UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Centro de Desenvolvimento Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Computação

Dissertação

Diferença Fuzzy Intuicionista: Robustez, Dualidade e Conjugação

Wilson Roberto da Silva Cardoso

Pelotas, 2016

Wilson Roberto da Silva Cardoso

Diferença Fuzzy Intuicionista: Robustez, Dualidade e Conjugação

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dra. Luciana. Foss
Coorientador: Prof. Dra. Renata Hax S. Reiser

Pelotas, 2016

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

C268d Cardoso, Wilson Roberto da Silva

Diferença Fuzzy intuicionista : robustez, dualidade e conjugação / Wilson Roberto da Silva Cardoso ; Luciana Foss, orientadora ; Renata Hax Sander Reiser, coorientadora. — Pelotas, 2016.

80 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, 2016.

1. Lógica Fuzzy. 2. Lógica Fuzzy intuicionista. 3. Robustez. 4. Diferença Fuzzy intuicionista. 5. Diferença Fuzzy. I. Foss, Luciana, orient. II. Reiser, Renata Hax Sander, coorient. III. Título.

CDD : 005

Elaborada por Aline Herbstrith Batista CRB: 10/1737

Dedico este trabalho a minha esposa Renata Bierhals e aos meus filhos Mariana, Theo e William.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

- A minha esposa, que soube ter paciência e carinho nesses longos meses de trabalho.
- Aos meus filhos, que são a minha melhor parte.
- Aos meus pais e sogros pelo incentivo de estudar.
- À professora Drª. Luciana Foss, minha orientadora, pelo ingresso no programa.
- À professora Drª. Renata Reiser, minha co-orientadora, pela paciência e dedicação depositados.
- Ao Escritório Nacional da RCC Brasil, na pessoa de Lázaro Praxedes e Luthiano Venecian que me deixaram sair por horas, dias e meses do trabalho para estudar e assistir aulas.
- Aos meus colegas e companheiros de estudo, que sempre me auxiliaram e me deram apoio nas horas difíceis.
- A minha colega e amiga Rosana Medina Zanotelli, por não medir esforços em me ajudar. Por me receber todos os sábados sempre com disposição e uma palavra de incentivo.
- Aos meus colegas e amigos Fabiano, Davi e Gabriel, que por várias vezes fizeram jornada dupla de trabalho em função de minhas ausências no trabalho.

Imagine uma nova história para sua vida e acredite nela.
—Paulo Coelho

RESUMO

CARDOSO, Wilson Roberto da Silva. **Diferença Fuzzy Intuicionista: Robustez, Dualidade e Conjugação**. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.

Esta dissertação foca, sobretudo, nos conceitos fundamentais relativos ao estudo da robustez, dualidade e conjugação na Lógica Fuzzy (FL) e sua extensão intuicionista proposta por Atanassov (A-IFL). A metodologia de avaliação da sensibilidade ponto-a-ponto é aplicada a conectivos fuzzy e conectivos fuzzy intuicionistas, considerando a ação de negações fortes e automorfismos. O objetivo principal neste trabalho consiste na avaliação da robustez de operadores de diferença, representáveis por composição de negações e agregações da LF e da A-IFL. O operador de diferença tem aplicação direta em conceitos da FL e da A-IFL, quando do uso de conceitos de distância, medidas de similaridade e entropia. O trabalho colabora com a investigação da robustez na construção dual da classe de operadores de diferença em LF e A-IFL, incluindo possíveis construções conjugadas obtidas por automorfismos representáveis.

Palavras-chave: Lógica Fuzzy, Lógica Fuzzy Intuicionista, Robustez, δ-sensibilidade, Diferença Fuzzy Intuicionista, Diferença Fuzzy, Dualidade, conjugação.

ABSTRACT

CARDOSO, Wilson Roberto da Silva. **Intuitionist fuzzy difference: Robustness, Duality and Conjugation**. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.

This dissertation focuses mainly on fundamental concepts relating to the study of robustness, duality and in conjunction Fuzzy Logic (FL) and its intuitionistic extension proposed by Atanassov (A-IFL). The methodology for assessing the sensitivity point-to-point is applied to fuzzy connectives and fuzzy connective intuitionists considering the action of strong denials and automorphisms. The main objective of this study is to assess the robustness of difference operators, representable by composition of denials and aggregations of LF and A-IFL. The difference operator has direct application of the concepts and the FL-IFL, when using distance concepts of similarity and entropy measures. The research work cooperates with the robustness of the dual construction difference operator class LF and A-IFL, including possible constructions conjugate obtained by automorphisms representable.

Keywords: Fuzzy Logic, Intuitionistic Fuzzy Logic, Robustness, δ-sensitivity, Intuitionistic Fuzzy Difference, Fuzzy Difference, Duality, Conjugate Operator.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Diferença Fuzzy Dif_{T_P,N_S} e Co-Diferença Fuzzy $CoDif_{S_P,N_S}$ 30
Figura 2 Diferença Fuzzy Dif_{T_M,N_S} e Co-Diferença Fuzzy $CoDif_{S_M,N_S}$ 30
Figura 3 Diferença Fuzzy Dif_{T_L,N_S} e Co-Diferença Fuzzy $CoDif_{S_L,N_S}$ 31
Figura 4 Diferença Fuzzy Dif_{T_D,N_S} e Co-Diferença Fuzzy $CoDif_{S_D,N_S}$ 31

Figura 5 Operador de robustez na classe das IFNs representável 59
Figura 6 Analise da robustez na classe IFTs. 62
Figura 7 Operador de robustez na classe das (S,N)-implicações representáveis. . . . 65
Figura 8 Operador de robustez na classe das A-IFDs representáveis em $\tilde{U}$. 68

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Exemplificação de normas fuzzy triangulares 27
Tabela 2 Exemplificação de conormas fuzzy triangulares 27
Tabela 3 Implicações, coimplicações fuzzy e dualidade relacionada. 33
Tabela 4 Exemplificação dos Operadores $Dif_{T,N}$ e $CoDif_{S,N}$ 35
Tabela 5 Implicações, coimplicações fuzzy e dualidade relacionada. 35

Tabela 6 Norma Produto e Soma Probabilística 41
Tabela 7 (S, N)-Implicação e (T, N)-Coimplicação Fuzzy 41
Tabela 8 Exemplos nas classes $\mathcal{C}(D_{T,N})$ e $\mathcal{C}(E_{S,N})$que estão relacionados para operadores de diferença fuzzy e suas correspondentes N_S-dual construções 43

Tabela 9 Análise de Robustez na Composição de Negações Fuzzy 58
Tabela 10 T-norma e T-conorma Fuzzy Intuicionista definida pelo Produto Algébrico (T_P) e Soma Determinística (S_P) 63

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LF	Lógica Fuzzy
LFI	Lógica Fuzzy Intuicionista
SFN	Negação Fuzzy Forte
SIFN	Negação Fuzzy Intuicionista Forte
IFS	Agregações Fuzzy Intuicionista
IFN	Negação Fuzzy Intuicionista
A-IFE	Co-diferença Fuzzy Intuicionista de Atansssov
A-IFE	Diferença Fuzzy Intuicionista de Atansssov
A-IFT	T-norma Fuzzy Intuicionista de Atansssov
A-IFS	T-conorma Fuzzy Intuicionista de Atansssov
IFTs	T-(co)norma Fuzzy Intuicionista representável

LISTA DE SÍMBOLOS

χ	Conjunto Universo
U	Intervalo Unitário
x	Elemento qualquer
f	Função
f_N	Função N-Dual da função f
g	Função
g_N	Função N-Dual da função g
μ	Função de Pertinência
ν	Função de Não-Pertinência
N	Negação Fuzzy
N_S	Negação Padrão ou Negação de Zadeh
A	Função de Agregação Fuzzy
T	T-Norma
S	T-Conorma
I	Implicação Fuzzy
I_N ou J	Coimplicação Fuzzy
π	Índice Fuzzy Intuicionista
N_I	Negação Fuzzy Intuicionista
$\tilde{A}$	Função de Agregação Fuzzy Intuicionista
$\tilde{T}$	T-Norma Intuicionista
$\tilde{S}$	T-Conorma Intuicionista
I_I	Implicação Fuzzy Intuicionista
T_M	T-norma mínimo
S_M	T-conorma máximo
T_P	Produto Algébrico
S_P	Soma Probabilística

T_D	T-norma Drástica
S_D	T-conorma Drástica
T_L	T-norma Łukasiewicz
S_L	T-conorma Łukasiewicz
T_N	T-conorma N Dual de T
S_N	T-norma N Dual de S
M	Função de Agregação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14
1.1 Lógica Fuzzy Intuicionista 14
1.2 Robustez de Conectivos na A-IFL 16
1.3 Trabalhos Relacionados 17
1.3.1 Operadores de Diferença Fuzzy 17
1.3.2 Operadores de Diferença Fuzzy Intuicionista 18
1.4 Objetivos 19
1.4.1 Metodologia 20
1.5 Organização do Texto 21

2 LÓGICA FUZZY 22
2.1 Conjuntos Fuzzy 22
2.2 Automorfismos e Funções Conjugadas 23
2.3 Conectivos Fuzzy 24
2.4 Negação Fuzzy 24
2.5 Funções de Agregação Fuzzy 26
2.5.1 T-normas e T-conormas 26
2.6 Diferença Fuzzy e Co-diferença Fuzzy 28
2.6.1 Classe de Operadores $Dif_{T,N}$ e $CoDif_{S,N}$ 29
2.7 Implicação Fuzzy e Coimplicação Fuzzy 31
2.7.1 Classes das (S,N)-implicações e (T,N)-coimplicações 33

3 ROBUSTEZ DE CONECTIVOS FUZZY 36
3.1 Robustez dos Conectivos Fuzzy 37
3.2 Robustez dos Conectivos N-Duais Fuzzy 41
3.3 Robustez da Diferença e Co-Diferença Fuzzy 43

4 LÓGICA FUZZY INTUICIONISTA 44
4.1 Conjuntos Fuzzy Intuicionistas 44
4.1.1 Conjunto $\tilde{U}$ dos Valores Fuzzy Intuicionista 45
4.1.2 Índice Fuzzy Intuicionista 46
4.2 Automorfismos Intuicionistas 46
4.2.1 Relação entre $Aut(\tilde{U})$ e $Aut(U)$ 46
4.3 Negação Fuzzy Intuicionista 47
4.3.1 Relação de Dualidade entre Funções Fuzzy Intuicionistas 48
4.4 Funções de Agregação Fuzzy Intuicionistas 48
4.4.1 T-(co)normas Fuzzy Intuicionistas 48
4.5 (Co)Implicação Fuzzy Intuicionista 49

4.5.1 Propriedades Algébricas e Exemplificação 50
4.6 Diferença Fuzzy Intuicionista e Co-Diferença Fuzzy Intuicionista 50
4.6.1 Classe Dif_1 ($CoDif_1$) de Operadores de (Co)Diferença 52
4.6.2 Classe Dif_2 ($CoDif_2$) de Operadores de (Co)Diferença 53
4.6.3 Classe Dif_3 ($CoDif_3$) de Operadores de (Co)Diferença 54
4.7 Conjugação Fuzzy Intuicionista 55

5 ROBUSTEZ DE DIFERENÇA E CO-DIFERENÇA FUZZY INTUICIONISTA 57
5.1 δ-Sensibilidade dos Conectivos Fuzzy Intuicionista 57
5.2 Robustez de Negações Fuzzy Intuicionistas Representáveis 57
5.2.1 Robustez de Conectivos Fuzzy Intuicionista e Relação de Dualidade 59
5.3 Robustez de (Co)Normas Triangulares Fuzzy Intuicionistas 59
5.3.1 Robustez de t-(Co)Normas Intuicionistas e Relação de Dualidade 61
5.4 Robustez da Implicação e Coimplicação Fuzzy Intuicionistas 63
5.5 Robustez da Diferença e Co-Diferença Fuzzy Intuicionistas 66

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS 69

REFERÊNCIAS 71

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy (TCF) foi introduzida por L. A. Zadeh, como um modelo matemático com estruturação lógico-formal para suporte a sistemas computacionais, viabilizando a representação, armazenamento e processamento de informações incertas pelo tratamento de termos linguísticos subjetivos e, por consequência, a semelhança do que usualmente faz o ser humano.

A estruturação lógico-formal da Lógica Fuzzy (FL) contribui para uma modelagem computacional mais flexível das informações vagas e/ou incertas de sistemas reais, os quais são normalmente descritos em linguagem natural. A FL é capaz de converter tais informações para um formato de fácil manipulação por sistemas computacionais (BARROS; BASSANEZI, 2006), consolidando-se como uma abordagem lógica expressiva na tomada de decisões em sistemas de controle (XIA; XU; CHEN, 2013), frequentemente baseados em informações obtidas por especialistas ou mesmo extraídas de outros contextos computacionais.

Tal contribuição pode ser facilmente verificada em aplicações nas áreas de reconhecimento de padrões (BISHOP, 2006), processamento de imagem (CELENK, 1990), mineração de dados (KUMAR STEINBACH M, 2006) e morfologia matemática (HEIJMANS, 1994; KLIR, 1993; DUBOIS; OSTASIEWICZ; PRADE, 2000; MITRA; PAL, 2005; KLIR, 2005)

1.1 Lógica Fuzzy Intuicionista

Dentre as diversas extensões da FL, considera-se nesta proposta a Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionista proposta por K. Atanassov (IFST) (ATANASSOV, 1994) e na sequência (ATANASSOV, 2003, 2005, 2008, 1999, 2012) os fundamentos da Lógica Fuzzy Intuicionista (A-IFL) (CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2002; DESCHRIJVER; KERRE, 2005a,b; LIN; XIA, 2006; LI, 2011).

Verificam-se variadas aplicações que fazem uso da A-IFL em sistemas especialistas e no raciocínio aproximativo (ZADEH, 1975; BEZDEK; DUBOIS; PRADE, 1999; ATANASSOV et al., 2003; HERRERA; MARTÍNEZ; SÁNCHEZ, 2005; XU, 2009; LI; WANG; CHEN, 2010), e mais recentemente, surgem aplicações em bases de dados, reconhecimento de padrões, redes neurais, otimização fuzzy, economia, medicina, e tomada de decisão.

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy de Atanssov (A-IFT) vem sendo também amplamente aplicada na resolução de problemas da vida real. Um exemplo de tal aplicação consiste na extensão de otimizações da FL mas com aplicação da A-IFT, onde é possível reformular tais problemas de otimização usando graus de rejeição de restrições e os valores da função-objetivo que não são admissíveis (PEKALA, 2012). Este conceito viabiliza a definição de um grau de rejeição que não pode ser simplesmente um complemento do grau de aceitação. Tal abordagem pode ser aplicada tanto na otimização de meio-nutriente em engenharia de bioprocessos quanto na tomada de decisão em engenharia biomédica (ANGELOV, 1997).

Diferentemente da abordagem da Teoria dos Conjuntos Clássica (CST), uma proposição na FL está definida sobre conjuntos fuzzy, cujos elementos são valorados por números reais no intervalo unitário $U = \{\mu(\mathrm{x}) \in \mathbb{R} : 0 \leq \mu(\mathrm{x}) \leq 1\} = [0, 1]$. Dado um universo $\chi \neq \emptyset$, a expressão de um conjunto fuzzy A e de seu complemento A_N, associados às funções de pertinência $\mu_A, \nu_A : \chi \to U$ são, respectivamente, dados pelas expressões:

$$A = \{(\mathrm{x}, \mu_A(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in \chi\}; \;\; A_N = \{(x, \nu_A(x)) : \mu_A(x) + \nu_A(x) = 1, \forall \mathrm{x} \in \chi\}.$$

A teoria fuzzy intuicionista, como proposta em (ATANASSOV; GARGOV, 1989), caracteriza-se pela flexibilização desta relação de complementaridade, ou seja, a função de pertinência e a função de não-pertinência não são necessariamente complementares como na abordagem fuzzy. Diferentemente da teoria dos conjuntos fuzzy, a soma do grau de pertinência com o grau de não-pertinência é menor, no máximo igual a unidade.

Esta flexibilização provê representação tanto para aspectos positivos, quanto para os negativos de uma dada informação, sem estes serem necessariamente complementares.

No contexto da Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov (A-IFST), a cada elemento $\mathrm{x} \in \chi \neq \emptyset$ está associado um grau de pertinência $\mu(\mathrm{x})$ e um grau de não-pertinência $\nu(\mathrm{x})$ não necessariamente complementares. Assim, o conjunto dos valores fuzzy intuicionistas em A está definido em:

$$\tilde{U} = \{\tilde{x} = (\mu_A(\mathrm{x}), \nu_A(\mathrm{x})) \in U \times U : \mu(\mathrm{x}) + \nu(\mathrm{x}) \leq 1\}.$$

Um elemento $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$, o qual frequentemente está definido por agregação de valores fuzzy intuicionistas, descreve a opinião de vários especialistas sobre a pertinência $x_1 = \mu(\mathbf{x})$ e a não-pertinência $x_2 = \nu(\mathrm{x})$. E, o grau de hesitação $\pi_A(\mathrm{x})$ de um elemento $\mathrm{x} \in \chi$ quanto a sua pertinência $x_1 = \mu(\mathrm{x})$ e não-pertinência $x_2 = \nu(\mathrm{x})$ é dado pela expressão $\pi_A(\mathrm{x}) = 1 - \mu(\mathrm{x}) - \nu(\mathrm{x}) = 1 - x_1 - x_2$.

Assim, pelo desenvolvimento de sistemas baseados em IFL, amplia-se a modelagem de propriedades lógicas, preservando os princípios da FL e agregando ainda a hesitação quanto ao complemento da soma dos graus de pertinência e de não-pertinência. Também surgem outras extensões mais atuais.

A Lógica Fuzzy Valorada Intervalarmente (IvFL) usa as técnicas intervalares para

modelagem da pertinência e não pertinência, veja (ATANASSOV; GARGOV, 1998; FODOR; ROUBENS, 1994; G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004) e (CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2006). E ainda, outras abordagens mais abrangentes, como a Lógica Fuzzy Valorada Intervalarmente Intuicionista (IvIFL) (ATANASSOV; GARGOV, 1989; LI, 2011; REISER; BEDREGAL, 2013) considerando imprecisão e incerteza como um intervalo na definição dos conjuntos fuzzy. Neste contexto de lógicas fuzzy do tipo-2, destaca-se a Lógica Fuzzy Hesitante (HFL), a qual está baseada nos conjuntos fuzzy hesitantes, introduzido por Vincenç Torra em (TORRA; NARUKAWA, 2009; TORRA, 2010), cujo grau de pertinência consiste em um conjunto (e não apenas uma agregação) de valores descrevendo a opinião de vários especialistas.

1.2 Robustez de Conectivos na A-IFL

A consolidação da FL como uma ferramenta robusta para modelagem e implementação de sistemas especialistas, passa pela avaliação dos operadores fuzzy. De acordo com (LI; LI; XIE, 2011). Esta avaliação colabora em ambas abordagens:

(i) na fundamentação teórica, referente ao estudo de propriedades algébricas verificadas por conectivos fuzzy, satisfazendo critérios de sensibilidade quanto às variações nos seus parâmetros;

(ii) no desenvolvimento de aplicações, considerando que esquemas práticos em sistemas baseados em IFL são susceptíveis a perturbação por vários tipos de ruídos.

A análise da robustez no raciocínio fuzzy constitue uma questão de pesquisa relevante para desenvolvimento de sistemas especialistas (CAI, 2001; JIN; LI; LI, 2007; LI et al., 2005; LI, 2008; REISER; BEDREGAL, 2012).

Dentre as questões de pesquisa, destacam-se duas que estão sendo investigadas neste proposta e em extensão a outro trabalhos de pesquisa junto ao MFFM-CDTEC/UFPEL, grupo de pesquisa em Métodos Formais e Fundamentos Matemáticos da Ciência da Computação (ZANOTELLI et al., 2015):

1. Como pequenas perturbações (δ-perturbações) na entrada de dados de um sistema definido em função de conectivos nas construções de validação de proposições comprometem os dados resultantes?

