta_{12}\delta_{22} + \delta_{12}^2\delta_{22}))$	$((-\delta_{11} + \delta_{11}^2\delta_{21}), (-\delta_{12} + \delta_{12}^2\delta_{22}))$

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A robustez é vista como propriedade fundamental na modelagem lógica de sistemas computacionais baseados na lógica fuzzy, garantindo que conclusões não sejam essencialmente modificadas, quando forem assumidas condições variáveis referentes a um parâmetro (δ) na modelagem do raciocínio fuzzy. A noção de robustez formaliza vias e métodos para incorporar a modelagem de erros e perturbações em um sistema de regras de raciocínio fuzzy.

Esta dissertação aborda um estudo da robustez no sentido estrito, centrado na análise da δ -sensibilidade de conectivos da Lógica Fuzzy Intuicionista que podem ser representáveis por conectivos da Lógica Fuzzy.

A análise da δ -sensibilidade dos operadores fuzzy cujos argumentos satisfazem propriedades como mono/anti/isotonicidade (negações, agregações, implicações e coimplicações) é estendida para a abordagem fuzzy intuicionista.

Além destes, consideramos o comportamento nos extremos do intervalo unitário U para operadores fuzzy, nos quais a monotonicidade não pode ser aplicada (Xor, XNor, bi-implicações e bi-coimplicações), garantindo uma análise da robustez nos pontos terminais para abordagem fuzzy e correspondente extensão intuicionista.

A principal contribuição deste trabalho é estender o estudo da δ -sensibilidade como proposto no trabalho de (LI et al., 2005) para a classe dos conectivos fuzzy intuicionistas, estabelecendo que a sensibilidade ponto a ponto é preservada por construções duais e operadores de projeção, contribuindo desta forma para evitar resultados inesperados no raciocínio fuzzy intuicionista.

Como aplicação, complementando o estudo da instabilidade baseada na análise de operadores fuzzy, são investigadas algumas das classes de operadores fuzzy como implicações e bi-implicações derivadas dos conectivos f_Xor e f_XNor .

Incluíram-se também aplicações das extensões intuicionistas das classes das (S, N) -implicações e QL-implicações, instanciadas para norma produto e soma probabilística.

A continuidade do trabalho prevê a análise da robustez de outros operadores fuzzy e suas extensões intuicionistas, incluindo as relações fuzzy que modelam regras fuzzy – Modus Ponens Generalizada.

Outra possível linha de estudos futuros pode considerar a aplicação da robustez na avaliação

da estabilidade de sistemas baseados na lógica fuzzy e na lógica fuzzy intuicionista, com aplicação em operadores da morfologia matemática.

REFERÊNCIAS

- ATANASSOV, K. **Intuitionistic fuzzy sets: theory and applications**. [S.l.]: Physica-Verlag, 1999. (Studies in fuzziness and soft computing).
- ATANASSOV, K.; GARGOV, G. Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.31, n.3, p.343–349, 1989.
- ATANASSOV, K.; GARGOV, G. Elements of Intuitionistic Fuzzy Logic. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.9, n.1, p.39–52, 1998.
- ATANASSOV, K. T. Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.20, p.87–96, 1986.
- ATANASSOV, K. T. New Operations Defined Over the Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.61, n.2, p.137–142, 1994.
- ATANASSOV, K. T.; PASI, G.; YAGER, R. R.; ATANASSOVA, V. Intuitionistic fuzzy graph interpretations of multi-person multi-criteria decision making. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais...** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.177–182.
- BACZYŃSK, M.; JAYARAM, B. (U,N)-implications and their characterizations. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.14, p.2049–2062, 2009.
- BACZYŃSKI, M. On some properties of intuitionistic fuzzy implications. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais...** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.168–171.
- BACZYŃSKI, M.; JAYARAM, B. (S,N)- and R-implications: A state-of-the-art survey. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.14, p.1836–1859, 2008.
- BACZYŃSKI, M.; JAYARAM, B. **Fuzzy implications**. [S.l.]: Springer, Berlin, 2008. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.231).
- BAETS, B. Coimplicators, The Forgotten Connectives. **Tatra Mountains Mathematical Publications**, [S.l.], p.229–240, 1997.