2. Como avaliar a δ-sensibilidade de sistemas a partir do conhecimentos dos operadores lógicos considerados na sua modelagem?

Esta análise se apresenta como uma metodologia formal para modelagem de erros e perturbações em sistemas de regras baseados em FL e A-IFL. Além disso, a proposta se

estende à análise de condições de fronteiras, pontos extremos e propriedades algébricas, como a monotonicidade de operadores de diferença em LF e A-IFL.

Em (PAPA; JASON; SCHENOBI, 2001), Papa e Wood avaliam a robustez de sistemas de controle considerando variações de parâmetros significativos. Em (LI, 2011), apresenta-se a noção de sensibilidade de conectivos fuzzy para IvIFL. Salientam-se também os trabalhos descritos em (JIN; LI; LI, 2007; LI, 2008; CAI, 2001; LI; LI; XIE, 2011).

Conectivos fuzzy intuicionista (em especial, normas e conormas triangulares, implicações e coimplicações, bi-implicações e bi-coimplicações) consistem em importantes elementos para inferência no raciocínio fuzzy e correspondente extensão intuicionista.

Para garantir sistemas robustos baseados na IFL, neste trabalho propõe-se a consolidação da metodologia introduzida em (LI et al., 2005) e (REISER; BEDREGAL, 2012), que considera a análise da δ-sensibilidade (ou sensibilidade ponto-a-ponto) dos principais conectivos fuzzy intuitionistas. Estende-se portanto, a investigação da δ-sensibilidade em termos dos conectivos da IFL (REISER; BEDREGAL, 2012, 2014; ZANOTELLI et al., 2015).

A δ-sensibilidade de conectivos fuzzy intuicionistas deve considerar a análise pela sensibilidade dos conectivos fuzzy e de suas correspondentes construções duais.

E, no grupo MFFM-CDTEC/UFPEL, os trabalhos já desenvolvidos estão investigando a δ-sensibilidade referente aos conectivos como negação, agregação, implicação, Xor, bi-implicação (ZANOTELLI et al., 2013, 2014; REISER; BEDREGAL, 2014; ZANOTELLI et al., 2015). Neste trabalho, contribuindo com esta pesquisa, consideram-se os operadores de diferença em FL e A-IFL.

1.3 Trabalhos Relacionados

Vários trabalhos na literatura já consideram o estudo estrito do operador de diferença fuzzy e de diferença fuzzy intuicionista. Nesta sessão, resumem-se os principais trabalhos que fundamentam esta proposta.

1.3.1 Operadores de Diferença Fuzzy

Em (HUAWEN, 1987), apresenta-se o operador anticomutativo de diferença, para conjuntos fuzzy e relações fuzzy, relacionado com operadores de diferença da CTS, comparando propriedades e provando ainda a relação geral de inclusão para operadores de diferença fuzzy. O uso histórico de operadores de diferença anticomutativos bem como sua aplicações são também brevemente discutidos.

O estudo em (DUBOIS; PRADE, 1984) no sentido estrito de operadores da FL, também tem ênfase nos conjuntos fuzzy obtidos por diferenças e inclusões. Procedimentos gerais para geração sistemática dos conectivos fuzzy de diferença e inclusão são descritos com base na análise de equações envolvendo números fuzzy. A análise de tais equações leva à definição de uma aritmética fuzzy com compensação de erros, baseada na inclusão e nas implicações fuzzy.

Em (RAY, 1992, Definition 1.1), mostra-se que a diferença de dois conjuntos fuzzy generaliza o operador de complemento satisfazendo as leis de De Morgan e ainda, induz uma definição para o operador de diferença simétrica. O conceito de conjuntos fuzzy fracamente disjuntos, como generalização da disjunção fuzzy, leva a estruturação de δ-anéis de conjuntos fuzzy, os quais são definidos sob união e diferença de anéis booleanos de conjuntos fuzzy. Ainda são estudados tópicos sobre medida fuzzy e teoria da integração fuzzy. A associatividade da diferença simétrica e a distributividade da intersecção em relação a diferença simétrica, promovem a estrutura de δ-anel a conjuntos fuzzy sob união e diferença. Discutem-se propriedades da medida fuzzy em um δ-anel de conjuntos fuzzy.

Em (BOUCHON-MEUNIER; RIFQI; BOTHOREL, 1996), o estudo axiomático da diferença fuzzy é considerado como fundamentação para classificação de medidas de comparação que permitam fazer a caracterização fuzzy de objetos de acordo com as suas propriedades de semelhança. A diferença entre as medidas de satisfação e similaridade levam em conta os graus de comparação de conjuntos fuzzy e podem ser ainda generalizados, considerando o estudo de medidas de inclusão e dissimilaridade.

Em (ALSINA; TRILLAS, 2005), estuda-se a aplicação de técnicas de derivação, via equações funcionais ou via teoria dos reticulados, para novos modelos do operador de diferença simétrica entre conjuntos fuzzy. As expressões funcionais obtidas e o modelo padrão utilizado consideram apenas as condições de comportamento do operador de diferença simétrica nos pontos extremos e nas diagonais do intervalo unitário $U = [0, 1]$. A formulação e resolução de um conjunto de equações funcionais em (ALSINA; TRILLAS, 2008), no âmbito da FL, modela o conceito de operador de diferença entre conjuntos fuzzy.

Mais recentemente, a extensão do operador de diferença generalizada entre números fuzzy é proposta em (GOMES; BARROS, 2015), e neste estudo, discutem-se também novas abordagens para o teorema de existência da diferenciabilidade generalizada.

A relação estrita entre o operador de diferença simétrica e a disjunção exclusiva discutida em (GARCIA-HONRADO; TRILLAS, 2015) analisa propriedades destes operadores bem como a comparação de comportamentos quando da preservação de esquemas de inferência via silogismo disjuntivo. No estudo do silogismo disjuntivo, consideram-se diferentes estruturas algébricas, como as álgebras de Boole, De Morgan e na FL.

Em (SHEN; ZHANG, 2015), a estruturação e propriedades de um operador de diferença simétrica contínuo e associativo em U são apresentados. Tais operadores são determinados por t-normas contínuas e negações fortes em U, onde são também discutidas equações funcionais. Os resultados são comparados com propostas previamente discutidas em (ALSINA; TRILLAS, 2005).

1.3.2 Operadores de Diferença Fuzzy Intuicionista

Na descrição do operator de diferença fuzzy intuicionista, pode-se fazer uso do termo de medida de diferença, como um conceito dual da medida de similaridade entre conjuntos

fuzzy intuicionistas. Tais operadores vem sendo amplamente usados em muitas aplicações, com relevância no reconhecimento de padrões, aprendizagem de máquina e diagnóstico médico (SHEN; ZHANG, 2015; SZMIDT; KACPRZYK, 2004; TIZHOOSH, 2008; WANG; XIN, 2005; BUSTINCE; BARRENECHEA; PAGOLA, 2008).

Em (HUAWEN, 1987), apresenta-se uma definição axiomática do operador intuicionista de diferença simétrica baseada em propriedades estendidas da CST, considerando um operador fuzzy intuicionista de complemento, de acordo com a IFL como concebida por Atanassov (ATANASSOV; GARGOV, 1989).

Duas interpretações da operação de diferença na CST estão descritas logo a seguir:

(i) complemento da intersecção de dois conjuntos em relação a um deles:

$$A - B = \complement_A(A \cup B) \qquad B - A = \complement_B(A \cup B);$$

(ii) intersecção entre um conjunto e o complemento do outro:

$$A - B = A \cap \overline{B} \qquad B - A = B \cap \overline{A}.$$

Muitas outras equações relacionais podem ser estabelecidas(DUBOIS; PRADE, 1984; MAKSA, 2005). Neste trabalho, considera-se a definição axiomática proposta em (HUAWEN, 1987). E estudam-se a representabilidade e a propriedade de monotonicidade referente à análise da δ-sensibilidade para os operadores de diferença em FL e A-IFL. Esta análise contempla ainda as construções referentes a dualidade e conjugação.

1.4 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é colaborar com o estudo da robustez de operadores da IFL, considerando a metodologia de avaliação da sensibilidade ponto-a-ponto de conectivos fuzzy proposta em (LI, 2011) e extendida em (REISER; BEDREGAL, 2012).

Busca-se obter como resultados teóricos, uma fundamentação para avaliação da robustez de operadores de diferença em FL e A-IFL, considerando as abordagens introduzidas em (LI, 2011) e (ATANASSOV, 2012). O trabalho também investiga a relação de monotonicidade e as construções dual e conjugada destes conectivos fuzzy intuicionistas.

Os objetivos específicos estão detalhados logo a seguir:

- Análise da sensibilidade de operadores em FL e A-IFL modelados por funções anti-monotônicas, negações em FL e A-IFL;
- Análise da sensibilidade de funções monotônicas em ambos argumentos, extensão de normas e conormas em FL e A-IFL;
- Análise da sensibilidade dos operadores de diferença em FL e A-IFL;

- Análise da sensibilidade nas construções duais e conjugadas dos operadores de diferença em FL e A-IFL.

1.4.1 Metodologia

Com base nos objetivos previamente apresentados, a metodologia a ser utilizada na realização deste trabalho considera atividades de estudo, estruturação e organização de texto, distribuídas em tarefas descritas logo a seguir:

1. Revisão bibliográfica dos principais conceitos referentes à robustez de conectivos da FL e IFL, considerando principalmente a análise da δ-sensibilidade de funções monotônicas;
2. Revisão das fundamentações da FL focando nos conectivos fuzzy (operadores de negação e agregadores), com especial atenção aos operadores de diferença, suas principais classes e propriedades algébricas;
3. Revisão bibliográfica das fundamentações da IFL focando nos conectivos fuzzy intuicionistas (operadores de negação e agregadores), com especial atenção aos operadores de diferença, suas principais classes e propriedades algébricas;
4. Apresentação do seminário de andamento e resultados parciais;
5. Definição e análise da robustez dos operadores fuzzy de diferença, representáveis por composição de negações e agregadores da FL;
6. Definição e análise da robustez dos operadores fuzzy de diferença, representáveis por composição de negações e agregadores da IFL;
7. Definição e análise da robustez de funções conjugadas e construções duais para operadores da FL e IFL;
8. Redação da dissertação e defesa do trabalho em banca de dissertação.

Salienta-se ainda que as atividades de revisão bibliográfica, analise e estudo compreendem:

(i) estudo individual de várias referências bibliográficas;

(ii) discussões no grupo de pesquisa;

(iii) Redação de artigos para publicação e contribuição com a área.

De forma análoga, a atividade de avaliação compreende elaboração do texto final e definição da continuidade deste estudo a partir da revisão das atividades propostas de acordo com a avaliação dos resultados obtidos.

1.5 Organização do Texto

Este texto está organizado em cinco capítulos, conforme resumo logo a seguir.

No Capítulo 2, veremos um breve histórico da lógica fuzzy bem como suas aplicações. São introduzidos conceitos de conjuntos fuzzy, automorfismos e funções conjugadas. Também são vistos os principais conectivos fuzzy, como a negação, o operador *E* e o operador *OU* representados pelas T-normas e T-conormas, respectivamente. As definições de diferença e co-diferença também são introduzidas neste capítulo. Por fim estudamos a implicação e coimplicação fuzzy.

No Capítulo 3 é apresentada a robustez de conectivos fuzzy, onde estudamos a δ-sensibilidade ponto-a-ponto. O tratamento da robustez dos conectivos N-duais fuzzy e a robustez da diferença e co-diferença fuzzy também são estudadas.

No Capítulo 4, os conceitos fundamentais da LFI e dos conjuntos fuzzy intuicionista são considerados. Descreve-se a negação fuzzy intuicionista e a relação de dualidade entre funções fuzzy intuicionista. As funções de agregações t-normas e t-conormas fuzzy intuicionista são estudadas, bem como as implicações fuzzy intuicionista. Introduz-se a diferença e co-diferença fuzzy intuicionista. Ainda apresenta várias provas do operador de (co)diferença fuzzy intuicionista.

O Capítulo 5, disserta sobre a sensibilidade dos conectivos fuzzy intuicionistas. Onde é apresentada a robustez de negações fuzzy intuicionistas representáveis e a relação de dualidade; sensibilidade de (co)normas triangulares intuicionistas e a robustez da (co)diferença fuzzy intuicionista.

No Capítulo 6, apresentamos a conclusão do trabalho e definimos alguns assuntos que podem dar continuidade à pesquisa.

2 LÓGICA FUZZY

Este capítulo trata da lógica fuzzy, onde um elemento pode pertencer ou não a um determinado conjunto, ou seja, determinamos o quanto este elemento está inserido dentro deste conjunto. Neste contexto, o elemento assume graus de pertinência no conjunto.
Estudamos a seguir os conceitos básicos, onde abordamos na teoria de Conjuntos Fuzzy, automorfismos e funções conjugadas, conectivos e negações fuzzy, as funções de agregação fuzzy, diferenças e co-diferenças fuzzy, incluindo implicação e co-implicação fuzzy.
Exemplos, tabelas e gráficos são apresentados para uma melhor compreensão.

2.1 Conjuntos Fuzzy

Definição 2.1.1. ***Função de Pertinência*** *(ZADEH, 1965): Seja $\chi \neq \emptyset$ um conjunto universo. Um conjunto fuzzy A em χ é definido pela expressão:*

$$A = \{\mu_A(\mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \chi\}, \tag{1}$$

cujos elementos estão indexados pela função de pertinência $\mu_A : \chi \rightarrow U$.

De acordo com a Definição 2.1.1, um conjunto fuzzy A referente a conjunto universo χ pode ser definido como um conjunto de elementos indexados, onde cada $\mathrm{x} \in \chi$ esta indexado por seu correspondente grau de pertinência $\mu_A(\mathrm{x})$.

Os valores $\mu_A(\mathrm{x}) = 1$ e $\mu_A(\mathrm{x}) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência plena do elemento x no conjunto fuzzy A.

Definição 2.1.2. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos fuzzy referente ao conjunto universo χ. O conjunto fuzzy $f[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ definido por um conetivo fuzzy $f : U^n \rightarrow U$, em relação ao universo χ, é dado pela expressão:*

$$A_{f[A_1,A_2,\ldots,A_n]} = \{\mu_{A_{f[A_1,A_2,\ldots,A_n]}}(\mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \mathcal{X}\},$$

sempre que $\mu_{A_{f[A_1,A_2,\ldots,A_n]}} : \chi \rightarrow U$ é a função de pertinência definida por:

$$\mu_{f[A_1,A_2,\ldots,A_n]}(\mathrm{x}) = f(\mu_{A_1}(\mathrm{x}), \mu_{A_2}(\mathrm{x}), \ldots \mu_{A_n}(\mathrm{x})), \forall \mathrm{x} \in \mathcal{X}. \tag{2}$$

Exemplificação 2.1.1. *Em (BOUCHON-MEUNIER; RIFQI; BOTHOREL, 1996), o estudo axiomático da diferença fuzzy é considerado como fundamentação para classificação de medidas de satisfação e similaridade, que permitam fazer a caracterização fuzzy de objetos de acordo com as suas propriedades de semelhança. Uma comparação de conjuntos fuzzy levam em conta o estudo de medidas de inclusão e dissimilaridade. De acordo com (BOUCHON-MEUNIER; RIFQI; BOTHOREL, 1996, Definition 2.1), sejam A_1, A_2 conjuntos fuzzy em χ. Uma função $F : U^2 \to U$ é um operador de diferença fuzzy se satisfaz as seguintes propriedades:*

F1 : Se $\mu_{F[A_1]}(\mathrm{x}) \leq \mu_{F[A_2]}(\mathrm{x})$ *então* $A_{F[A_1,A_2]} = \emptyset$.

F2 : Se $A_1 \subseteq A_2$ *então* $A_{F[A_1,A]} \subseteq A_{F[A_2,A]}$.

Exemplificação 2.1.2. *Sejam os conjuntos fuzzy A_1 e A_2 em χ. Em (RAY, 1992, Definition 1.1), os elementos do conjunto fuzzy diferença entre A_1 e A_2 são indexados pela função de pertinência $\mu_{F[A_1,A_2]} : U^2 \to U$, dada por:*

$$\mu_{F[A_1,A_2]}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mu_{A_1}(\mathrm{x}) \leq \mu_{A_2}(\mathrm{x}); \\ \mu_{A_1}(\mathrm{x}) - \mu_{A_2}(\mathrm{x}), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3}$$

2.2 Automorfismos e Funções Conjugadas

Definição 2.2.1. *(BEDREGAL et al., 2007) A função $\phi : U \to U$ é um **automorfismo** se, e somente se, é bijetora e monotônica: $x \leq y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$, $\forall x, y \in U$. Ou ainda, ϕ é uma função contínua e estritamente crescente, tal que: $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$.*

A ação de um automorfismo ϕ em uma função fuzzy $f : U^n \to U$, gera a função conjugada f^ϕ expressa pela equação:

$$f^\phi(x_1, \ldots, x_n) = \phi^{-1}(f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))). \tag{4}$$

Seja $Aut(U)$ o conjunto de todos os automorfismos definidos no intervalo unitário U, e seja $\circ$ a operação de composição de funções em U. $(Aut(U), \circ)$ é um grupo. Logo, automorfismos são fechados para a composição em U: $\phi_1 \circ \phi_2 \in Aut(\mathbf{U}), \forall \phi_1, \phi_2 \in Aut(U)$.

E ainda, o inverso de um automorfismo ϕ, representado por ϕ^{-1} é também um automorfismo em U:

$$\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = id(U). \tag{5}$$

Definição 2.2.2. *(BUSTINCE et al., 2009) As funções $f_1, f_2 : U^n \to U$ são denominadas **funções conjugadas** se existe um automorfismo $\phi : U \to U$ tal que $f_2 = f_1^\phi$, para todo $x_1, x_2 \ldots x_n \in U^n$, tem-se que:*

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x^n) = \phi^{-1}(f_1(\phi(x_1), \phi(x_2)), \ldots, \phi(x_n)).$$

Observa-se que também valem as equações: $f_2 = f_1^{\phi}$ e $f_1 = f_2^{\phi^{-1}}$.

Exemplificação 2.2.1. *A função $\phi : U \to U$ definida por $\phi(x) = x^n$ sempre que n é um número natural, é um automorfismo. O automorfismo inverso corresponde a função $\phi^{-1} : U \to U$, definida por $\phi^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.*

2.3 Conectivos Fuzzy

Os principais conectivos fuzzy são descritos logo a seguir.

2.4 Negação Fuzzy

Apresentaremos as funções de negação fuzzy, também denominadas funções de complemento fuzzy, a partir das principais definições, propriedades e exemplos, considerando conceitos relacionados em (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003; KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000).

A função $N : U \to U$ é uma **negação fuzzy** se satisfaz as duas seguintes propriedades, para todos os valores $x, y \in U$:

$N1$**:** $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$;

$N2$**:** Se $x \geq y$ então $N(x) \leq N(y)$.

As negações fuzzy que satisfazem a propriedade involutiva:

$N3$**:** $N(N(x)) = x$,

são chamadas de **negação fuzzy forte**. Além disso, uma negação fuzzy contínua é **estrita**, ou seja, estritamente decrescente, quando satisfaz a seguinte propriedade:

$N4$**:** Se $x > y$, então $N(x) < N(y)$.

Exemplificação 2.4.1. *Seguem alguns exemplos de negação fuzzy:*

1. *Um exemplo típico de uma negação fuzzy forte é a* ***Negação Padrão*** *(Standard Negation), também conhecida com* ***Negação de Zadeh*** *definida pela função $N_S : U \to U$, dada por:*

$$N_S(x) = 1 - x. \tag{6}$$

2. *Outro exemplo de negação fuzzy forte é dado pela expressão:*

$$N_1(x) = \sqrt{1 - x^2}. \tag{7}$$

3. ***Negação minimal*** *e* ***negação maximal*** $N_m, N_M : U \to U$, *são respectivamente definidas pelas expressões:*

$$N_m(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se } x = 0 \\ 0, & \textit{caso contrário;} \end{cases} \tag{8}$$

$$N_M(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se } x \neq 1 \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases} \tag{9}$$

Neste caso, para qualquer que seja a negação fuzzy $N : U \to U$, $N_m \leq N \leq N_M$.

Na sequência, considera-se a relação de dualidade entre operadores fuzzy.

Definição 2.4.1. *(BAETS, 1997, Definição 12) Sejam* N *uma negação fuzzy forte em* U *e* $f : U^n \to U$ *uma função real. A* ***função*** N***-dual de*** f *é a função definida pela expressão:*

$$f_N(x_1, x_2, ..., x_n) = N^{-1}(f(N(x_1), N(x_2), ..., N(x_n))), \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in U^n. \tag{10}$$

De acordo com Definição 2.4.1, f e f_N são chamadas **funções mutuamente duais**.

Neste trabalho, tal como considerado em (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2004; LI; FANG, 2009; MAES; BAETS, 2009), quando $N = N_S$, a Equação(Eq.) (10) é dada pela expressão:

$$1 - f_N(x_1, x_2, ..., x_n) = f(1 - x_1, 1 - x_2, ..., 1 - x_n)), \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in U^n. \tag{11}$$

Observação 2.4.1. *Baseado na Definição2.1.2, o conjunto fuzzy* $N[A]$ *definido pela negação fuzzy* $N : U \to U$, *em relação ao universo* χ, *é dado pela expressão*

$$N[U] = \{\mu_{N[U]}(\mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \mathcal{X}, \mu_{N[U]}(\mathrm{x}) = N(\mu_A(\mathrm{x}))\},$$

sendo $N[A]$ *o* ***conjunto fuzzy*** N***-dual de*** A ***pela negação fuzzy*** N.

Proposição 2.4.1. *(NAVARA, 1999) Seja* N *uma negação forte, então a conjugada de* N *também é uma negação forte dada pela expressão:*

$$N^{\phi}(x) = \phi^{-1}(N(\phi(x)), \forall x \in U. \tag{12}$$

Proposição 2.4.2. *(BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003, Teorema 0)* N *é uma negação fuzzy forte se, e somente se houver um automorfismo* $\phi : U \to U$ *de tal forma que:*

$$N_S^{\phi}(x) = \phi^{-1}(1 - \phi(x)). \tag{13}$$

2.5 Funções de Agregação Fuzzy

Em (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Definição.2), uma função de *agregação* $M : U^2 \rightarrow U$ satisfaz as seguintes propriedades:

$A1$**:** $M(0,0) = 0$ e $M(1,1) = 1$;

$A2$**:** Se $x \leq z$ então $M(x,y) \leq M(z,y)$, $\forall x, y, z \in U$;(Isotônica no primeiro argumento)

$A3$**:** $M(x,y) = M(y,x)$, $\forall x, y \in U$; (Comutatividade)

Funções de agregação satisfazendo a propriedade de idempotência

$A4$**:** $M(x,x) = x$, $\forall x \in U$,

são chamadas de *funções de agregação idempotentes*.

Sejam as funções de agregação $\wedge, \vee : U^2 \rightarrow U$, respectivamente definidas em (DESCHRIJVER; KERRE, 2005c, Definição 4.1) pelas expressões:

$$\wedge(x,y) = \min(x,y); \tag{14}$$

$$\vee(x,y) = \max(x,y), \forall x, y \in U. \tag{15}$$

Se M é uma função de agregação forte ou idempotente, então temos:

$$\wedge(x,y) \leq M(x,y) \leq \vee(x,y), \forall x, y \in U.$$

2.5.1 T-normas e T-conormas

As funções de agregação que qualificam as intersecções fuzzy e uniões fuzzy, são geralmente referidas na literatura como t-normas e t-conormas, respectivamente. No contexto da inclusão $\{0,1\} \subseteq [0,1]$, as normas e conormas triangulares são extensões das funções que representam a conjunção e disjunção na lógica clássica, respectivamente.

Definição 2.5.1. *(KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000) Uma* ***norma triangular*** *(t-norma) é uma função $T : U^2 \rightarrow U$, satisfazendo as seguintes propriedades, para todo $u, v, x, y, z \in U$:*

T1: $T(x,y) = T(y,x)$ *(Comutatividade);*

T2: $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$ *(Associatividade);*

T3: $T(x,y) \leq T(u,v)$, *se* $x \leq u$ *e* $y \leq v$ *(Monotonicidade);*

T4: $T(x,1) = x$ *(Elemento neutro).*

Exemplificação 2.5.1. *De acordo com (DUBOIS; PRADE, 2000) a Tabela 1 apresenta os exemplos mais referenciados e utilizados de t-normas.*

Nome	Expressão Algébrica de t-normas
Intersecção-Padrão:	$T_M(x,y) = \wedge\{x,y\}$
Produto Algébrico:	$T_P(x,y) = x.y$
Intersecção Drástica:	$T_D(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x<1 \text{ e } y<1 \\ \wedge\{x,y\}, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
Łukasiewicz:	$T_L(x,y) = \vee\{x+y-1,0\}$
Nilpotente Mínimo:	$T_m(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x+y\leq 1 \\ \wedge\{x,y\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Tabela 1: Exemplificação de normas fuzzy triangulares

Definição 2.5.2. *(KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000) Uma **t-conorma triangular** (s-norma) é uma função $S : U^2 \to U$, satisfazendo as seguintes propriedades, para todo $u, v, x, y, z \in U$:*

S1: $S(x,y) = S(y,x)$;

S2: $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z)$;

S3: $S(x,y) \leq S(u,v)$ *se* $x \leq u$ *e* $y \leq v$;

S4: $S(x,0) = x$.

Exemplificação 2.5.2. *Analogamente, de acordo com (DUBOIS; PRADE, 2000) a Tabela 2 apresenta os principais exemplos de t-conormas.*

Nome	Expressão Algébrica de t-conormas
União Padrão:	$S_M(x,y) = \vee\ (x,y)$
Soma Probabilística:	$S_P(x,y) = x+y-xy$
União Drástica:	$S_D(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0<x \text{ e } 0<y \\ \vee(x,y), & \text{caso contrário;} \end{cases}$
Łukasiewicz:	$S_L(x,y) = \wedge(x+y,1)$
Nilpotente Máximo:	$S_m(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x+y\geq 1 \\ \vee(x,y), & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Tabela 2: Exemplificação de conormas fuzzy triangulares

Logo a seguir, discute-se o conceito de t-norma e t-conorma duais.

Proposição 2.5.1. *Seja N uma negação forte. (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2004) A função $T(S) : U^2 \to U$ é uma t-norma (t-conorma) se, e somente se, existe uma t-conorma T_N (t-norma S_N) tal que para todo $(x,y) \in U^2$, uma das seguintes equivalências são satisfeitas:*

$$T_N(x,y) = N(T(N(x),N(y))), \tag{16}$$

$$S_N(x,y) = N(S(N(x),N(y))). \tag{17}$$

A t-conorma T_N dada pela Eq. 16 é denominada de t-conorma derivada de T pela relação de dualidade e, analogamente a t-norma S_N dada pela Eq. 17 é chamada de t-norma derivada de S pela relação de dualidade, ambas definidas com respeito a negação fuzzy N.

Proposição 2.5.2. *(FODOR; ROUBENS, 1994; KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000) Sejam as t-normas e t-conormas apresentadas na Exemplificação 2.5.1 e Exemplificação 2.5.2, respectivamente. Então, tem-se que:* (T_M, S_M), (T_P, S_P) , (T_D, S_D), (T_L, S_L) e (T_nM, S_nM) *são pares de t-normas e t-conormas mutuamente duais em relação a* N_S *(negação padrão).*

Além disso, considerando (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2004, Definição 2.2) tem-se que:

$$T_D \leq T_L \leq T_P \leq T_M. \tag{18}$$

Analogamente, com base na relação de dualidade referente a Eq.(18), tem-se que:

$$S_M \leq S_P \leq S_L \leq S_D. \tag{19}$$

Pela proposição a seguir, observa-se que os automorfismos preservam as t-conormas, de acordo com previamente estabelecido em (NAVARA, 1999).

Proposição 2.5.3. *(NAVARA, 1999) Seja* $T(S)\colon U^2 \to U$ *uma t-(co)norma e* $\phi : U \to U$ *um automorfismo. Então a função conjugada* T^ϕ*, dada pela expressão:*

$$T^\phi(x, y) = \phi^{-1}(T(\phi(x), \phi(y))); \tag{20}$$
$$S^\phi(x, y) = \phi^{-1}(S(\phi(x), \phi(y))). \tag{21}$$

é também uma t-(co)norma.

Exemplificação 2.5.3. *Sejam os automorfismos* $\phi : U \to U$ *definida por* $\phi(x) = x^n$*, sempre que* n *é um número natural e correspondente* $\phi^{-1} : U \to U$*, definida por* $\phi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$*. Então, tem-se que:*

Automorfismo	***t-norma conjugada***	***t-conorma conjugada***
$\phi(x) = x^n$	$T^\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt[n]{i}}\, x \cdot y$	$S^\phi(x, y) = \sqrt[n]{\frac{1}{i}(1 + x^n + y^n - x^n y^n)}$

Portanto, é imediato que $T^\phi_{N_S}(x, y) = S^\phi(x, y)$*, para todo* $x, y \in U$.

2.6 Diferença Fuzzy e Co-diferença Fuzzy

As mais conhecidas expressões para as operações de diferença $-\,: U^2 \to U$ e co-diferença $\shortmid\colon U^2 \to U$ entre valores fuzzy estão baseadas na intersecção entre valores da abordagem clássica, de acordo com as igualdades:

$$A - B = A \cap \overline{B} \quad \text{e} \quad A \shortmid B = A \cup \overline{B}, \tag{22}$$

respectivamente. Em LF, a co-diferença e a diferença de tal igualdade são interpretadas por operadores de co-diferença ($CoDif$) e diferença (Dif), respectivamente.

Em (HUAWEN, 1987, Definition 4), a operação de diferença fuzzy está definida pela função $Dif : U^2 \to U$ satisfazendo, para todos $x, y, z \in U$, as seguintes propriedades:

D1: $Dif(x, y) \leq x$ (dominância do antecedente);

D2: $Dif(x, 0) = x$ (princípio da neutralidade);

D3: Se $y \leq z$ então $Dif(x, y) \geq Dif(x, z)$ (antimonotônica no segundo argumento);

D4: Se $x \leq y$ então $Dif(x, z) \leq Dif(y, z))$ (isomonotônica no primeiro argumento);

D5: $Dif(1, x) = N(x)$.

Analogamente, uma função $CoDif : U^2 \to U$ é um operador de co-diferença se, para todo $x, y \in U$, os seguintes axiomas são verificados:

CD1: $CoDif(x, y) \geq x$;

CD2: $CoDif(x, 1) = x$;

CD3: Se $y \leq z$ então $CoDif(x, y) \geq CoDif(x, z)$

CD4: Se $x \leq y$ então $CoDif(x, y) \leq CoDif(z, y)$

CD5: $CoDif(0, x) = x$

2.6.1 Classe de Operadores $Dif_{T,N}$ e $CoDif_{S,N}$

Esta sessão apresenta a classe de operadores de (co)diferença representáveis, ou seja, obtidos por composição de t-(co)normas e negações fortes.

A primeira classe provê interpretação para expressões da Eq.(22)(a,b).

Proposição 2.6.1. *(ALSINA; TRILLAS, 2008) Sejam T (S) e N, uma t-(co)norma e uma negação fuzzy, respectivamente. A função $Dif_{T,N}(CoDif_{S,N}) : U^2 \to U$ dada por:*

$$Dif_{T,N}(x, y) = T(x, N(y)); \tag{23}$$

$$CoDif_{S,N}(x, y) = S(x, N(y)), \ \ \forall x, y, z \in U. \tag{24}$$

é um operador de (co)diferença fuzzy.

Proposição 2.6.2. *Sejam N uma negação fuzzy forte e T_N (S_N) a função N-dual de uma t-(co)norma T (S). A função $(Dif_{S,N})_N$: $U^2 \to U$ dada por*

$$(Dif_{T,N})_N (x, y) = CoDif_{T_N,N}(x, y), \tag{25}$$

$$(CoDif_{S,N})_N (x, y) = Dif_{S_N,N}(x, y), \ \ \forall x, y \in U, \tag{26}$$

é um operador de (diferença) co-diferença fuzzy N-dual de ($CoDif_{S,T,N}$) $Dif_{S,T,N}$.

Prova. *Direto dos resultados estabelecidos nas Proposições 2.6.1 e 2.5.1.*

Baseado na Proposição 2.6.2, cada par $(Dif_{T,N}, CoDif_{T_N,N})$ e $(Dif_{S_N,N}, CoDif_{S,N})$ define funções mutuamente N-duais. Portanto, ambas as classe $\mathcal{C}(Dif)$ e $\mathcal{C}(CoDif)$ que correspondem a todos os operadores $CoDif, Dif : U^2 \to U$, preservam a construção dual, a partir da negação forte N.

Observação 2.6.1. *Nos exemplos 2.1.2 e 2.1.1 faz-se uso da expressão do operador de diferença Dif_{T_L,N_S} e $CoDif_{S_L,N_S}$.*

Na sequência, apresenta-se a representação gráfica dos pares $(Dif_{T_M,N_S}, CoDif_{S_M,N_S})$, $(Dif_{T_P,N_S}, CoDif_{S_P,N_S})$, $(Dif_{T_L,N_S}, CoDif_{S_L,N_S})$ e $(Dif_{T_D,N_S}, CoDif_{S_D,N_S})$.

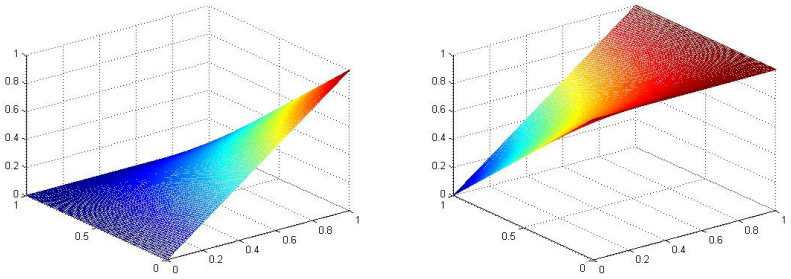

Figura 1: Diferença Fuzzy Dif_{T_P,N_S} e Co-Diferença Fuzzy $CoDif_{S_P,N_S}$

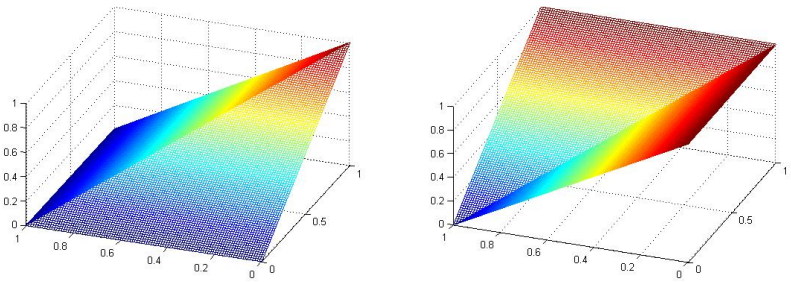

Figura 2: Diferença Fuzzy Dif_{T_M,N_S} e Co-Diferença Fuzzy $CoDif_{S_M,N_S}$

Pela proposição a seguir, observa-se que os automorfismos preservam as diferenças e co-diferenças fuzzy:

Proposição 2.6.3. *Seja $Dif_{T,N}(CoDif_{S,N}) : U^2 \to U$ uma (co)diferença fuzzy e $\phi : U \to U$ um automorfismo. Então a função conjugada $Dif^{\phi}(CoDif^{\phi})$, dada pela expressão:*

$$Dif^{\phi}_{T,N}(x,y) = \phi^{-1}(Dif_{T,N}(\phi(x),\phi(y))); \tag{27}$$

$$CoDif^{\phi}_{S,N}(x,y) = \phi^{-1}(CoDif_{S,N}(\phi(x),\phi(y))). \tag{28}$$

é também uma (co)diferença fuzzy.

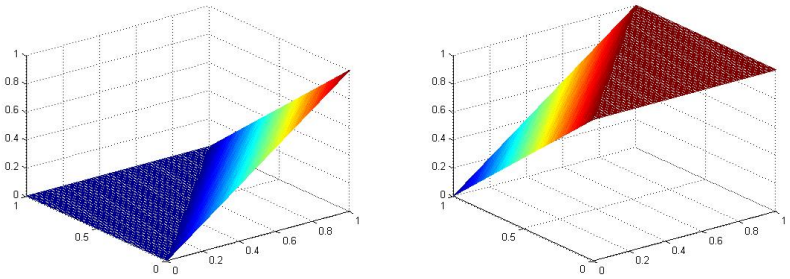

Figura 3: Diferença Fuzzy Dif_{T_L,N_S} e Co-Diferença Fuzzy $CoDif_{S_L,N_S}$

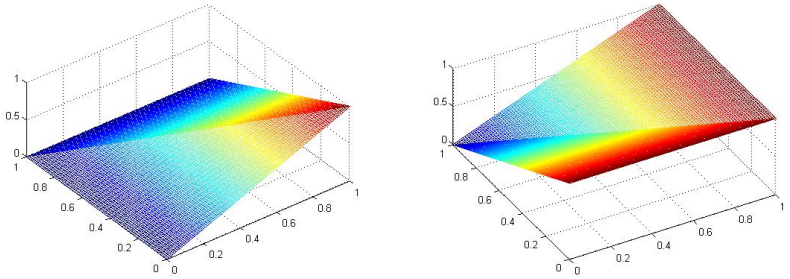

Figura 4: Diferença Fuzzy Dif_{T_D,N_S} e Co-Diferença Fuzzy $CoDif_{S_D,N_S}$

Prova. *Segue imediato da Proposições 2.5.3 e 12.*

2.7 Implicação Fuzzy e Coimplicação Fuzzy

Tem-se uma diversidade de aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy, e por consequência, existem diversas maneiras de definir uma implicação fuzzy. Veja, por exemplo, (BALASUBRAMANIAM, 2007; BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003; FODOR; ROUBENS, 1994; FODOR, 1995; RUAN; KERRE, 1993; SAINIO; TURUNEN; MESIAR, 2008; SHI; RUAN; KERRE, 2007; SHI et al., 2008; YAGER, 1983, 1999, 2004; LIN; XIA, 2006).

A literatura mostra um consenso em todas essas definições: uma implicação fuzzy deverá apresentar o comportamento da implicação clássica quando o caso crisp é considerado, ou seja, as implicações fuzzy devem satisfazer as mesmas condições das implicações clássicas para os extremos do intervalo unitário (MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2007; MAS et al., 2007; PEI, 2008; RUIZ-AGUILERA; TORRENS, 2009).

Neste caso, uma implicação fuzzy estende uma implicação clássica da lógica Booleana, geralmente expressa por "$p \Rightarrow q$" significando que p é suficiente para deduzir q. Esta extensão, refere-se ao fato de que uma implicação fuzzy aplicada aos extremos do intervalo unitário sempre coincide com a implicação clássica, mas considera todas as demais possibilidades deste intervalo como argumentos, modelando a incerteza entre o totalmente verdadeiro (1) e o totalmente falso (0).

Definição 2.7.1. *(SHI; RUAN; KERRE, 2007) Uma função binária $I : U^2 \to U$ é um*

implicador fuzzy *desde que satisfaça as seguintes condições de contorno:*

$I1$**:** *I(1,1) = I(0,1) = I(0,0) = 1 e I(1,0) = 0.*

Assim, os implicadores fuzzy são extensões das implicações da lógica clássica (MAS et al., 2007; NAVARA, 1999). Essas condições são, naturalmente, condições mínimas para um operador de implicação. Várias outras propriedades potenciais dos operadores de implicação são listados na literatura (FODOR, 1991; YAGER, 1999).