- BALASUBRAMANIAM, J. Yager's New Class of Implications J_f and Some Classical Tautologies. **Information Sciences**, [S.I.], v.177, n.3, p.930–946, 2007.
- BEDREGAL, B.; DIMURO, G.; SANTIAGO, R.; REISER, R. On interval fuzzy S-implications. **Information Sciences**, [S.I.], n.180, p.1373–1389, 2010.
- BEDREGAL, B.; REISER, R.; BUSTINCE, H.; LOPEZ-MOLINA, C.; TORRA, V. Aggregation Functions for Typical Hesitant Fuzzy Elements and the Action of Automorphisms. **Information Sciences**, [S.I.], v.255, p.82–99, 2014.
- BEDREGAL, B.; REISER, R.; DIMURO, G. Revising XOR-implications: Classes of Fuzzy (Co)implications based on Fuzzy XOR (XNOR) connectives. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.I.], v.14, n.6, p.1–29, 2013.
- BEDREGAL, B.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. Xor-implications and E-implications: classes of fuzzy implications based on fuzzy Xor. **Electronic Notes on Theoretical Computer Science**, [S.I.], v.247, p.5–18, 2009.
- BUSTINCE, H.; BARRENECHEA, E.; MOHEDANO, V. Intuicionistic Fuzzy Implication Operators - An Expression and Main Properties. **Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.I.], v.12, p.387–406, 2004.
- BUSTINCE, H.; BURILLO, P. Correlation of Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.I.], v.74, n.2, p.237 – 244, 1995.
- BUSTINCE, H.; BURILLO, P.; SORIA, F. Automorphisms, negations and implication operators. **Fuzzy Sets Systems**, [S.I.], v.134, n.2, p.209– 229, 2003.
- BUSTINCE, H.; PAGOLA, M.; JURIO, A.; BARRENECHEA, E.; FERNANDEZ, J.; COUTO, P.; PINTO, P. M. A Survey of Applications of the Extensions of Fuzzy Sets to Image Processing. In: MELIN, P.; KACPRZYK, J.; PEDRYCZ, W. (Ed.). **Bio-inspired Hybrid Intelligent Systems for Image Analysis and Pattern Recognition**. [S.I.]: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p.3–32. (Studies in Computational Intelligence, v.256).
- CAI, K. Robustness of Fuzzy Reasoning and δ -Equalities of Fuzzy Sets. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, [S.I.], v.9, n.5, p.738 –750, oct 2001.
- CALVO, T.; KOLESÁROVÁ, A.; KORMONÍKOVÁ; MESIAR, R. Aggregation Operators: Properties, Classes and Construction Methods. In: CALVO, T.; MAYOR, G.; MESIAR, R. (Ed.). **Aggregation Operators New Trends and Applications**. [S.I.]: Springer, 2002. p.3–106. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.97).
- CHEN, G.; PHAM, T. T. **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems**. Boca Raton: CRC Press, 2001.

- CORNELIS, C.; ATANASSOV, K. T.; KERRE, E. E. Intuitionistic Fuzzy Sets and Interval-Valued Fuzzy Sets: a Critical Comparison. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais...** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.159–163.
- CORNELIS, C.; DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Classification of Intuitionistic Fuzzy Implicators: An Algebraic Approach. In: JCIS, 2002. **Anais...** JCIS / Association for Intelligent Machinery: Inc, 2002. p.105–108.
- DENGFENG, L.; CHUNTIAN, C. New Similarity Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets and Application to Pattern Recognitions. **Pattern Recognition Letters**, [S.l.], v.23, n.1-3, p.221–225, Jan. 2002.
- DESCHRIJVER, G. Arithmetic Operators in Interval-Valued Fuzzy Set Theory. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.14, p.2906–2924, 2007.
- DESCHRIJVER, G.; CORNELIS, C.; KERRE, E. E. On the Representation of Intuitionistic Fuzzy t -Norms and t -Conorms. **IEEE-Fuzzy Systems**, [S.l.], v.12, p.45–61, 2004.
- DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.229–248, 2005.
- DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.229–248, 2005.
- DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Smets-Magrez Axioms for R-implicators in Interval-Valued and Intuitionistic Fuzzy Set Theory. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.13, n.4, p.453–464, 2005.
- DUBOIS, D.; OSTASIEWICZ, W.; PRADE, H. **Fuzzy Sets: History and Basic Notions**. [S.l.]: Springer, 2000.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. Random sets and fuzzy interval analysis. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.42, n.1, p.87–101, 1991.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. **Fundamentals of Fuzzy Sets**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. **Interval-valued Fuzzy Sets, Possibility Theory and Imprecise Probability**. Barcelona: Universidad Polytechnica de Catalunya, 2005. 314–319p.
- FEI, Y.; XIYANG, Y.; HONGXING, L. Fuzzy implication operators and their construction (III): FIOS constructed by triangular norms or co-triangular norms. **Journal of Beijing Normal University (Natural Science)**, [S.l.], n.39, p.606–611, 2003.