Uma implicação fuzzy $I : U^2 \to U$ é um implicador fuzzy, satisfazendo, $\forall x, y, z \in U$, as seguintes condições:

$I2$**:** *Se $x \leq z$ então $I(x, y) \geq I(z, y)$ (antimonotonicidade no primeiro argumento);*

$I3$**:** *Se $y \leq z$ então $I(x, y) \leq I(x, z)$ (isotonicidade no segundo argumento);*

$I4$**:** $I(0, y) = 1$ *(dominância da falsidade);*

$I5$**:** $I(x, 1) = 1$ *(dominância da verdade do consequente);*

$I6$**:** $I(1, y) = y$ *(princípio da neutralidade à esquerda).*

Definição 2.7.2. *Uma função binária $I : U^2 \to U$ é uma **implicação fuzzy** segundo (FODOR; ROUBENS, 1994) se ela satisfaz as seguintes propriedades I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6, descritas acima.*

Na sequência, tratam-se os conceitos referentes às coimplicações fuzzy, a partir de definição, propriedades, exemplificações e relações entre as propriedades.

Definição 2.7.3. *(RUIZ-AGUILERA; TORRENS, 2004) Uma função binária $J : U^2 \to U$ é chamada **coimplicador fuzzy** se satisfaz as seguintes condições de contorno:*

$J1$**:** *J(1,1) = J(1,0) = J(0,0) = 0 e J(0,1) = 1.*

Esta definição assegura que uma coimplicação fuzzy satisfaz as condições que definem uma coimplicação clássica.

Como considerado em (LIN; XIA, 2006), se uma função de implicação fuzzy satisfaz as propriedades $I1$ à $I6$ coimplicação fuzzy pode também satisfazer as propriedades correspondentes. Assim, além das condições de contorno na (Definição 2.7.3), tem-se que:

$J2$**:** Se $x \leq z$ então $J(x, y) \geq J(z, y)$;

$J3$**:** Se $y \leq z$ então $J(x, y) \leq J(x, z)$;

$J4$**:** $J(1, y) = 0$;

$J5$**:** $J(x, 0) = 0$;

$J6$**:** $J(0, y) = y$, $\forall x, y, z \in U$.

Logo a seguir, a relação de dualidade entre implicações fuzzy e coimplicações fuzzy é discutida na Proposição 2.7.1, indicando a condição com a qual uma implicação fuzzy dá origem a uma coimplicação fuzzy. Significando que podemos construir uma coimplicação fuzzy I_N como a correspondente estrutura dual da implicação fuzzy I.

Proposição 2.7.1. *(ZANOTELLI, 2015) A função* $(J_N)I_N : U^2 \to U$ *é uma (co)implicação fuzzy, se, e somente se, existem uma coimplicação (implicação) fuzzy* $J(I) : U^2 \to U$ *e uma negação fuzzy forte* $N : U \to U$ *tais que:*

$$I_N(x, y) = N(I(N(x), N(y))), \tag{29}$$

$$J_N(x, y) = N(J(N(x), N(y))), \forall x, y \in U. \tag{30}$$

Exemplificações de funções de implicação e coimplicação fuzzy são nominadas em (FEI; XIYANG; HONGXING, 2003; FEI; YANBIN; HONGXING, 2004).

A Tabela 5, apresenta a expressão algébrica das implicações e correspondentes coimplicações consideradas neste texto, considerando $\vee$ como operador máximo na Eq. (15) e $\wedge$ como operador mínimo na Eq. (14). A cada linha da Tabela 5, associa-se um par (I, J) de funções mutuamente duais, ou seja, cada par de funções I e J satisfaz as Equações (29) e (30), respectivamente.

	Implicação Fuzzy	Coimplicação Fuzzy
KD-Kleene-Dienes:	$I(x,y) = 1 - x \vee y$	$J(x,y) = 1 - x \wedge y$
RC-Reichenbach:	$I(x,y) = 1 - x + xy$	$J(x,y) = y - xy$
LZ-Łukasiewicz:	$I(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y; \\ 1 - x + y & \text{se } x > y. \end{cases}$	$J(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq y; \\ y - x & \text{se } x < y. \end{cases}$
Zadeh:	$I(x,y) = (1 - x) \vee (x \wedge y)$	$J(x,y) = (1 - x) \wedge (x \vee y)$
P.C.:	$I(x,y) = xy$	$J(x,y) = x + y - xy$
B.C.:	$I(x,y) = 0 \vee (x + y - 1)$	$J(x,y) = 1 \wedge (x + y)$
P.D.:	$I(x,y) = x + y - xy$	$J(x,y) = xy$
B.D.:	$I(x,y) = 1 \wedge (x + y)$	$J(x,y) = 0 \vee (x + y - 1)$

Tabela 3: Implicações, coimplicações fuzzy e dualidade relacionada.

2.7.1 Classes das (S,N)-implicações e (T,N)-coimplicações

A literatura apresenta muitas classes de (co)implicações (veja (BAETS, 1997; DUBOIS; PRADE, 2000; BACZYŃSKI; JAYARAM, 2008; BACZYŃSK; JAYARAM, 2009; MAS et al., 2007; BACZYŃSKI; JAYARAM, 2008) e (MAES; BAETS, 2009)). Neste estudo, considera-se a classe das **(S,N)-implicações** e das **(T,N)-coimplicações**.

Uma (co)implicação $I_{S,N} : U^2 \to U$ é definida pela expressão:

$$I_{S,N}(x,y) = S(N(x),y), \tag{31}$$
$$J_{S,N}(x,y) = T(N(x),y),\ \forall x,y \in U, \tag{32}$$

sempre que $T(S)$ é uma t-(co)norma e N é uma negação fuzzy. Esta classe que satisfaz a Eq. 35 generaliza a seguinte equivalência clássica: $p \to q \equiv \neg p \vee q$. Se N é uma negação fuzzy forte, então $I_{S,N}(J_{T,N})$ é uma (co)implicação forte referida como S-implicação(T-coimplicação). A correspondente construção $N-$dual é uma **S-coimplicação (T-implicação)** dada por:

$$(I_{S,N})_N(x,y) = S_N(N(x),y), \tag{33}$$
$$(J_{T,N})_N(x,y) = T_N(N(x),y),\ \forall x,y \in U, \tag{34}$$

sendo S_N a função $N-$dual da t-conorma S.

*2.7.1.1 Classe f-**Dif Implicação e f-CoDif Coimplicação***

Proposição 2.7.2. *(HUAWEN, 1987) Seja $I_{S,N}, J_{T,N} : U^2 \to U$ uma (co)implicação. Então:*

$$Dif(x,y) = N(I_{S,N}(x,y)), \tag{35}$$
$$CoDif(x,y) = N(J_{T,N}(x,y)),\ \forall x,y \in U, \tag{36}$$

é um operador de (co)diferença fuzzy, sempre que $S(T)$ é uma t-conorma (t-norma) e N é uma negação fuzzy.

Corolário 2.7.1. *Os pares $(Dif_{T_M,N_S}, CoDif_{S_M,N_S})$, $(Dif_{T_P,N_S}, CoDif_{S_P,N_S})$, $(Dif_{T_L,N_S}, CoDif_{S_L,N_S})$ e $(Dif_{T_D,N_S}, CoDif_{S_D,N_S})$, cujas expressões algébricas estão apresentadas na Tabela 4, são funções mutuamente N_S-duais.*

Prova. *Direto dos resultados estabelecidos na Proposição 2.6.2.*

Operador Dif_{T,N_S}	Operador $CoDif_{T,N_S}$
$Dif_{T_M,N_S}(x,y) = \wedge(x, 1-y)$	$CoDif_{S_M,N_S}(x,y) = \vee(x, 1-y)$
$Dif_{T_P,N_S}(x,y) = x(1-y)$	$CoDif_{S_P,N_S}(x,y) = 1 - x(1-y)$
$Dif_{T_L,N_S}(x,y) = \vee(x-y, 0)$	$CoDif_{S_L,N_S}(x,y) = \wedge(x-y, 0)$
$Dif_{T_D,N_S}(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ se } x<1 \text{ e } y>0 \\ \vee(x, 1-y), \text{cc;} \end{cases}$	$CoDif_{S_D,N_S}(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x<1 \text{ e } y>0 \\ \wedge(1-x, y), \text{cc;} \end{cases}$

Tabela 4: Exemplificação dos Operadores $Dif_{T,N}$ e $CoDif_{S,N}$

	Operador Dif_{T,N_S}	Operador $CoDif_{S,N_S}$
KD:	$Dif_{T,N_S}(x,y) = x \wedge 1-y$	$CoDif_{S,N_S}(x,y) = x \vee 1-y$
RC:	$Dif_{T,N_S}(x,y) = x - xy$	$CoDif_{S,N_S}(x,y) = 1-(y-xy)$
LZ:	$Dif_{T,N_S}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq y; \\ x-y & \text{se } x > y. \end{cases}$	$CoDif_{S,N_S}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq y; \\ 1-(y-x) & \text{se } x < y. \end{cases}$
ZH:	$Dif_{T,N_S}(x,y) = x \wedge (1-(x \wedge y))$	$CoDif_{S,N_S}(x,y) = x \vee (1-(x \vee y))$
P.C.:	$Dif_{T,N_S}(x,y) = 1-xy$	$CoDif_{S,N_S}(x,y) = (1-x)(1-y)$
B.C.:	$Dif_{T,N_S}(x,y) = 1 \wedge (2-(x+y))$	$CoDif_{S,N_S}(x,y) = 0 \vee (1-(x+y))$
P.D.:	$Dif_{T,N_S}(x,y) = (1-x)(1-y)$	$CoDif_{S,N_S}(x,y) = 1-xy$
B.D.:	$Dif_{T,N_S}(x,y) = 0 \vee 1-(x+y)$	$CoDif_{S,N_S}(x,y) = 1 \wedge (2-(x+y))$

Tabela 5: Implicações, coimplicações fuzzy e dualidade relacionada.

3 ROBUSTEZ DE CONECTIVOS FUZZY

A análise de robustez na LF tem sido relevante para a área de controle fuzzy, onde contribui para análise de estabilidade de controladores fuzzy (JIN; LI; LI, 2007). Significativos trabalhos foram desenvolvidos na área de controle fuzzy, cujo principal problema de investigação está relacionado com a análise de estabilidade e robustez dos conectivos fuzzy usados nas regras de sistemas de inferência fuzzy, veja exemplos em (CAI, 2001; LI, 2008; ZHANG; CAI, 2004). Em (YING, 1999), foram propostos os conceitos de robustez média e máxima para operadores sobre conjuntos fuzzy. A avaliação da confiabilidade de estruturas de engenharia usa a análise de sensibilidade como uma importante ferramenta para suas avaliações.

Em um sistema de produção, a questão de quanto a perturbação nas variáveis de entrada têm influência mais decisiva sobre a perturbação nas variáveis de saída é sempre importante. Em (OBERGUGGENBERGER; SCHMELZER; FELLIN, 2008), métodos de correlações de modelagem e interatividade em tais sistemas são investigados.

Em (LI; LI; XIE, 2011), a propriedade fundamental da robustez do valor de intervalo de inferência fuzzy é discutida. Além disso, o intervalo robusto para matrizes sobre a $(\max, \min)$-Álgebra (envolvendo matrizes fuzzy) é estudado e condições equivalentes para abordagem intervalar de matrizes fuzzy são apresentadas em (MOLNAROVA; MYSKOVA; PLAVKA, 2013).

A noção de δ-sensibilidade de conjuntos fuzzy é usada em (CAI, 2001) para abordar e estudar a robustez de raciocínio fuzzy baseado em operadores de implicação fuzzy, incluindo inferência *modus tollens* e *modus ponens* generalizadas. Nesta abordagem, $\delta \in U$ denota a maior perturbação sobre as variáveis do sistema. Outras relações entre a robustez do raciocínio fuzzy, conjunções fuzzy e classes de operadores de implicação fuzzy foram apresentados em (JIN; LI; LI, 2007).

Este capítulo discute o estudo da robustez com base na δ-sensibilidade e dualidade nas principais classes de (co)implicações fuzzy enfatizando a análise da robustez dos conectivos diferença e co-diferença.

3.1 Robustez dos Conectivos Fuzzy

O estudo da δ-sensibilidade de uma função $f : U^n \to U$ no ponto $\mathbf{x}$, ou análogo, a sensibilidade ponto-a-ponto de $f : U^n \to U$ está baseada no trabalho proposto em (LI et al., 2005). Neste estudo, tem-se a ênfase na classe de (co)implicações fuzzy e na diferença fuzzy.

Definição 3.1.1. *(LI et al., 2005, Definição 1) Sejam $f : U^n \to U$, $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n) \in U^n$. Tem-se que:*

(i) *a δ-**sensibilidade de** f **no ponto** $\mathbf{x}$, indicado por $\Delta_f(\mathbf{x}, \delta)$, é definida por:*

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| : |x_i - y_i|_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} \leq \delta\}; \tag{37}$$

(ii) *a δ-**sensibilidade máxima de** f é definida pela expressão:*

$$\Delta_f(\delta) = \bigvee_{\boldsymbol{x}\in U^n} \Delta_f(\boldsymbol{x}, \delta);$$

(iii) *f é **pelo menos tão robusto quanto** g no ponto $\mathbf{x}$, significa que:*

$$\delta > 0 \Rightarrow \Delta_f(\mathbf{x}, \delta) \leq \Delta_g(\mathbf{x}, \delta);$$

(iv) *f e g são **igualmente robusto** no ponto $\mathbf{x}$, significa que:*

$$\delta > 0 \Rightarrow \Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = \Delta_g(\mathbf{x}, \delta);$$

(v) *f é **mais robusto do que** g no ponto $\mathbf{x}$, significa que:*

$$\delta > 0 \Rightarrow \Delta_f(\mathbf{x}, \delta) < \Delta_g(\mathbf{x}, \delta).$$

A robustez pode ser concebida como uma propriedade associada à modelagem lógica de sistemas computacionais, cujo principal objetivo é garantir que as conclusões não são essencialmente alteradas, se as condições de premissas variarem dentro de parâmetros razoáveis.

E, uma vez que conectivos fuzzy (principalmente implicações e co-implicações) são elementos importantes no raciocínio em sistemas fuzzy, a investigação correspondente da δ-sensibilidade dos conectivos fuzzy, discutida neste Capítulo, nos termos da Definição 3.1.1(i), fundamenta a abordagem fuzzy intuicionista considerada nos próximos capítulos.

Na Definição 3.1.1, comparamos também a robustez de duas funções, $f, g : U^n \to U$ com base em sua δ-sensibilidade no ponto $\mathbf{x} \in U^n$. Desse modo, analisamos a δ-sensibilidade no ponto $\mathbf{x} \in U^n$ de conectivos fuzzy considerando a propriedade de (anti/iso)monotonicidade em

seus argumentos. Esta análise de robustez baseada na δ-sensibilidade se direciona às principais classes de (co)implicações fuzzy e na sequência, de classes de (co)diferença fuzzy.

Observação 3.1.1. *A análise da robustez baseada na δ-sensibilidade de uma função $f : U^n \to U$ em um ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in U^n$, com $\delta \in U$ se reporta à análise da monotonicidade de seus n argumentos $x_1, x_2, \ldots x_n$, sempre que $x_i \in U, 1 \leq i \leq n$.*

Neste contexto, para facilitar a expressão matemática dos termos referentes a esta análise, na sequência deste texto, consideramos $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$ e as seguintes notações:

$$f\lfloor \mathbf{x} \rfloor \equiv f((x - \delta) \vee 0, (y - \delta) \vee 0); \tag{38}$$

$$f\lfloor \mathbf{x} \rceil \equiv f((x - \delta) \vee 0, (y + \delta) \wedge 1); \tag{39}$$

$$f\lceil \mathbf{x} \rfloor \equiv f((x + \delta) \wedge 1, (y - \delta) \vee 0); \tag{40}$$

$$f\lceil \mathbf{x} \rceil \equiv f((x + \delta) \wedge 1, (y + \delta) \wedge 1). \tag{41}$$

Observação 3.1.2. *Seja $f : U^n \to U$. Tem-se que:*

(i) *f é uma **função iso(anti)monotônica na i-ésima componente** se, e somente se, $\forall x_i$, $x_i \in U$ e i inteiro tal que $1 \leq i$, tem-se que:*

$$x_i \leq x_i^{'} \to f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \leq f(x_1^{'}, \ldots, x_i^{'}, \ldots, x_n^{'}); \tag{42}$$

$$x_i \leq x_i^{'} \to f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \geq f(x_1^{'}, \ldots, x_i^{'}, \ldots, x_n^{'}). \tag{43}$$

(ii) *f é uma **função monotônica** se, e somente se, $\forall x_i$, $x_i^{'} \in U$ e i inteiro, tal que $1 \leq i \leq$ tem-se que:*

$$x_i \leq x_i^{'} \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f(x_1^{'}, \ldots, x_i^{'}, \ldots x_n^{'}). \tag{44}$$

(iii) *f é uma função de ordem reversa se, $\forall x_i$, $x_i^{'} \in U$, tal que $1 \leq i \leq n$, tem-se que:*

$$x_i \leq x_i^{'} \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f(x_1^{'}, x_2^{'}, \ldots x_n^{'}). \tag{45}$$

(iv) *Em particular, $f : U \to U$ é denominada **função de ordem reversa**, se $i = 1$ na Eq.(43), ou seja, f satisfaz a condição:*

$$x \leq y \to f(x) \geq f(y), \forall x \in U.$$

Proposição 3.1.1. *(LI et al., 2005, Teorema 2) Sejam $\delta \in U$, $x \in U$ e $f : U \to U$ uma função de ordem reversa. A $\delta-$sensibilidade de f no ponto $\mathbf{x}$ é dada por:*

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = [f(x) - f((x + \delta) \wedge 1)] \vee [f((x - \delta) \vee 0) - f(x)]. \tag{46}$$

Proposição 3.1.2. *(LI et al., 2005, Teorema 1) Considere $f : U^2 \to U$, $\delta \in U$, $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$ e $x', y' \in U$ tais que $x - \delta \leq x' \leq x + \delta$ e $y - \delta \leq y' \leq y + \delta$.*

(i) *Se f é monotônica, então a δ-sensibilidade de f no ponto $\mathbf{x}$ é dada por:*

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = (f(\mathbf{x}) - f\lfloor \mathbf{x} \rfloor) \vee (f\lceil \mathbf{x} \rceil - f(\mathbf{x})). \tag{47}$$

(ii) *Se f é antitônica no primeiro argumento e isotônica no segundo argumento, então a sensibilidade de f no ponto $\mathbf{x}$ é dada por:*

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = (f(\mathbf{x}) - f\lceil \mathbf{x} \rfloor) \vee (f\lfloor \mathbf{x} \rceil - f(\mathbf{x})). \tag{48}$$

(iii) *Se f é isotônica no primeiro argumento e antitônica no segundo argumento, então a δ sensibilidade de f no ponto $\mathbf{x}$ é dada por:*

$$\Delta_f(\mathbf{x}, \delta) = (f\lfloor \mathbf{x} \rceil - f(\mathbf{x})) \vee (f(\mathbf{x}) - \lceil f\mathbf{x} \rfloor). \tag{49}$$

Proposição 3.1.3. *Considere $f : U^2 \to U$, $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x, y) \in U^2$.*

(i) *(LI et al., 2005, Corolário 1) A δ sensibilidade de uma t-(co)norma $T(S) : U^2 \to U$ é dada pela Eq. (47);*

(ii) *(LI et al., 2005, Corolário 1) A δ sensibilidade de uma S-(co)implicação $I_{S,N}(J_{T,N}) : U^2 \to U$ é dada pela Eq. (48);*

Corolário 3.1.1. *(LI et al., 2005, Corolário 1) Seja a função $f : U^2 \to U$.*

(1) *Se f é uma t-(co)norma, então:*

$$\begin{aligned}
&\Delta_f((0,0), \delta) = f(\delta, \delta);\\
&\Delta_f((0,1), \delta) = \Delta_f((1,0), \delta) = \delta;\\
&\Delta_f((1,1), \delta) = 1 - f(1-\delta, 1-\delta).
\end{aligned}$$

(2) *Se f é uma (S, N)-implicação, então:*

$$\begin{aligned}
&\Delta_f((0,0), \delta) = 1 - N(\delta);\\
&\Delta_f((0,1), \delta) = 1 - S(N(\delta), 1-\delta);\\
&\Delta_f((1,0), \delta) = S(N(1-\delta), \delta);\\
&\Delta_f((1,1), \delta) = 1.
\end{aligned}$$

Em particular, se $N = N_S$, então:

$$\begin{aligned}
&\Delta_f((0,0),\delta) = \delta;\\
&\Delta_f((0,1),\delta) = 1 - S(1-\delta, 1-\delta);\\
&\Delta_f((1,0),\delta) = S(\delta,\delta);\\
&\Delta_f((1,1),\delta) = \delta.
\end{aligned}$$

Em particular, se $N = N_S$ então:

$$\begin{aligned}
\Delta_f((0,0),\delta) &= \delta;\\
\Delta_f((0,1),\delta) &= \delta;\\
\Delta_f((1,0),\delta) &= S(\delta,\delta);\\
N_S(S(\delta, N_S(\delta))) \vee \delta \leq \Delta_f((1,1),\delta) &\leq S(\delta,\delta).
\end{aligned}$$

Corolário 3.1.2. *(LI et al., 2005, Corolário 2)*

(1) *Se $f = \vee$ ou $\wedge$, então $\Delta_f((x,y),\delta) = \delta$ para todo $x, y \in U$.*

(2) *Seja f a implicação de Łukasiewicz (I_{LK} na Tabela 5), então tem-se que:*

$$\begin{aligned}
\Delta_f(0,0) &= \delta;\\
\Delta_f((0,1),\delta) &= 0;\\
\Delta_f((1,0),\delta) &= 2\delta \wedge 1;\\
\Delta_f((1,1),\delta) &= \delta.
\end{aligned}$$

Teorema 3.1.1. *(LI et al., 2005, Teorema 5) Seja $f : U^2 \to U$, então tem-se que:*

(1) *$\Delta_f(\delta) \leq \Delta_S(\Delta_N(\delta))$;*

(2) *Se N é SFN e f uma (S,N)-implicação, então $\Delta_f(\delta) = \Delta_S(\delta))$.*

Observação 3.1.3. *Com base nos resultados apresentados nos Corolários 3.1.1 e 3.1.2, as tabelas a seguir ilustram uma análise de robustez considerando, por exemplo, que a δ-sensibilidade do 1º argumento (δ_1) seja possivelmente diferente da δ-sensibilidade do 2º argumento (δ_2). E assim, não se considera $\delta = \delta_1 \vee \delta_2$ mas os correspondentes valores associados às perturbações dos argumentos.*

Neste caso, na Tabela 6 é analisada a sensibilidade de operadores como a t-norma produto (Δ_{T_P}) e a t-conorma soma probabilística (Δ_{S_P}). Na Tabela 7 consideram-se a implicação fuzzy de Riechenbach ($\Delta_{I_{S_P,N_S}}$) e a correspondente coimplicação fuzzy ($\Delta_{J_{T_P,N_S}}$).

Tabela 6: Norma Produto e Soma Probabilística

X	$\Delta_{T_P}(x,\delta)$	$\Delta_{S_P}(x,\delta)$
(0,0)	$\delta_1\delta_2$	$\delta_1+\delta_2-\delta_1\delta_2$
(0,1)	δ_1	δ_2
(1,0)	δ_2	δ_1
(1,1)	$\delta_1+\delta_2-\delta_1\delta_2$	$\delta_1\delta_2$

Tabela 7: (S,N)-Implicação e (T,N)-Coimplicação Fuzzy

X	$\Delta_{I_{S_P,N_S}}(x,\delta)$	$\Delta_{J_{T_P,N_S}}(x,\delta)$
(0,0)	δ_1	δ_2
(0,1)	$\delta_1\delta_2$	$\delta_1+\delta_2-\delta_1\delta_2$
(1,0)	$\delta_1+\delta_2-\delta_1\delta_2$	$\delta_1\delta 2$
(1,1)	δ_2	δ_1

3.2 Robustez dos Conectivos N-Duais Fuzzy

Proposição 3.2.1. *(REISER; BEDREGAL, 2012, Proposição 6) Seja $f : U^2 \to U$ uma função de segunda ordem, $\mathbf{x} = (x,y) \in U^2$, $N_S(\mathbf{x}) = (N_S(x), N_S(y))$ onde $f(N_S(\mathbf{x})) = f(N_S(x), N_S(y))$. As seguintes equações são verificadas:*

(i) $f_{N_S}\lfloor\mathbf{x}\rfloor = N_S(f\lceil N_S(\mathbf{x})\rceil)$; (ii) $f_{N_S}\lfloor\mathbf{x}\rceil = N_S(f\lceil N_S(\mathbf{x})\rfloor)$;
(iii) $f_{N_S}\lceil\mathbf{x}\rfloor = N_S(f\lfloor N_S(\mathbf{x})\rceil)$; (iv) $f_{N_S}\lceil\mathbf{x}\rceil = N_S(f\lfloor N_S(\mathbf{x})\rfloor)$.

Se N é uma SIFN, o Teorema 3.2.1 afirma que a sensibilidade de uma função f em um ponto $\mathbf{x}$ é igual à sensibilidade da correspondente função dual f_N.

Teorema 3.2.1. *(REISER; BEDREGAL, 2012, Teorema 1) Considere $f : U^2 \to U$, $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x,y) \in U^2$. Seja $\Delta_f(\mathbf{x},\delta)$ a expressão da sensibilidade de f no ponto $\mathbf{x}$. Se N é a negação fuzzy padrão ($N = N_S$ na Eq. (6)) e f_N é a função $N-$dual de f, então a sensibilidade de f_N no ponto $\mathbf{x}$ é dada por:*

$$\Delta_{f_N}(\mathbf{x},\delta) = \Delta_f((N(\mathbf{x})),\delta). \tag{50}$$

Proposição 3.2.2. *(ZANOTELLI, 2015) Seja N uma negação fuzzy padrão, f_N a função $N-$dual relacionada com a função $f : U^2 \to U$, $\delta \in U$ e $\mathbf{x} = (x,y) \in U^2$. A sensibilidade de f_N no ponto $\mathbf{x}$ é definida pelos seguintes casos:*

(i) *se f é crescente com respeito às suas variáveis, então:*

$$\begin{aligned}\Delta_{f_N}(\mathbf{x},\delta) &= (f(N(\mathbf{x})) - f\lfloor N(\mathbf{x})\rfloor) \vee (f\lceil N(\mathbf{x})\rceil - f(N(\mathbf{x})))\\ &= (f_N\lceil\mathbf{x}\rceil - f_N(\mathbf{x})) \vee (f_N\lfloor\mathbf{x}\rfloor - f_N(\mathbf{x}));\end{aligned} \tag{51}$$

(ii) *se f é decrescente com respeito à sua primeira variável e incrementada com a segunda*

variável então:

$$\begin{aligned}\Delta_{f_N}(\mathbf{x},\delta) &= (f(N(\mathbf{x})) - f\lceil N(\mathbf{x})\rfloor) \vee (f\lfloor N(\mathbf{x})\rceil - f(N(\mathbf{x})))\\ &= (f_N\lfloor \mathbf{x}\rceil - f_N(\mathbf{x})) \vee (f_N\lceil \mathbf{x}\rfloor - f_N(\mathbf{x}));\end{aligned} \tag{52}$$

(iii) *se f é crescente com a segunda variável então:*

$$\begin{aligned}\Delta_{f_N}(\mathbf{x},\delta) = &\bigvee_{x-\delta\leq x'\leq x+\delta} |f(N(\mathbf{x})) - f(N(x'),(N(y)+\delta)\wedge 1)| \vee\\ &\bigvee_{x-\delta\leq x'\leq x+\delta} |f(N(\mathbf{x})) - f(N(x'),(N(y)-\delta)\vee 0)|;\end{aligned} \tag{53}$$

(iv) *se f é decrementada com respeito a sua primeira variável:*

$$\begin{aligned}\Delta_{f_N}(\mathbf{x},\delta) = &\bigvee_{y-\delta\leq y'\leq y+\delta} |f((N(x)+\delta)\wedge 1, N(y')) - f(N(\mathbf{x}))| \vee\\ &\bigvee_{y-\delta\leq y'\leq y+\delta} |f((N(x)-\delta)\vee 0, N(y')) - f(N(\mathbf{x}))|.\end{aligned} \tag{54}$$

Proposição 3.2.3. *(ZANOTELLI, 2015) Sejam $(T)_N$, $(S)_N$, $(I_{S,N})_N$, $(I_{S,N,T})_N$ e $(I_{S,T,N})_N$ as funções $N-$duais de uma t-norma T, uma t-conorma S, uma $S-$implicação $I_{S,N}$, uma $QL-$implicação $I_{S,N,T}$ e uma $D-$implicação $I_{S,T,N}$, respectivamente. Quando $\mathbf{x} = (x,y) \in U^2$ e $\delta \in U$, seguem as seguintes declarações:*

(i) *$\Delta_{(T)_N}(\mathbf{x},\delta)$ e $\Delta_{(S)_N}(\mathbf{x},\delta)$ são ambos definidos pela Eq. (51);*

(ii) *$\Delta_{I_{(S,N)_N}}(\mathbf{x},\delta)$ é definido pela Eq. (52).*

Proposição 3.2.4. *Sejam N a negação fuzzy padrão e $f_N : U^2 \to U$ a função $N-$dual de um conectivo binário $f : U^2 \to U$. Então a sensibilidade máxima de f e f_N são dadas por:*

$$\Delta_{f_N}(\delta) = \Delta_f(\delta). \tag{55}$$

Prova. *Do Teorema 3.2.1, temos o seguinte:*

$$\Delta_{f_N}(\delta) = \bigvee_{\mathbf{x}\in U^2} \Delta_{f_N}(\mathbf{x},\delta) = \bigvee_{N(\mathbf{x})\in U^2} \Delta_f(N(\mathbf{x}),\delta) = \Delta_f(\delta).$$

Proposição 3.2.5. *(REISER; BEDREGAL, 2012, Proposição 10) Seja (f, f_N) e (g, g_N) pares de funções $N-$duais. Tem-se que:*

(i) *(f_N, f) é um par tão robusto como (g_N, g) em x se f é tão robusta quanto g no mesmo ponto;*

Tabela 8: Exemplos nas classes $\mathcal{C}(D_{T,N})$ e $\mathcal{C}(E_{S,N})$que estão relacionados para operadores de diferença fuzzy e suas correspondentes N_S-dual construções

	$\Delta_{D_{T_P,N_S}}((0,0),\delta)$	$\Delta_{D_{T_M,N_S}}((0,0),\delta)$	$\Delta_{D_{T_L,N_S}}((0,0),\delta)$
$\mathbf{x}=(0,0)$	δ	δ	δ
$\mathbf{x}=(0,1)$	δ^2	δ	δ
$\mathbf{x}=(1,0)$	δ	δ	2δ
$\mathbf{x}=(1,1)$	$2\delta-\delta^2$	δ	δ

(ii) *(f_N, f) é um par mais robusto do que (g_N, g) em um ponto x se f é mais robusta que g no mesmo ponto;*

(iii) *(f_N, f) é um par tão robusto como (g_N, g) se f é tão robusta quanto g;*

(iv) *(f_N, f) é mais robusto que (g_N, g) se f é mais robusta do que g.*

3.3 Robustez da Diferença e Co-Diferença Fuzzy

Proposição 3.3.1. *A δ-sensibilidade do operador de (co)diferença $D, (E) : U^2 \to U$ fuzzy é dada por:*

$$\Delta_D(\mathbf{x},\delta) = (D\lfloor\mathbf{x}\rceil - D(\mathbf{x})) \vee (D(\mathbf{x}) - D\lceil\mathbf{x}\rfloor); \quad (56)$$

$$\Delta_E(\mathbf{x},\delta) = (E\lfloor\mathbf{x}\rceil - E(\mathbf{x})) \vee (E(\mathbf{x}) - E\lceil\mathbf{x}\rfloor), \forall x \in (x,y) \in U. \quad (57)$$

Prova. *Como o operador D verifica D3 e D4, então pela Eq. 49 a prova da Eq. 56 é imediata.*

Observação 3.3.1. *Pelas Eqs. (48) e (50) para o par (T_P, S_P) de N_S-dual o operador de diferença nos pontos terminais do é obtido, conforme segue:*
$\Delta_{D_{T_P,N_S}}((0,0),\delta) = \delta \vee 0 = \delta = \Delta_{E_{S_P,N_S}}((1,1),\delta)$;
$\Delta_{D_{T_P,N_S}}((0,1),\delta) = \delta^2 \vee 0 = \delta^2 = \Delta_{E_{S_P,N_S}}((1,0),\delta)$;
$\Delta_{D_{T_P,N_S}}((1,1),\delta) = \delta \vee 0 = \delta = \Delta_{E_{S_P,N_S}}((0,0),\delta)$; e
$\Delta_{D_{T_P,N_S}}((1,0),\delta) = 0 \vee (2\delta - \delta^2) = \Delta_{E_{S_P,N_S}}((0,1),\delta)$.
Analogamente, é fácil de obter a δ sensibilidade no pontos U para os outros pares conectivos de N_S-duais, como diferença fuzzy, reportada na Tabela 8.

Proposição 3.3.2. *A δ sensibilidade máxima do operador de (co)diferença é dado por:*

$$\Delta_D(\delta) = \bigvee_{\mathbf{x}\in U^n} \Delta_D(\mathbf{x},\delta) = \bigvee_{\mathbf{x}\in U^n} \Delta_E(\mathbf{x},\delta) = \Delta_E(\delta) \quad (58)$$

Prova. *Prova direta.*

4 LÓGICA FUZZY INTUICIONISTA

Este capítulo apresenta os conceitos fundamentais para o estudo da robustez de sistemas baseados na LFI, considerando a δ-sensibilidade referente aos conectivos fuzzy intuicionistas. Tais conectivos são amplamente utilizados por sistemas especialistas baseados no raciocínio aproximativo (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004). A redução do número de regras utilizadas por esses sistemas devido à abordagem fuzzy intuicionista é obtida pela aplicação de regras geradas através do uso das principais propriedades algébricas dos conectivos fuzzy intuicionistas.

Além disso, esta análise da robustez mostra-se capaz de preservar as propriedades de sistemas baseados em LF quanto à construção de conectivos fuzzy representáveis, ou seja, operadores que estendem as propriedades fuzzy relevantes e permitem a flexibilidade quanto à relação de complemento fuzzy.

Primeiramente, estuda-se o índice fuzzy intuicionista e conceitos relacionados aos conjuntos fuzzy intuicionistas. Na sequência, revisamos alguns conectivos da A-IFL, tais como negações, t-normas e t-conormas. E então focamos no estudo de diferenças fuzzy intuicionistas e nas principais propriedades algébricas, incluindo exemplificações.

4.1 Conjuntos Fuzzy Intuicionistas

De acordo com Atanassov (ATANASSOV, 1986), um conjunto fuzzy intuicionista A_I é representado por um par $\langle \mu_A, \nu_A \rangle$ (pertinência e não pertinência), e indicado por um conjunto de tuplas que satisfazem uma restrição natural :

$$A_I \;=\; \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \,|\, x \in \mathcal{X} \text{ e } \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1\}. \tag{59}$$

Podemos então pensar em um conjunto fuzzy como um caso especial de um conjunto fuzzy intuicionista, onde o grau de não pertinência não necessita ser igual ao seu complemento.

No contexto da A-IFL, cada elemento $x \in \mathcal{X}$ está associado um elemento $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in U \times U$, onde nem sempre o grau de não pertinência $\nu_A(x) = x_2$ é menor ou igual ao complemento do correspondente grau de pertinência $\mu_A(x) = x_1$. Ou ainda, na A-IFL a

Eq. $\nu_A(x) + \mu_A(x) = 1$ é estendida pela inequação:

$$0 \leq \nu_A(x) + \mu_A(x) \leq 1. \tag{60}$$

Como $\nu(x), \mu(x) \in U$, pode-se então expressar a Eq. (60) da seguinte forma:

$$\nu(x) \leq N_S(\mu_A(x)) \text{ ou ainda } \mu_A(x) \leq N_S(\nu_A(x)). \tag{61}$$

Exemplificando uma aplicação, vejamos em (CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003), a descrição de um procedimento de votação, onde as pessoas têm de expressar seu sentimento a uma série de propostas. É óbvio que, enquanto um pode ser a favor, outro vote em desfavor de uma proposta da mesma maneira que um terceiro pode abster-se. Usando somente o grau de pertinência torna-se um trabalho árduo e de difícil compreensão a separação de um defensor e de um adversário da proposta. Para tal, parece natural aplicar uma modelagem baseada em conjuntos fuzzy intuicionista. Nesta abordagem, modelam-se a cada proposta, o número de defensores e de adversários à proposta permitindo que o cardinal do complemento do conjunto de defensores não seja exatamente igual ao cardinal do complemento do conjunto de adversos à proposta.

4.1.1 Conjunto $\tilde{U}$ dos Valores Fuzzy Intuicionista

O conjunto de todos os pares contendo o grau de pertinência e de não-pertinência associado a um elemento x é indicado por $\tilde{U}$, definido pela expressão:

$$\tilde{U} \quad = \quad \{\tilde{x} = (x_1, x_2) \in U^2 \mid 0 \leq x_1 + x_2 \leq 1\}. \tag{62}$$

De acordo com (ATANASSOV; GARGOV, 1998), as seguintes relações são consideradas em $\tilde{U}$:

(i) para todos $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, têm-se as relações de ordem:

$$(x_1, x_2) \leq_{\tilde{U}} (y_1, y_2) \text{ se e somente se } x_1 \leq y_1 \text{ e } x_2 \geq y_2; \tag{63}$$

$$(x_1, x_2) \preceq_{\tilde{U}} (y_1, y_2) \text{ se e somente se } x_1 \leq y_1 \text{ e } x_2 \leq y_2. \tag{64}$$

(ii) para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$, tem-se que:

$$\tilde{0} = (0, 1) \leq_{\tilde{U}} \tilde{x} \leq_{\tilde{U}} \tilde{1} = (1, 0); \tag{65}$$

(iii) para todo $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in \tilde{U}^n$, tal que $\tilde{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}) \in \tilde{U}$, com $0 \leq i \leq n$, tem-se as projeções a direita r_I e a esquerda l_I $l_I, r_I : \tilde{U}^n \to U$, cujas correspondentes definições

são dadas por:

$$l_I((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)) = (x_{11}, x_{21}, \ldots x_{n1}); \quad (66)$$

$$r_I((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)) = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}). \quad (67)$$

4.1.2 Índice Fuzzy Intuicionista

Segundo (XU; YAGER, 2009), o índice fuzzy intuicionista $\pi_A(x)$, também chamado de grau de hesitação, ou grau de indeterminação de x em A, é definido pela expressão a seguir:

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x), \forall x \in \chi. \quad (68)$$

Portanto, para todo $x \in \chi$ tem-se associado $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$ tal que $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) = 1 - x_1 - x_2$. E portanto, quando $\pi_A(x) = 0$, o conjunto fuzzy intuicionista se reduz a um conjunto fuzzy (SZMIDT; KACPRZYK, 2004).

4.2 Automorfismos Intuicionistas

O estudo de automorfismos, se torna necessário, pois eles são utilizados na geração de novos conectivos, preservando as propriedades algébricas das classes destes conectivos lógicos. Assim, a seguir são destacados alguns conceitos básicos deste estudo.