- FEI, Y.; YANBIN, F.; HONGXING, L. Fuzzy implication operators and their construction (I): fuzzy implication operators and their properties. **Journal of Beijing Normal University (Natural Science)**, [S.l.], n.40, p.427–432, 2004.
- FODOR, J. C. On Fuzzy Implication Operators. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.42, n.3, p.293–300, 1991.
- FODOR, J. C. Contrapositive Symmetry of Fuzzy Implications. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.69, n.2, p.141–156, 1995.
- FODOR, J.; ROUBENS, M. **Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994.
- G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, E. K. Implications in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification and application. **International Journal of Approximate Reasoning**, [S.l.], n.35, p.55–95, 2004.
- GEHRKE, M.; WALKER, C.; WALKER, E. Some Comments on Interval Valued Fuzzy Sets. **International Journal of Intelligent Systems**, [S.l.], v.11, n.10, p.751–759, 1996.
- GERSTAENKORN, T.; MAŃKO, J. Correlation of intuitionistic fuzzy sets. **Fuzzy Sets Syst.**, [S.l.], v.44, n.1, p.39–43, Nov. 1991.
- HERNANDEZ, J.; NAVA, J. Least Sensitive (Most Robust) Fuzzy Exclusive Or Operations. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN ON FUZZY INFORMATION PROCESSING SOCIETY (NAFIPS) - IEEE CONF. PUBLICATIONS, 2011. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2011. p.1–6. DOI:10.1109/NAFIPS.2011.5752028.
- HERRERA, F.; MARTÍNEZ, L.; SÁNCHEZ, P. J. Managing non-homogeneous Information in Group Decision Making. **European Journal of Operational Research**, [S.l.], v.166, n.1, p.115–132, 2005.
- JENSEN, R.; SHEN, Q. **Computational Intelligence and Feature Selection: Rough and Fuzzy Approaches**. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2008.
- JIN, J.; LI, Y.; LI, C. Robustness of Fuzzy Reasoning via Logically Equivalence Measure. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.22, p.5103–5117, 2007.
- KLEMENT, E.; MESIAR, R.; PAP, E. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.143, n.1, p.5–26, 2004.
- KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. **Triangular Norms**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000.
- LEE, K. H. **First Course on Fuzzy Theory and Applications**. Berlin: Springer, 2005.

- LI, D.-F.; WANG, L.-L.; CHEN, G.-H. Group Decision Making Methodology Based on the Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Set Generalized OWA Operator. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.18, n.6, p.801–817, 2010.
- LI, D.; LI, Y.; XIE, Y. Robustness of Interval Valued Fuzzy Inference. **Information Sciences**, [S.l.], v.181, p.4754–4764, 2011.
- LI, P.; FANG, S.-C. A survey on fuzzy relational equations, part I: classification and solvability. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, Hingham, MA, USA, v.8, n.2, p.179–229, 2009.
- LI, Y. Approximation and Robustness of Fuzzy Finite automata. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.47, n.2, p.247–257, 2008.
- LI, Y.; LI, D.; PEDRYCZ, W.; WU, J. An Approach to Measure the Robustness of Fuzzy Reasoning. **Int. J. Intell. Syst.**, [S.l.], v.20, n.4, p.393–413, 2005.
- LIN, L.; XIA, Z.-Q. Intuitionistic Fuzzy Implication Operators: Expressions and Properties. **Journal of Applied Mathematics and Computing**, [S.l.], v.22, p.325–338, 2006.
- MAES, K.; BAETS, B. de. Commutativity and self-duality: Two tales of one equation. **Int. J. Approx. Reasoning**, New York, NY, USA, v.50, n.1, 2009.
- MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J. On two types of discrete implications. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.40, n.3, p.262–279, 2005.
- MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J. Two types of implications derived from uninorms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.158, n.3, p.2612–2626, 2007.
- MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J. Modus ponens and modus tollens in discrete implications. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.49, n.2, p.422–435, 2008.
- MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J.; TRILLAS, E. A Survey on Fuzzy Implication Functions. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.15, n.6, p.1107–1121, 2007.
- MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, V. QL-implications versus D-implications. **Kybernetika**, [S.l.], v.42, n.3, p.351–366, 2006.
- MCNEIL, F. M.; THRO, E. (Ed.). **Fuzzy Logic: A Practical Approach**. San Diego, USA: Academic Press Professional, 1994.
- MENDEL, J. M. **Type-2 Fuzzy Sets: Some Questions and Answers**.
- MITCHELL, H. B. Pattern recognition using type-II fuzzy sets. **Inf. Sci.**, [S.l.], v.170, n.2-4, p.409–418, 2005.

MOLNAROVA, M.; MYSKOVA, H.; PLAVKA, J. The robustness of interval fuzzy matrices. **Linear Algebra and its Applications**, [S.l.], v.225, n.438, p.3350–3364, 2013.

NAVARA, M. Characterization of measures based on strict triangular norms. **Mathematical Analysis and Applications**, [S.l.], v.236, n.2, p.370–383, 1999.

OBBERGUGGENBERGER, M.; SCHMELZER, B.; FELLIN, W. Sensitivity analysis through random and fuzzy sets. In: NAFIPS 2008 NY, 2008. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2008. DOI: 10.1109/NAFIPS.2008.4531315.

PEI, D. Unified full implication algorithms of fuzzy reasoning. **Information Sciences**, [S.l.], v.178, n.2, p.520–530, 2008.

REISER, R.; BEDREGAL, B. R. C. Robustness on Intuitionistic Fuzzy Connectives. **TEMA – Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, [S.l.], p.1–12, 2015. accepted to be published.

REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. R. C. Robustness of N-Dual Fuzzy Connectives. In: PINTO, P. M.; COUTO, P.; SERÔDIO, C.; FODOR, J.; BAETS, B. (Ed.). **Eurofuse 2011**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p.79–90. (Advances in Intelligent and Soft Computing, v.107).

RUAN, D.; KERRE, E. Fuzzy implication operators and generalized fuzzy methods of cases. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.54, n.1, p.23–37, 1993.

RUIZ-AGUILERA, D.; TORRENS, J. Residual Implications and Co-implications from Idempotent Uninorms. **Kybernetika**, [S.l.], v.1, n.40, p.21–38, 2004.

RUIZ-AGUILERA, D.; TORRENS, J. S- and R-implications from Uninorms Continuous in $]0, 1[^2$ and Their Distributivity Over Uninorms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.6, p.832–852, 2009.

SAINIO, E.; TURUNEN, E.; MESIAR, R. A characterization of fuzzy implications generated by generalized quantifiers. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.4, p.491–499, 2008.

SHI, Y.; GASSE, B. V.; RUAN, D.; KERRE, E. E. On the first place antitonicity in QL-implications. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.22, p.2988–3013, 2008.

SHI, Y.; RUAN, D.; KERRE, E. E. On the characterizations of fuzzy implications satisfying $I(x, y) = I(x, I(x, y))$. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.145, p.2954–2970, 2007.

SIVANANDAM, S. N.; SUMATHI, S.; DEEPA, S. N. **Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB**. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

SZMIDT, E.; KACPRZYK, J. A Similarity Measure for Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Application in Supporting Medical Diagnostic Reasoning. In: ICAISC, 2004. **Anais...** Springer, 2004. p.388–393. (Lecture Notes in Computer Science, v.3070).

TORRA, V. Hesitant Fuzzy Sets. **International Journal of Intelligent Systems**, [S.I.], v.25, p.529–539, 2010.

TSCHAN, F.; SEMMER, N. K.; GURTNER, A.; BIZZARI, L.; SPYCHIGER, M.; BREUER, M.; MARSCH, S. U. Explicit Reasoning, Confirmation Bias, and Illusory Transactive Memory: A Simulation Study of Group Medical Decision Making. **Small Group Research**, [S.I.], v.40, n.3, p.271–300, 2009.