Definição 4.2.1. *A função $\Phi : \tilde{U} \to \tilde{U}$ é um **automorfismo intuicionista** em $\tilde{U}$ se é bijetiva e, para todo $\tilde{x}, \tilde{y}$, tem-se que $\tilde{x} \leq_{\tilde{U}} \tilde{y}$ se, e somente se, $\Phi(\tilde{x}) \leq_{\tilde{U}} \Phi(\tilde{y})$.*

Assim como $Aut(U)$ denota o conjunto de todos os automorfismos em U, $Aut(\tilde{U})$ indica o conjunto de todos os automorfismos intuicionistas em $\tilde{U}$.

A ação de $\Phi \in Aut(\tilde{U})$ em uma função $f_I : \tilde{U}^n \to \tilde{U}$ é uma função $f_I^\Phi : \tilde{U} \to \tilde{U}$, denominada **conjugada intuicionista de** f_I, definida para todo $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n \in \tilde{U}$ pela expressão:

$$f_I^\Phi(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = \Phi^{-1}(f_I(\Phi(\tilde{x}_1), \ldots, \Phi(\tilde{x}_n))). \quad (69)$$

Seja Φ um automorfismo em $\tilde{U}$. Pela Proposição 20 em (COSTA; BEDREGAL; NETO, 2011), Φ preserva os elementos diagonais em $\tilde{U}$: $\Phi[\tilde{D}] = \tilde{D}$.

4.2.1 Relação entre $Aut(\tilde{U})$ e $Aut(U)$

A seguir, reportam-se as principais proposições estabelecendo a relação entre classes de automorfismos que atuam sobre operadores em $\tilde{U}$ e U, considerando as funções de projeção de $\tilde{U}$ em U. No contexto desse trabalho, consideramos os automorfismos representáveis em U:$\phi_I : \tilde{U} \to \tilde{U}$.

Proposição 4.2.1. *(COSTA; BEDREGAL; NETO, 2011, Teorema 17) Seja $\phi : U \to U$ um automorfismo em U. Então, para todo $\tilde{x} \in \tilde{U}$, é um **automorfismo representável** em*

$\tilde{U}$ dado pela expressão:

$$\phi_I(\tilde{x}) \;\; = \;\; (\phi(l_{\tilde{U}}(\tilde{x})), 1 - \phi(1 - r_{\tilde{U}}(\tilde{x}))). \tag{70}$$

Proposição 4.2.2. *(COSTA; BEDREGAL; NETO, 2011, Observação 2) Para todo $\phi \in Aut(U)$, $x \in U$, o operador $\phi_I : Aut(U) \to Aut(\tilde{U})$, definido pela Eq. (70), é uma bijeção que preserva a relação de ordem $\leq_{\tilde{U}}$ em $\tilde{U}$.*

Na construção inversa, a próxima proposição mostra como automorfismos em U podem ser obtidos a partir da composição de automorfismos intuicionistas em $Aut(\tilde{U})$ e funções de projeção de $\tilde{U}$ em U.

Proposição 4.2.3. *(COSTA; BEDREGAL; NETO, 2011, Proposição 21) Seja $\Phi \in Aut(\tilde{U})$ e, para todo $x \in U$, $\Phi_{l_{\tilde{U}}}, \Phi_{r_{\tilde{U}}} : U \to U$ são funções dadas por:*

$$\Phi_{l_{\tilde{U}}}(x) = l_{\tilde{U}}(\Phi(x, 1 - x)), \quad \textit{e} \quad \Phi_{r_{\tilde{U}}}(x) = 1 - r_{\tilde{U}}(\Phi(x, 1 - x). \tag{71}$$

Então, tem-se que Φ_l, Φ_r são ambos automorfismos em U tais que $\Phi_{r_{\tilde{U}}} = \Phi_{l_{\tilde{U}}}$.

4.3 Negação Fuzzy Intuicionista

Nesta seção apresentaremos as funções de negações fuzzy intuicionista, suas propriedades algébricas, exemplos e conceitos relacionados.

De acordo com (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004), $N_I : \tilde{U} \to \tilde{U}$ é uma *negação fuzzy intuicionista* (IFN) se satisfaz as seguintes condições:

N_I1 : $N_I(\tilde{0}) = \tilde{1}$ e $N_I(\tilde{1}) = \tilde{0}$;

N_I2 : Se $\tilde{x} \geq \tilde{y}$ então $N_I(\tilde{x}) \leq N_I(\tilde{y})$, $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{U}$.

Negações fuzzy intuicionistas fortes (SIFN) são *negações fuzzy intuicionistas* que satisfazem a propriedade involutiva (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003):

N_I3 : $N_I(N_I(\tilde{x})) = \tilde{x}$, $\forall \tilde{x} \in \tilde{U}$.

Teorema 4.3.1. *(BACZYŃSKI, 2003; DESCHRIJVER; KERRE, 2005c) Uma negação fuzzy intuicionista $N_I : \tilde{U} \to \tilde{U}$ é forte, se e somente se, existe uma negação forte $N : U \to U$ tal que:*

$$N_I(\tilde{x}) = (N(N_S(x_2)), N_S(N(x_1))), \forall \tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}. \tag{72}$$

Exemplificação 4.3.1. *Um exemplo de negação fuzzy intuicionista forte é obtida considerando a **Negação Padrão** na Eq. (6). Tem-se então que $N_{IS}(\tilde{x}) = (N_S(N_S(x_2)), N_S(N_S(x_1))) = (x_2, x_1)$.*

4.3.1 Relação de Dualidade entre Funções Fuzzy Intuicionistas

Definição 4.3.1. *Seja N_I uma negação fuzzy intuicionista forte em $\tilde{U}$. Para todo $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in \tilde{U}^n$, se N_I é involutiva então $(\tilde{f}_{N_I})_{N_I} = \tilde{f}$, ou seja, $\tilde{f}$ e $\tilde{f}_{N_I}$ são mutuamente duais. A* ***função intuicionista*** *N_I-**dual** de uma função $f_I : \tilde{U}^n \to \tilde{U}$ é dada pela expressão:*

$$f_{I\,N_I}(\tilde{\mathbf{x}}) = N_I(f_I(N_I(\tilde{x}_1), \ldots, N_I(\tilde{x}_n))). \tag{73}$$

4.4 Funções de Agregação Fuzzy Intuicionistas

Uma função $A_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ é denominada função de agregação idempotente se, para todos $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$ satisfazem as seguintes propriedades (BACZYŃSKI, 2003; CALVO et al., 2002):

A_I1**:** $A_I(\tilde{0}, \tilde{0}) = \tilde{0}$ e $A_I(\tilde{1}, \tilde{1}) = \tilde{1}$ (condições de Borda em $\tilde{U}$);

A_I2**:** Se $\tilde{x} \leq \tilde{z}$, então $A_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq A_I(\tilde{z}, \tilde{y})$ (Monotonicidade);

A_I3**:** $A_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = A_I(\tilde{y}, \tilde{x})$ (Comutatividade).

Uma função de agregação idempotente satisfaz também a seguinte propriedade (BACZYŃSKI, 2003):

A_I4**:** $A_I(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{x}$.

Exemplificação 4.4.1. *As funções $\wedge_{\tilde{U}}, \vee_{\tilde{U}} : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$, definidas pela expressão:*

$$\vee_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\vee_U(\tilde{x_1}, \tilde{y_1}), \vee_U(\tilde{x_2}, \tilde{y_2}); \tag{74}$$

$$\wedge_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\wedge_U(\tilde{x_1}, \tilde{y_1}), \wedge_U(\tilde{x_2}, \tilde{y_2}). \tag{75}$$

são funções de agregação em $\tilde{U}^2$.

Além disso, sempre que A_I é uma função de agregação idempotente, tem-se que:

$$\wedge_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq_{\tilde{U}} A_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq_{\tilde{U}} \vee_{\tilde{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}),\ \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{U}.$$

4.4.1 T-(co)normas Fuzzy Intuicionistas

Funções que qualificam as intersecções fuzzy intuicionista e uniões fuzzy intuicionista são também referidas na literatura como t-normas e t-conormas fuzzy intuicionistas, respectivamente.

Definição 4.4.1. *Em (BACZYŃSKI, 2003) uma* ***t-norma intuicionista*** *é uma função $T_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$, satisfazendo as seguintes propriedades, para todo $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$:*

T_I1**:** $T_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = T_I(\tilde{y}, \tilde{x})$ *(Comutatividade);*

T_I2: $T_I(\tilde{x}, T_I(\tilde{y}, \tilde{z})) = T_I(T_I(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z})$ *(Associatividade);*

T_I3: $T_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq_{\tilde{U}} T_I(\tilde{u}, \tilde{v})$, *se* $\tilde{x} \leq_{\tilde{U}} \tilde{u}$ *e* $\tilde{y} \leq_{\tilde{U}} \tilde{v}$ *(Monotonicidade);*

T_I4: $T_I(\tilde{x}, \tilde{1}) = \tilde{x}$ *(Elemento neutro).*

Definição 4.4.2. *Uma* ***t-conorma intuicionista*** *é uma função* $S_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$*, satisfazendo as seguintes propriedades, para todo* $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$*:*

S_I1: $S_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = S_I(\tilde{y}, \tilde{x})$*;*

S_I2: $S_I(\tilde{x}, S_I(\tilde{y}, \tilde{z})) = S_I(S_I(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z})$*;*

S_I3: $S_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq S_I(\tilde{u}, \tilde{v})$ *se* $\tilde{x} \leq \tilde{u}$ *e* $\tilde{y} \leq \tilde{v}$*;*

S_I4: $S_I(\tilde{x}, \tilde{0}) = \tilde{x}$.

Com base nos resultados apresentados em (BACZYŃSKI, 2003, Definição 1), a Proposição 4.4.1 reporta à definição de t-representabilidade na LFI, veja mais detalhadamente os resultados em (DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004) e (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

Proposição 4.4.1. *(BACZYŃSKI, 2003, Lemma 1) Uma t-(co)norma fuzzy intuicionista* $(S_I), T_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ *é uma* ***t-(co)norma t-representável em LFI*** *se existem ambas, uma t-norma* $T : U^2 \to U$ *e uma t-conorma* $S : U^2 \to U$*, de tal modo que, para todo* $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$*,* $(S_I)T_I$ *é expressa pela equação:*

$$S_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = S_I((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)); \quad (76)$$

$$T_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = T_I((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)), \quad (77)$$

sempre que $T(x_1, y_1) \leq N_S(S(N_S(x_2), N_S(y_2)))$.

Nos casos apresentados na Proposição 4.4.1, diz-se que T_I e S_I são t-representáveis por pares (T, S) e (S, T), respectivamente (DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004).

4.5 (Co)Implicação Fuzzy Intuicionista

Em (ZANOTELLI, 2015), descreve-se que o grau de verdade de uma regra baseada na interpretação da expressão condicional, considera valores fuzzy intuicionistas $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{U}$ referentes tanto ao grau de pertinência (x_1, y_1), quanto o grau de não-pertinência (x_2, y_2) de elementos $x, y \in \chi$, aos conjuntos fuzzy intuicionistas A e B. Neste caso $x_1 \leq N_S(x_2)$ e $y_1 \leq N_S(y_2)$.

Esta interpretação baseada na IFL torna mais ampla a modelagem da incerteza entre o totalmente verdadeiro (1) e o totalmente falso (0), considerando ambos, os graus de pertinência e de não pertinência.

Definição 4.5.1. *Um operador de implicação fuzzy intuicionista* $I_I : \widetilde{U}^2 \to \widetilde{U}$ *é uma função binária satisfazendo as seguintes condições de contorno:*

I_I1 $I_I(\tilde{0},\tilde{0}) = I_I(\tilde{0},\tilde{1}) = I_I(\tilde{1},\tilde{1}) = \tilde{1}$ *e* $I_I(\tilde{1},\tilde{0}) = \tilde{0}$*;*

As condições na Definição 4.5.1 reproduzem as condições de contorno que definem os conectivos fuzzy intuicionistas e, neste caso, se $\tilde{x} = (x_1, x_2)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$ então $x_1 \leq N_S(x_2)$ e $y_1 \leq N_S(y_2)$ (ATANASSOV; GARGOV, 1989).

Definição 4.5.2. *(BACZYŃSKI, 2003, Teorema 4) Um* $I_I : \widetilde{U}^2 \to \widetilde{U}$ *é uma*(S,N)-***implicação intuicionista t-representável*** *baseado na negação forte* $N_I : \widetilde{U} \to \widetilde{U}$ *se e somente se existem* (S,N)*-implicações* $I_a, I_b : U^2 \to U$*, e para todo* $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$*,* I_I *é dada como:*

$$I_I(\tilde{x},\tilde{y}) \;=\; (I_a(N_S(x_2), y_1), N_S(I_b(x_1, N_S(y_2)))). \tag{78}$$

4.5.1 Propriedades Algébricas e Exemplificação

A seguir é considerada a extensão fuzzy intuicionista para as principais propriedades das implicações fuzzy.

I_I1 : $I_I(\tilde{1},\tilde{0}) = \tilde{0}$;

I_I2 : $\tilde{x} \leq_{\tilde{U}} \tilde{z} \Rightarrow I_I(\tilde{x},\tilde{y}) \geq_{\tilde{U}} I_I(\tilde{z},\tilde{y})$;

I_I3 : $\tilde{y} \leq_{\tilde{U}} \tilde{z} \Rightarrow I_I(\tilde{x},\tilde{y}) \leq_{\tilde{U}} I_I(\tilde{x},\tilde{z})$;

I_I4 : $I_I(\tilde{0},\tilde{y}) = \tilde{1}$;

I_I5 : $I_I(\tilde{x},\tilde{1}) = \tilde{1}$;

I_I6 : Se $(\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2),\ \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)) \in \tilde{U}^2$, tais que $x_1 + x_2 = 1$ e $y_1 + y_2 = 1$, então $\pi_{I_I((x_1,x_2),(y_1,y_2))} = 0$.

Em (DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004) e (ATANASSOV; GARGOV, 1998) uma implicação fuzzy intuicionistas $I_I : \widetilde{U}^2 \to \widetilde{U}$ é uma função que satisfaz I_I1, I_I2 e I_I3.

Em (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004, Definição 3), estende-se a definição proposta por J. Fodor e M. Roubens (FODOR; ROUBENS, 1994), uma implicação fuzzy intuicionistas $I_I : \widetilde{U}^2 \to \widetilde{U}$ é uma função que satisfaz as propriedades I_I2, I_I3, I_I4, I_I5 e I_I6 incluindo a condição de contorno $I_I1(\tilde{1},\tilde{0}) = \tilde{0}$.

4.6 Diferença Fuzzy Intuicionista e Co-Diferença Fuzzy Intuicionista

Nesta seção, serão tratados dois tipos de Diferença Fuzzy Intuicionista e Co-Diferença Fuzzy Intuicionista. No primeiro caso, o operador de diferença fuzzy intuicionista será tratado

com diferenças representáveis por conectivos fuzzy.
Posteriormente, o operador de diferença fuzzy intuicionista será obtido através de geradores estritamente não crescentes.
Conforme, (HUAWEN, 1987), seja $\mu_A,\ \mu_B : E \to U$ a função de pertinência de um conjunto fuzzy A e B. Então o operador de diferença fuzzy intuicionista $Dif_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ satisfaz as seguintes propriedades:

Dif_I1**:** $Dif_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{x}$;

Dif_I2 $Dif_I(\tilde{x}, \tilde{0}) = \tilde{x}$;

Dif_I3 Se $(\tilde{y} \leq \tilde{z})$ então $Dif_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq Dif_I(\tilde{x}, \tilde{z})$;

Dif_I4 Se $\tilde{x} \leq \tilde{y}$ então $Dif_I(\tilde{x}, \tilde{z}) \leq Dif_I(\tilde{y}, \tilde{z}))$;

Dif_I5 $Dif_I(\tilde{1}, \tilde{x}) = N_I(\tilde{x})$.

O operador de co-diferença fuzzy intuicionista $CoDif_I : \tilde{U}^2 \to U$, satisfaz as seguintes propriedades:

$CoDif_I1$**:** $CoDif_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \tilde{x}$;

$CoDif_I2$**:** $CoDif_I(\tilde{x}, \tilde{1}) = \tilde{x}$;

$CoDif_I3$**:** Se $\tilde{y} \geq \tilde{z}$ então $CoDif_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq CoDif + I(\tilde{x}, \tilde{z})$;

$CoDif_I4$**:** Se $\tilde{x} \geq \tilde{y}$ então $CoDif_I(\tilde{x}, \tilde{z}) \geq CoDif_I(\tilde{y}, \tilde{z})$;

$CoDif_I5$**:** $CoDif_I(\tilde{0}, \tilde{x}) = N_I(\tilde{x})$.

De acordo com (HUAWEN, 1987, Definition.3), sempre que $\tilde{x} = (\mu_A(x), \nu_A(x))$ e $\tilde{y} = (\mu_B(x), \nu_B(x)) \in \tilde{U}$, o conjunto fuzzy intuicionista $A_I - B_I$ determinado por um operador A-IFD $Dif : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ pode ser indicado pela expressão:

$$A_I - B_I \ = \ \{(x, \mu_{A_I - B_I}(x), \nu_{A_I - B_I}(x)) | x \in \chi\}. \tag{79}$$

De forma análoga, sua construção dual determina que o conjunto fuzzy intuicionista $A_I \mid B_I$ gerado por um A-IFE $CoDif : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ pode ser indicado pela expressão

$$A_I \mid B_I \ = \ \{(x, \mu_{A_I | B_I}(x), \nu_{A_I | B_I}(x)) | x \in \chi\}. \tag{80}$$

Estudam-se três formas de se obter conjuntos fuzzy intuicionistas gerados por operadores de (co)diferença fuzzy intuicionista logo a seguir, expressando as funções de pertinência e de não-pertinência por conectivos fuzzy.

As próximas seções analisam ainda que, segundo (HUAWEN, 1987), os operadores $(Co)Dif_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ podem ser expressos usando A-IFT (A-IFS) e/ou um gerador não crescente $\varphi : U \to U$, obtendo outras classes de operadores de (co)diferença (A-IFE)A-IFD.

4.6.1 Classe Dif_1 ($CoDif_1$) de Operadores de (Co)Diferença

Seja $T(S)$ uma intuicionista t-(co)norma, de acordo com (HUAWEN, 1987, Definition.4), define-se operador $Dif_{I1} : \tilde{U}^2 \to U$ pela seguinte expressão:

$$Dif_{I_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (T(x_1, y_2), S(x_2, y_1)). \tag{81}$$

De forma análoga, neste trabalho define-se o operador dual $CoDif_{I1} : \tilde{U}^2 \to U$ pela seguinte expressão:

$$CoDif_{I_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S(x_1, y_2), T(x_2, y_1). \tag{82}$$

Proposição 4.6.1. *Os operadores $Dif_{I1}, CoDif_{I1} : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ dados pelas Eqs.(81) e Eq.(82) são operadores A-IFD e A-IFE, respectivamente.*

Prova. *Para a prova da Eq.(81), veja (HUAWEN, 1987). No caso dual, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, tem-se as seguintes considerações:*

$CoDif_I1$: *Por T_I3 e S_I3 obtém-se que $CoDif_{I1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S(x_1, y_2), T(x_2, y_1)) \geq_{\tilde{U}} (S(x_1, 0), T(x_2, 1)) = (x_1, x_2) = \tilde{x}$.*

$CoDif_I2$: *$CoDif_{I1}(\tilde{x}, \tilde{1}) = (S(x_1, 0), T(x_2, 1)) = (x_1, x_2) = \tilde{x}$.*

$CoDif_I3$: *Se $\tilde{y} \geq_{\tilde{U}} \tilde{z}$ então $y_1 \geq z_1$ e $y_2 \leq z_2$. Logo, segue que $CoDif_{I1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S(x_1, y_2), T(x_2, y_1)) \leq_{\tilde{U}} (S(x_1, z_2), T(x_2, z_1)) = CoDif_{I1}(\tilde{x}, \tilde{z})$.*

$CoDif_I4$: *Se $\tilde{x} \geq_{\tilde{U}} \tilde{y}$ então $x_1 \geq y_1$ e $x_2 \leq y_2$. Logo, segue que $CoDif_{I1}(\tilde{x}, \tilde{z}) = (S(x_1, z_2), T(x_2, z_1)) \geq_{\tilde{U}} (S(y_1, z_2), T(y_2, z_1)) = CoDif_{I1}(\tilde{y}, \tilde{z})$.*

$CoDif_I5$: *$CoDif_I(\tilde{0}, \tilde{x}) = (S(0, x_2), T(1, x_1)) = (x_2, x_1) = N_{SI}(\tilde{x})$.*

Segue que a Eq. (82) expressa um operador A-IFE em $\tilde{U}$.

A proposição a seguir, apresenta que os operadores $A_I -_1 B_I$ e $A_I \mid_1 B_I$ podem ser expressos por uma t-norma T e uma t-conorma S, ou seja, as Eqs. (83) e (84) são expressões de representabilidade destes operadores em $\tilde{U}$.

Proposição 4.6.2. *Os conjuntos fuzzy intuicionistas $A_I -_1 B_I$ e $A_I \mid_1 B_I$ obtidos a partir do operador Dif_{I1} e $CoDif_{I1}$ são, respectivamente, definidos pelas seguintes expressões:*

$$\begin{aligned} A -_1 B &= \{(x, T(\mu_A(x), \nu_B(x)), S(\nu_A(x), \mu_B(x)))| \\ &\qquad x \in X, T(\mu_A(x), \nu_B(x)) + S(\nu_A(x), \mu_B(x)) \leq 1\}. \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned} A \mid_1 B &= \{(x, T(\mu_A(x), \nu_B(x)), S(\nu_A(x), \mu_B(x)))| \\ &\qquad x \in X, T(\mu_A(x), \nu_B(x)) + S(\nu_A(x), \mu_B(x)) \leq 1\}. \end{aligned} \tag{84}$$

Prova. *Sempre que Eqs.(79) e Eqs.(80) indicam as funções de pertinência e não-pertinência de $A -_1 B$ e $A \mid_1 B$, para cada $x \in X$, tem-se que:*

$$\begin{aligned}
A_I - B_I &= \{(x, \mu_{A_I - B_I}(x), \nu_{A_I - B_I}(x)) \mid x \in \tilde{U}, 0 \leq \mu_{A_I - B_I}(x) + \nu_{A_I - B_I}(x) \leq 1\} \\
&= \{(x, (Dif_I(\mu_{A_I}(x), \nu_{A_I}(x)), (\mu_{B_I}(x), \nu_{B_I}(x)))| \ x \in \tilde{U}, 0 \leq \mu_{A_I - B_I}(x) + \nu_{A_I - B_I}(x) \leq 1\} \\
&= \{(x, (Dif(\mu_A(x), N_S(\nu_A(x))), (Codif(\mu_B(x)), N_S(\nu_B(x)))| \ x \in \tilde{U}, 0 \leq \mu_{A_I - B_I}(x) + \nu_{A_I} \\
&= \{(x, T(\mu_A(x), \nu_B(x)), S(\mu_B(x), \nu_A(x))| \ x \in \tilde{U}, 0 \leq \mu_{A_I - B_I}(x) + \nu_{A_I - B_I}(x) \leq 1\} \\
A_I \mid B_I &= \{(x, \mu_{A_I|B_I}(x), \nu_{A_I|B_I}(x)) \mid x \in \tilde{U}, 0 \leq \mu_{A_I|B_I}(x) + \nu_{A_I|B_I}(x) \leq 1\} \\
&= \{(x, (CoDif_I(\mu_{A_I}(x), \nu_{A_I}(x)), (\mu_{B_I}(x), \nu_{B_I}(x)))\} \\
&= \{(x, (CoDif(\mu_A(x), N_S(\nu_A(x))), (Dif(\mu_B(x)), N_S(\nu_B(x))))\} \\
&= \{(x, S(\mu_A(x), \nu_B(x)), T(\mu_B(x), \nu_A(x))\}
\end{aligned}$$

Logo as Eqs. (83) e (84) são verificadas.

4.6.2 Classe Dif_2 ($CoDif_2$) de Operadores de (Co)Diferença

Sejam $T(S)$ uma intuicionista t-(co)norm e $\varphi : U \to U$ um gerador fuzzy intuicionista não crescente tal que $\varphi(0) = 1$. De acordo com (HUAWEN, 1987)[Definition.7], define-se operador $Dif_{I2} : \tilde{U}^2 \to U$ pela seguinte expressão:

$$Dif_{I_2}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (T(x_1, \varphi(1 - y_2)), S(x_2, 1 - \varphi(y_1))). \tag{85}$$

De forma análoga, neste trabalho define-se o operador dual $CoDif_{I2} : \tilde{U}^2 \to U$ pela seguinte expressão:

$$CoDif_{I_2}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S(x_1, 1 - \varphi(y_2)), T(x_2, \varphi(1 - y_1))). \tag{86}$$

Proposição 4.6.3. *Os operadores $Dif_{I2}, CoDif_{I2} : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ dados pelas Eqs.(81) e Eq.(82) são operadores A-IFD e A-IFE, respectivamente.*

Prova. *Para a prova da Eq.(85), veja (HUAWEN, 1987). No caso dual, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, tem-se as seguintes considerações:*

$CoDif_I1$: *Por T_I3 e S_I3 tem-se que $CoDif_{I2}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S(x_1, 1 - \varphi(y_2)), T(x_2, \varphi(1 - y_1))) \geq_{\tilde{U}}$ $(S(x_1, 1 - \varphi(0)), T(x_2, \varphi(1 - 1))) = (S(x_1, 0), T(x_2, 1)) = (x_1, x_2) = \tilde{x}$.*

$CoDif_I2$: *$CoDif_{I1}(\tilde{x}, \tilde{1}) = (S(x_1, 1 - \varphi(0)), T(x_2, \varphi(1 - 1))) = (S(x_1, 0), T(x_2, 1)) = (x_1, x_2) = \tilde{x}$.*

$CoDif_I3$: *Se $\tilde{y} \geq_{\tilde{U}} \tilde{z}$ então $y_1 \geq z_1$ e $y_2 \leq z_2$. Logo, segue que $CoDif_{I2}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S(x_1, 1 - \varphi(y_2)), T(x_2, \varphi(1 - y_1))) \leq_{\tilde{U}} (S(x_1, 1 - \varphi(z_2)), T(x_2, \varphi(1 - z_1))) = CoDif_{I2}(\tilde{x}, \tilde{z})$.*

$CoDif_I4$: *Se* $\tilde{x} \geq_{\tilde{U}} \tilde{y}$ *então* $x_1 \geq y_1$ *e* $x_2 \leq y_2$. *Logo, tem-se que* $CoDif_{I2}(\tilde{x},\tilde{z}) = (S(x_1, 1-\varphi(z_2)), T(x_2, \varphi(1-z_1))) \geq_{\tilde{U}} (S(y_1, 1-\varphi(z_2)), T(y_2, \varphi(1-z_1))) = CoDif_{I2}(\tilde{y},\tilde{z})$.

$CoDif_I5$: $CoDif_{I2}(\tilde{0},\tilde{x}) = (S(0, 1-\varphi(x_2)), T(1, \varphi(1-x_1))) = (1-\varphi(x_2), \varphi(1-x_1)) = N_{\varphi_I}(\tilde{x})$.

Segue que a Eq. (86) define um operador A-IFE em $\tilde{U}$.

A proposição a seguir apresenta que os operadores $A_I -_1 B_I$ e $A_I \mid_1 B_I$ podem ser expressos por uma t-norma T e uma t-conorma S juntamente com um gerador φ, ou seja, as Eqs. (87) (88) são expressões de representabilidade destes operadores em $\tilde{U}$.

Proposição 4.6.4. *Os conjuntos fuzzy intuicionistas* $A_I -_1 B_I$ *e* $A_I \mid_1 B_I$ *obtidos a partir do operador* Dif_{I1} *e* $CoDif_{I1}$ *são, respectivamente, definidos pelas seguintes expressões:*

$$\begin{aligned} A -_2 B &= \{(x, T(\mu_A(x), \varphi(1-\nu_B(x))), S(\nu_A(x), 1-\varphi(\mu_B x)))) \mid \\ &\quad x \in X, T(\mu_A(x), \varphi(1-\nu_B(x))) + S(\nu_A(x), 1-\varphi(\mu_B x))) \leq 1\}. \quad (87) \\ A \mid_2 B &= (x, S(\mu_A(x), 1-\varphi(\nu_B(x))), T(\nu_A(x), \varphi(1-\mu_B(x)))) \mid \\ &\quad x \in X, S(\mu_A(x), 1-\varphi(\nu_B(x))) + T(\nu_A(x), \varphi(1-\mu_B(x)) \leq 1\}. \quad (88) \end{aligned}$$

Prova. *Análoga a Proposição 4.6.2.*

Observação 4.6.1. *Se* $\varphi = N_S$ *então tem-se que*

$$A_I -_1 B_I = A_I -_2 B_I,\ A_I \mid_1 B_I = A_I \mid_2 B_I.$$

4.6.3 Classe Dif_3 ($CoDif_3$) de Operadores de (Co)Diferença

Sejam $T(S)$ uma t-(co)norma intuicionista e $\varphi : U \to U$ um gerador fuzzy intuicionista não crescente tal que $\varphi(0) = 1$. De acordo com (HUAWEN, 1987)[Definition.8], define-se operador $Dif_{I3} : \tilde{U}^2 \to U$ pela seguinte expressão:

$$Dif_{I_3}(\tilde{x},\tilde{y}) = (T(x_1, \varphi(1-y_2)), S(x_2, \varphi(1-(y_1)). \quad (89)$$

De forma análoga, neste trabalho define-se o operador dual $CoDif_{I3} : \tilde{U}^2 \to U$ pela seguinte expressão:

$$CoDif_{I_3}(\tilde{x},\tilde{y}) = (S(x_1, \varphi(1-(y_2), T(x_2, \varphi(1-y_1))). \quad (90)$$

Os operadores dados pelas Eqs. (89) e Eq.(90) satisfazem as propriedades de $Dif_I1 - Dif_I5$ $(CoDif_I1 - CoDif_I5)$ garantindo que estão nas classes dos operadores A-IFD e A-IFE.

Proposição 4.6.5. *Os operadores $Dif_{I3}, CoDif_{I3} : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ dados pelas Eqs. (89) e Eq.(90) são operadores A-IFD e A-IFE, respectivamente.*

Prova. *Prova análoga à Proposição 4.6.3.*

A proposição a seguir demonstra que os operadores $A -_3 B$ e $A \mid_3 B$ podem ser expressos por uma t-norma T e uma t-conorma S juntamente com um gerador φ, ou seja, as Eqs. (91) e (92) são expressões de representabilidade destes operadores em $\tilde{U}$.

Proposição 4.6.6. *Os conjuntos fuzzy intuicionistas $A_I -_3 B_I$ e $A_I \mid_3 B_I$ obtidos a partir do operador Dif_{I3} e $CoDif_{I3}$ são, respectivamente, definidos pelas seguintes expressões:*

$$\begin{aligned} A -_3 B &= \{(x, T(\mu_A(x), \varphi(1-\nu_B(x))), S(\nu_A(x), \varphi(1-(\mu_B(x)))) \mid \\ &\quad x \in X, T(\mu_A(x), \varphi(1-\nu_B(x))) + S(\nu_A(x), 1-\varphi(\mu_B x))) \leq 1\}. \quad (91) \\ A \mid_3 B &= (x, S(\mu_A(x), 1-\varphi(\nu_B(x))), T(\nu_A(x), \varphi(1-\mu_B(x)))| \\ &\quad x \in X, S(\mu_A(x), 1-\varphi(\nu_B(x))) + T(\nu_A(x), \varphi(1-\mu_B(x)) \leq 1\}. \quad (92) \end{aligned}$$

Prova. *Imediata.*

Observação 4.6.2. *De acordo com (HUAWEN, 1987), se $\varphi = N_S$ então:*

$$A_I -_1 B_I = A_I -_3 B_I, \;\; A_I \mid_1 B_I = A_I \mid_3 B_I.$$

4.7 Conjugação Fuzzy Intuicionista

Nesta seção apresenta-se as relações entre os conectivos fuzzy intuicionistas A-IFD e A-IFE e suas construções conjugadas. Neste contexto, estende-se os resultados já apresentados na Proposição 2.6.3.

Proposição 4.7.1. *Seja ϕ_I um automorfismo representável em $\tilde{U}$ dado pela Eq.(70) e os operadores A-IFD e A-IFE, indicados por Dif_{I1} e $CoDif_{I1}$ e definidos pela Eq.(81) e Eq.(82), respectivamente. Então, pela ação do automorfismo ϕ_I nestes operadores, as seguintes igualdades são verificadas:*

$$\begin{aligned} Dif_I^{\phi_I}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (Dif^{\phi}(x_1, 1-y_2)), CoDif(x_2, 1-y_1); \quad (93) \\ CoDif_I^{\phi_I}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (CoDif^{\phi}(x_1, 1-y_2)), Dif(x_2, 1-y_1), \quad (94) \end{aligned}$$

sempre que $I \in \{I_1, I_2, I_3\}$.

Prova. *Apresenta-se a prova da Eq.(93), no caso em $I = I_1$. Para todo $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{U}$, tem-se*

que:

$$
\begin{aligned}
Dif_{I1}^{\phi_I}(\tilde{x},\tilde{y}) &= \phi_I^{-1}(Dif_{I1}(\phi_I(\tilde{x}),\phi_I(\tilde{y}))) \text{ pela Eq.(69)} \\
&= \phi_I^{-1}(Dif_{I1}(\phi(x_1),1-\phi(1-x_2)),(\phi(y_1),1-\phi(1-y_2))) \text{ pela Eq.(70)} \\
&= \phi_I^{-1}(T(\phi(x_1),1-\phi(1-y_2)),S(1-\phi(1-x_2),\phi(y_1)) \text{ pela Eq.(85)} \\
&= \phi_I^{-1}(Dif(\phi(x_1)),\phi(1-y_2)),1-CoDif(\phi(1-x_2),\phi(y_1)) \text{ pelas Eqs.(23)(24)} \\
&= \phi_{I1}^{-1}\left(\phi(Dif^{\phi}(x_1,(1-y_2)),1-\phi(Dif^{\phi}(1-x_2,y_1))\right) \text{ pela Eq.(4)} \\
&= (\phi^{-1}(\phi(Dif^{\phi}(x_1,(1-y_2)))),1-\phi^{-1}(\phi(Dif^{\phi}(1-x_2,y_1))) \text{ pela Eq.(5)} \\
&= (Dif^{\phi}(x_1,1-y_2),1-Dif^{\phi}(1-x_2,y_1)) \text{ pela Eq.(69)} \\
&= (Dif^{\phi}(x_1,1-y_2),CoDif^{\phi}(x_2,1-y_1)) \text{ pela Eq.(11)}
\end{aligned}
$$

Portanto a Eq.(93) é verificada. De forma análoga podem ser demonstradas as demais igualdades.

A Proposição 4.7.1 assegura que o operador de conjugação, pelo qual um automorfismo gera outro operador da classe e satisfazendo todas as propriedades desta classe, preserva os operadores A-IFD e A-IFE das três classes estudadas nesta seção.

5 ROBUSTEZ DE DIFERENÇA E CO-DIFERENÇA FUZZY INTUICIONISTA

Este capítulo estende o estudo da robustez integrando o conceito de δ-sensibilidade de conectivos fuzzy como concebida por (LI et al., 2005), com a abordagem introduzida pela Teoria do Conjuntos Fuzzy Intuicionistas, proposta por Atanassov (ATANASSOV, 1999).

5.1 δ-Sensibilidade dos Conectivos Fuzzy Intuicionista

O estudo da δ-sensibilidade de operadores fuzzy intuicionista no ponto de $\mathbf{x}$ e domínio $\widetilde{U}^2$ é considerado nesta seção, estendendo os resultados já apresentados em (LI et al., 2005), mas focando principalmente na classe dos conectivos fuzzy intuicionista que são representáveis, ou seja, podem ser definidos por composição de conectivos fuzzy.

Consideramos $\tilde{\mathbf{a}} = (\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, \ldots \widetilde{a_n}) \in \widetilde{U}^n$ sendo que para cada $\widetilde{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}) \in \widetilde{U}^2$, $a_{i1} + a_{i2} \leq 1$ sempre que $i = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definição 5.1.1. *Seja $f_I : \tilde{U}^n \to \tilde{U}$ uma função de $n-$ordem, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n$. A δ-sensibilidade de f_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$, denotado por $\Delta_{f_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)$, é definida por:*

$$\Delta_{f_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \sup\{|f_I(\tilde{\mathbf{x}}) - f_I(\tilde{\mathbf{y}})| : \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n, \bigvee(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1, \bigwedge(r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\} \quad (5.1)$$

sempre que $\bigvee(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\}$ *e* $\bigwedge(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\}$.

De acordo com a Definição 5.1.1, a δ-sensibilidade de conectivos fuzzy intuicionistas é preservada pela aplicação de funções de projeção, sempre que os conectivos fuzzy intuicionistas são representáveis no mesmo sentido proposto em (BACZYŃSKI, 2003; G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004). Neste contexto, a abordagem intuicionista estende o estudo da robustez segundo a abordagem fuzzy.

5.2 Robustez de Negações Fuzzy Intuicionistas Representáveis

A Proposição 5.2.1 logo a seguir mostra que a δ-sensibilidade é preservada pela aplicação das funções de projeção que definem uma negação fuzzy intuicionista representável,

considerando os resultados em (BACZYŃSKI, 2003; DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004) e (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

As provas das proposições a seguir podem ser encontrada em (ZANOTELLI, 2015).