WANG, J.-Q.; LI, K.-J.; ZHANG, H.-Y. Multi-Criteria Decision-Making Method Based on Induced Intuitionistic Normal Fuzzy Related Aggregation Operators. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.I.], v.20, n.04, p.559–578, 2012.

WANG, W. Q.; XIN, X. L. Distance Measure Between Intuitionistic Fuzzy Sets. **Pattern Recognition Letters**, [S.I.], v.26, n.13, p.2063–2069, Oct. 2005.

WU, L.; WANAN, C.; YAN, C.; YINGZI, F. A Group Decision-Making Model for Multi-Criteria Supplier Selection in the Presence of Ordinal Data. **2008 IEEE International Conference on Service Operations and Logistics and Informatics SOLI**, [S.I.], n.200712, p.1686–1690, 2008.

XIA, M.; XU, Z. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. **International Journal on Approximate Reasoning**, [S.I.], v.52, p.395–407, 2011.

XIA, M.; XU, Z.; CHEN, N. Some hesitant fuzzy aggregation operators with their application in group decision making. **Group Decision and Negotiation**, [S.I.], v.22, n.2, p.259–279, 2013.

XU, Z.; YAGER, R. Intuitionistic and Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Preference Relations and Their Measures of Similarity for the Evaluation of Agreement Within a Group. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, [S.I.], v.8, p.123–139, 2009.

YAGER, R. R. On the implication operator in fuzzy logic. **Information Sciences**, [S.I.], v.31, n.2, p.141–164, 1983.

YAGER, R. R. On global requirements for implication operators in fuzzy modus ponens. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.I.], v.106, n.1, p.3–10, 1999.

YAGER, R. R. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning. **Information Sciences**, [S.I.], v.167, n.1–4, p.193–216, 2004.

- YE, J. Cosine Similarity Measures for Intuitionistic Fuzzy Sets and Their Applications. **Mathematical and Computer Modelling**, [S.l.], v.53, n.1-2, p.91–97, 2011.
- YING, M. Perturbation on fuzzy reasoning. **IEEE Transaction on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.7, p.625–629, 1999.
- ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, [S.l.], v.8, n.3, p.338–353, 1965.
- ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I. **Information Sciences**, [S.l.], v.8, n.3, p.199–249, 1975.
- ZANOTELLI, R. M.; REISER, R. H. S.; CAVALHEIRO, S. C.; FOSS, L. Sensitivity and Dual Constructions on the Fuzzy f-XOR Class. In: **WORKSHOP-SCHOOL ON THEORETICAL COMPUTER SCIENCE (WEIT 2013) - IEEE CONF. PUBLICATIONS**, 2013. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2013. p.105–110. DOI: 10.1109/WEIT.2013.13.
- ZANOTELLI, R. M.; REISER, R. H. S.; CAVALHEIRO, S. C.; FOSS, L.; BEDREGAL, B. Towards Robustness and Duality Analysis of Intuitionistic Fuzzy Aggregations. In: **IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ IEEE 2015) - ISTANBUL TURKEY**, 2015. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2015.
- ZARGHAMI, M.; ARDAKANI, R.; MEMARIANI, A.; SZIDAROVSKY, F. Extended OWA Operator for Group Decision Making on Water Resources Projects. **Journal of Water Resources Planning and Management**, [S.l.], v.134, n.3, p.266–275, 2008.
- ZENDEHDEL, K.; RADEMAKER, M.; BAETS, B. D.; HUYLENBROECK, G. V. Improving Tractability of Group Decision Making on Environmental Problems Through the Use of Social Intensities of Preferences. **Environmental Modelling and Software**, [S.l.], v.24, n.12, p.1457–1466, 2009.
- ZHANG, L.; CAI, K. Optimal fuzzy reasoning and its robustness analysis. **Journal of Intelligent Systems**, [S.l.], v.19, n.11, p.1033–1049, 2004.
- ZHENG, Z.; LIU, W.; CAI, K. Robustness of fuzzy operators in environments with random perturbations. **Soft Computing**, [S.l.], v.14, p.1339–1348, 2010.

Consolidação do estudo e análise da robustez de operadores fuzzy considerando a abordagem intuicionista –
Rosana Medina Zanotelli



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Centro de Desenvolvimento Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Computação



Dissertação

Consolidação do estudo e análise da robustez de operadores fuzzy considerando a abordagem intuicionista

ROSANA MEDINA ZANOTELLI

Pelotas, 2015