Proposição 5.2.1. *Seja $N_I : \tilde{U}^n \to \tilde{U}$ uma IFN. Sempre que $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n) \in \tilde{U}^n$, a δ-**sensibilidade de** N_I **no ponto** $\tilde{\mathbf{x}}$ é definida por:*

$$\Delta_{N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_{N \circ N_S}(x_2, \delta_2), \Delta_{N_S \circ N}(x_1, \delta_1)). \tag{96}$$

Corolário 5.2.1. *Seja $N_I : \tilde{U} \to \tilde{U}$ uma SIFN representável. Sempre que $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$, $N_I = N_{SI}$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^n$, a δ-**sensibilidade de** N_I **no ponto** $\tilde{\mathbf{x}}$, também pode ser expressa como:*

$$\Delta_{l_{\tilde{U}} \circ N_I}(r_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}}(\tilde{\delta})) = l_{\tilde{U}}(\Delta_{N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta})); \tag{97}$$

$$\Delta_{r_{\tilde{U}} \circ N_I}(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\tilde{\delta})) = r_{\tilde{U}}(\Delta_{N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta})). \tag{98}$$

Corolário 5.2.2. *Seja $N_I : \tilde{U} \to \tilde{U}$ uma negação fuzzy intuicionista forte (SIFN) representável, definida pela Eq.(72). Sempre que $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$, $N_I = N_{S_I}$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}$, a δ-**sensibilidade de** N_I **no ponto** $\tilde{\mathbf{x}}$ é dada por:*

$$\Delta_{N_{SI}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\delta_2, \delta_1). \tag{99}$$

Observação 5.2.1. *Os resultados apresentados na sequência, no Corolário 5.2.3, foram obtidos a partir da análise de robustez baseada na δ-sensibilidade de operadores obtidos por composições entre as negações fuzzy $N_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $N_S(x) = 1 - x$, tabuladas na Tabela 9.*

Tabela 9: Análise de Robustez na Composição de Negações Fuzzy

x	$\Delta_{N_1}(x, \delta)$	$\Delta_{N_S}(x, \delta)$	$\Delta_{N_1 \circ N_S}(x, \delta)$	$\Delta_{N_S \circ N_1}(x, \delta)$
$x = 0$	$1 - \sqrt{1 - \delta^2}$	δ	$\sqrt{2\delta - \delta^2}$	$1 - \sqrt{1 - \delta^2}$
$x = 1$	$\sqrt{2\delta - \delta^2}$	δ	$1 - \sqrt{1 - \delta^2}$	$\sqrt{2\delta - \delta^2}$

Corolário 5.2.3. *Seja $N_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Sempre que $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $N_I = N_{1I}$, tem-se a expressão da δ-sensibilidade de N_I nos pontos $\tilde{0}$ e $\tilde{1}$ dadas por:*

$$\Delta_{N_{1I}}(\tilde{0}, \tilde{\delta}) = \left(1 - \sqrt{1 - \delta_2^2}, 1 - \sqrt{1 - \delta_1^2}\right); \tag{100}$$

$$\Delta_{N_{1I}}(\tilde{1}, \delta) = \left(\sqrt{2\delta_2 - \delta_2^2}, \sqrt{2\delta_1 - \delta_1^2}\right). \tag{101}$$

Prova. *Seja* $N_{1I}(x) = (\sqrt{2x - x^2}, 1 - \sqrt{1 - x^2})$. *Logo, obtém-se que:*

$$\begin{aligned} l_{\tilde{U}}(\Delta_{N_{1I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) &= \Delta_{N_1 \circ N_S}(x_2, \delta_2) \text{ pela Eq.(97)} \\ &= \left(\sqrt{2((x_2 + \delta_2) \wedge 1) - ((x_2 + \delta_2) \wedge 1)^2} - \sqrt{2x_2 - x_2^2} \right) \vee \\ &\quad \left(\sqrt{2x_2 - x_2^2} - \sqrt{2((x_2 - \delta_2) \vee 0) - ((x_2 - \delta_2) \vee 0)^2} \right) \text{ pela Eq.(46)} \\ r_{\tilde{U}}(\Delta_{N_{1I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) &= \Delta_{N_S \circ N_1}(x_1, \delta_1) \text{ pela Eq.(98)} \\ &= \left(\sqrt{1 - x_1^2} - \sqrt{1 - (x_1 + \delta_1 \wedge 1)^2} \right) \vee \\ &\quad \left(\sqrt{1 - (x_1 - \delta_1 \vee 0)^2} - \sqrt{1 - x_1^2} \right) \text{ pela Eq.(46)} \end{aligned}$$

Concluindo, $\Delta_{N_{1I}}(\tilde{0}, \delta) = \left(1 - \sqrt{1 - \delta_2^2}, 1 - \sqrt{1 - \delta_1^2}\right)$ *e a Eq.(100) é verificada. Analogamente, Eq.(101) pode ser provada.*

A Figura 8 apresenta o diagrama que graficamente resume os principais resultados obtidos na Proposição 5.2.1 e Corolários 5.2.1 e 5.2.2 – a robustez das IFN representável pode ser expressa em termos de robustez dos correspondentes argumentos.

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\mathbf{x}}, \delta) & \xrightarrow{Eq.\ (96)} & \Delta_{N_{SI}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) \\ \Big\downarrow Eqs.(66)(67) & & \Big\downarrow Eqs.(97)(98) \\ (r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta), l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) & \xrightarrow{Eq.\ (95)} & (\Delta_{r_{\tilde{U}} \circ N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta), \Delta_{r_{\tilde{U}} \circ N_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) \end{array}$$

Figura 5: Operador de robustez na classe das IFNs representável .

5.2.1 Robustez de Conectivos Fuzzy Intuicionista e Relação de Dualidade

Esta seção estabelece que a δ-sensibilidade é preservada pela construção N_I-dual de conectivos fuzzy intuicionista que são representáveis no mesmo sentido proposto em (BACZYŃSKI, 2003; G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

Proposição 5.2.2. *Sejam* $f_I : \tilde{U}^n \to \tilde{U}$ *e* $\Delta_{f_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)$ *a expressão da* δ*-sensibilidade de* f_I *no ponto* $\tilde{\mathbf{x}}$. *Sempre que* $\delta \in U^2$, $N_I = N_{IS}$ *e* f_{IN_I} *a função* N_I*-dual de* f_I, ***a*** δ***-sensibilidade de*** f_{IN_I} ***no ponto*** $\tilde{\mathbf{x}}$ *é dado por:*

$$\Delta_{(f_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = N_{SI}\left(\Delta_{f_I}(N_{SI}(\tilde{\mathbf{x}}), N_{SI}(\delta))\right). \tag{102}$$

5.3 Robustez de (Co)Normas Triangulares Fuzzy Intuicionistas

Esta seção apresenta uma análise da robustez baseada na δ-sensibilidade das t-(co)normas fuzzy intuicionistas que são t-representáveis no sentido proposto em (BACZYŃSKI, 2003;

G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

Proposição 5.3.1. *Seja $(S_I)T_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ uma t-(co)norma fuzzy intuicionista representável como definido pela Eq. (76) Eq. (77). Considere $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$. A δ-sensibilidade de (S_I) T_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$, denotada por $(\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta))$ $\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)$, é definida por:*

$$\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_S((l_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1), \Delta_T((r_{\tilde{U}}, r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2)); \quad (103)$$

$$\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_T((l_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1), \Delta_S((r_{\tilde{U}}, r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2)). \quad (104)$$

No que segue, o estudo da δ-sensibilidade de uma t-(co)norma intuicionista no ponto $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = ((x_{11}, x_{12}), (x_{11}, x_{12}))$ no domínio $\tilde{U}^2$ estende o trabalho introduzido em (LI et al., 2005) ao aplicar as funções de projeção na classe de tais conectivos fuzzy intuicionista binários para expressá-los a partir de seus correspondentes conectivos fuzzy (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004). Com base nas projeções, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 5.3.2. *A δ-sensibilidade de (S_I) T_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$, denotado por $(\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta))$ $\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)$, pode ser definida pelas projeções:*

$$l_{\tilde{U}}(\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_T((l_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1 \quad e \quad r_{\tilde{U}}(\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_S((r_{\tilde{U}}, r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2); \quad (105)$$

$$r_{\tilde{U}}(\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_S((l_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_1) \quad e \quad l_{\tilde{U}}(\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_T((r_{\tilde{U}}, r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}), \delta_2). \quad (106)$$

Prova. *Segue direto da Proposição 5.3.1.*

Analogamente, seguem os mesmos resultados, considerando as componentes de cada argumento em $\tilde{\mathbf{x}}$:

Corolário 5.3.1. *Quando $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) \in \tilde{U}^2$, tem-se que:*

$$\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_T((x_{11}, x_{21}), \delta_1), \Delta_S((x_{12}, x_{22}), \delta_2)); \quad (107)$$

$$\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_S((x_{11}, x_{21}), \delta_1), \Delta_T((x_{12}, x_{22}), \delta_2)). \quad (108)$$

Prova. *Segue da Proposição 5.3.2 e Eq. (77) que:*

$$l_{\tilde{U}}(\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_{l_{\tilde{U}} \circ T_I}(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_T((x_{11}, x_{21}), \delta_1);$$

$$r_{\tilde{U}}(\Delta_{T_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_{r_{\tilde{U}} \circ T_I}(r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_S((x_{12}, x_{22}), \delta_2).$$

Portanto a Eq. (107) é válida. De modo análogo, a Eq. (108) pode ser provada.

Os resultados discutidos no Corolário (5.3.3) estendem os resultados apresentados em (LI et al., 2005, Corolário1(i)).

Corolário 5.3.2. *Seja $f_I\colon \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ uma t-(co)norma fuzzy intuicionista. Então, tem-se:*

$$\Delta_{f_I}\left((\tilde{0},\tilde{1}),\delta\right) = \Delta_{f_I}\left((\tilde{1},\tilde{0}),\delta\right) = \delta; \tag{109}$$

$$\Delta_{f_I}\left((\tilde{0},\tilde{0}),\delta\right) = f_I(\delta,\delta); \tag{110}$$

$$\Delta_{f_I}\left((\tilde{1},\tilde{1}),\delta\right) = (f_{N_S}(\delta_1,\delta_1), f_{N_S}(\delta_2,\delta_2)). \tag{111}$$

Prova. *Pelos resultados apresentados no Corolário 5.3.1, segue que:*

$$\begin{aligned}\Delta_{f_I}\left((\tilde{1},\tilde{1}),\delta\right) &= (\Delta_f((1,1),\delta_1), \Delta_f((0,0),\delta_2)) \\ &= (N_S(f(N_S(\delta_1), N_S(\delta_1))), f_{N_S}(\delta_2,\delta_2)) = (f_{N_S}(\delta_1\delta_1), f_{N_S}(\delta_2,\delta_2).)\end{aligned}$$

Portanto, Eq. (111) é verificada. Da mesma forma, as demais expressões nas Equações (109)(110) podem ser verificadas.

5.3.1 Robustez de t-(Co)Normas Intuicionistas e Relação de Dualidade

Esta seção descreve a ação do operador dual na classe das t-(co)normas fuzzy intuicionistas que são representáveis.

Proposição 5.3.3. *Seja $(S_I)T_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ uma t-(co)norma fuzzy intuicionista representável como definido pela Eq. (76) e Eq. (77). Considerando $N = N_S$, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$, a δ-sensibilidade de $(S_{IN_{SI}})$ e $T_{IN_{SI}}$ no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ são definidas por:*

$$\Delta_{(T_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}},\delta) = N_{SI}\left(\Delta_{T_I}(N_{SI}(\tilde{\mathbf{x}}), N_{SI}(\delta))\right); \tag{112}$$

$$\Delta_{(S_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}},\delta) = N_{SI}\left(\Delta_{S_I}(N_{SI}(\tilde{\mathbf{x}}), N_{SI}(\delta))\right). \tag{113}$$

Na sequência, tem-se a expressão da relação dual de t-(co)normas fuzzy intuicionistas em termos dos argumento de $\tilde{\mathbf{x}}$:

Corolário 5.3.3. *Seja $(S_I)T_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ uma t-(co)norma fuzzy intuicionista representável como definida pela Eq. (76) e Eq. (77). Considerando $N = N_S$, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$, a δ-sensibilidade de $(S_{IN_{SI}})$ $T_{IN_{SI}}$ no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ podem ser definidas pelas expressões:*

$$\Delta_{(T_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}},\delta) = \left(\Delta_{T_{N_S}}((x_{11},x_{21}),\delta_1), \Delta_{S_{N_S}}((x_{12},x_{22}),\delta_2)\right); \tag{114}$$

$$\Delta_{(S_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}},\delta) = \left(\Delta_{S_{N_S}}((x_{11},x_{21}),\delta_1), \Delta_{T_{N_S}}((x_{12},x_{22}),\delta_2)\right). \tag{115}$$

A Proposição 5.3.4 mostra que, quando $N = N_I$, as funções de projeções preservam a construção N_I-dual de t-(co)normas fuzzy intuicionistas que são representáveis segundo abordagem em (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004).

Proposição 5.3.4. *Seja $(S_I)T_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ uma t-(co)norma fuzzy intuicionista representável como definida pela (Equação (76)) Equação (77). Considerando $N = N_S$, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$*

e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$*, tem-se que:*

$$l_{\tilde{U}^2}\left(\Delta_{(T_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}},\delta)\right) = \Delta_{l_{\tilde{U}^2}\circ T_{I_{N_{SI}}}}(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_{T_{N_S}}((x_{11},x_{21}),\delta_1); \quad (116)$$

$$r_{\tilde{U}^2}\left(\Delta_{(T_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}},\delta)\right) = \Delta_{r_{\tilde{U}^2}\circ T_{I_{N_{SI}}}}(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_{S_{N_S}}((x_{12},x_{22}),\delta_2); \quad (117)$$

$$l_{\tilde{U}^2}\left(\Delta_{(S_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}},\delta)\right) = \Delta_{l_{\tilde{U}^2}\circ S_{I_{N_{SI}}}}(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_{S_{N_S}}((x_{11},x_{21}),\delta_1); \quad (118)$$

$$r_{\tilde{U}^2}\left(\Delta_{(S_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}},\delta)\right) = \Delta_{r_{\tilde{U}^2}\circ S_{I_{N_{SI}}}}(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta)) = \Delta_{T_{N_S}}((x_{12},x_{22}),\delta_2). \quad (119)$$

A Figura 6 apresenta as relações que preservam a robustez de construções duais na classe das t-normas fuzzy intuicionistas. Analogamente, também podem ser verificadas as correlações na classe t-conormas fuzzy intuicionistas.

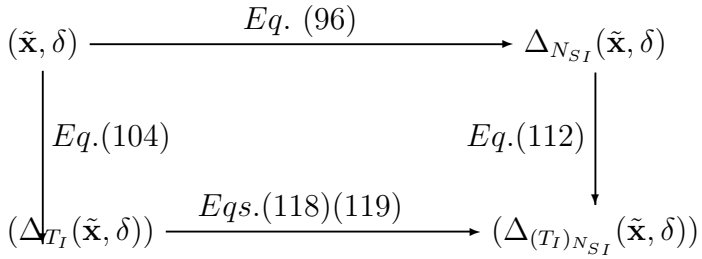

Figura 6: Analise da robustez na classe IFTs.

Observação 5.3.1. *Em analogia do que foi descrito na Observação 3.1.3, podemos considerar valorações diferenciadas para a perturbação* $\delta = (\delta_1,\delta_2) = ((\delta_{11},\delta_{12}),(\delta_{21},\delta_{22}))$ *referente a um argumento* $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) = ((x_{11},x_{12}),(x_{21},x_{22}))$*, respectivamente.*

Neste contexto, aplicando a Eq. (47) resulta em que:

$$\begin{aligned}
\Delta_{T_P}((0,0),(\delta_{11},\delta_{21})) &= (T_P(0+\delta_{11}\wedge 1, 0+\delta_{21}\wedge 1) - T_P(0,0)) \\
&\quad \vee (T_P(0,0) - T_P(0-\delta_{11}\vee 0, 0-\delta_{21}\vee 0)) \\
&= T_P(\delta_{11},\delta_{21})\vee 0 = T_P(\delta_{11},\delta_{21}) = (\delta_{11},\delta_{21}); \\
\Delta_{S_P}((1,1),(\delta_{21},\delta_{22})) &= (\delta_{21},\delta_{22}); \\
\Delta_{S_P}((0,0),(\delta_{21},\delta_{22})) &= (S_P(0+\delta_{12}\wedge 1, 0+\delta_{22}\wedge 1) - S_P(0,0)) \\
&\quad \vee (S_P(0,0) - S_P(0-\delta_{12}\vee 0, 0-\delta_{22}\vee 0)) \\
&= S_P(\delta_{12},\delta_{22})\vee 0 = S_P(\delta_{12},\delta_{22}) = \delta_{12}+\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{22}; \\
\Delta_{T_P}((1,1),(\delta_{11},\delta_{21})) &= \delta_{11}+\delta_{21}-\delta_{11}\delta_{21}.
\end{aligned}$$

E na sequência, aplicando as Equações (107) e (108), obtemos também que:

Tabela 10: T-norma e T-conorma Fuzzy Intuicionista definida pelo Produto Algébrico (T_P) e Soma Determinística (S_P)

$\tilde{\mathbf{x}}$	$\Delta_{T_{I_P}}(\tilde{x},\tilde{\delta})$	$\Delta_{S_{I_P}}(\tilde{x},\tilde{\delta})$
$(\tilde{0},\tilde{0})$	$(\delta_{11}\delta_{12}, \delta_{12}\delta_{22})$	$(\delta_{11}+\delta_{21}-\delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12}+\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{22})$
$(\tilde{0},\tilde{1})$	$(\delta_{11}, \delta_{21})$	$(\delta_{12}, \delta_{22})$
$(\tilde{1},\tilde{0})$	$(\delta_{12}, \delta_{22})$	$(\delta_{11}, \delta_{21})$
$(\tilde{1},\tilde{1})$	$(\delta_{11}+\delta_{21}-\delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12}+\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{22})$	$(\delta_{11}\delta_{21}, \delta_{12}\delta_{22})$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{T_{P_I}}(\tilde{\mathbf{0}},\tilde{\delta}) &= \Delta_{T_{P_I}}((\tilde{0},\tilde{0}),(\delta_1,\delta_2)) = (\Delta_{T_P}((0,0),(\delta_{11},\delta_{21})),\Delta_{S_P}((1,1),(\delta_{21},\delta_{22})))\\
&= (T_P(\delta_{11},\delta_{21}), 1-S_P(1-\delta_{21},1-\delta_{22}))\\
&= (T_P(\delta_{11},\delta_{21}), T_P(\delta_{21},\delta_{22})) = (\delta_{11}\delta_{21},\delta_{21}\delta 22);\\
\Delta_{S_{P_I}}(\tilde{\mathbf{0}},\tilde{\delta}) &= \Delta_{S_{P_I}}((\tilde{0},\tilde{0}),(\delta_1,\delta_2)) = (\Delta_{S_P}((0,0),(\delta_{11},\delta_{21})),\Delta_{T_P}((1,1),(\delta_{21},\delta_{22})))\\
&= (S_P(\delta_{11},\delta_{21}), 1-S_T(1-\delta_{21},1-\delta_{22}))\\
&= (S_P(\delta_{11},\delta_{21}), S_P(\delta_{21},\delta_{22})) = (\delta_{11}+\delta_{21}-\delta_{11}\delta_{21},\delta_{12}+\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{22}).
\end{aligned}
$$

A Tabela 10 apresenta outros exemplos desta aplicação.

5.4 Robustez da Implicação e Coimplicação Fuzzy Intuicionistas

A discussão sobre a δ-sensibilidade de uma (S,N)-implicação representável I_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$ é introduzida em (REISER; BEDREGAL, 2015). Nesta seção, os principais resultados são relatados e outras proposições são estudadas.

Com base nas funções de projeção em $\tilde{U}^2$, veja nas Equações (66) e (67), a Proposição 5.4.2 estende os resultados em (REISER; BEDREGAL, 2015, Proposição 10), proporcionando uma expressão para a δ-sensibilidade de uma (S,N)-implicação intuicionista obtida por t-(co)normas representáveis.

Agora, estudamos a δ-sensibilidade de uma (S,N)-implicação intuicionista no ponto $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$.

Proposição 5.4.1. *Seja $I_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ uma (S,N)-implicação fuzzy intuicionista como definida pela Eq. (78). Considerando $\delta = (\delta_1,\delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}^2$, a δ-sensibilidade de I_I no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ é definida por:*

$$\Delta_{I_I}(\tilde{\mathbf{x}},\delta) = (\Delta_{I_a}((N_S \circ r_{\tilde{U}}, l_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}),\delta_1), \Delta_{I_b}((l_{\tilde{U}}, N_S \circ r_{\tilde{U}})(\tilde{\mathbf{x}}),\delta_2)). \tag{120}$$

Proposição 5.4.2. *Seja $I_I(J_I) : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ uma intuicionista t-representável (S,N)-implicação ((T,N)-implicação), como dada pela Equação (78). Se $\delta = (\delta_1,\delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) \in$*

$\tilde{U}^2$, *a* δ-***sensibilidade de*** I_I ***no ponto*** $\tilde{\mathbf{x}}$ *é dada por:*

$$\Delta_{I_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}) = (\Delta_{I_a}((N_S(x_{12}), x_{21}), \delta_1), \Delta_{N_S \circ I_b}((x_{11}, N_S(x_{22})), \delta_2)). \tag{121}$$

Analogamente, a δ-***sensibilidade de*** J_I ***no ponto*** $\tilde{\mathbf{x}}$ *é dada por:*

$$\Delta_{J_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_{J_a}((N_S(x_{12}), x_{21}), \delta_1), \Delta_{N_S \circ J_b}(x_{11}, N_S(x_{22}), \delta_2),). \tag{122}$$

Ao considerar S-implicação fuzzy intuicionista, o próximo corolário estende a lógica fuzzy intuicionista proposta por Atanassov para aproximar os resultados apresentados em (LI et al., 2005, Corolário 1(iii)):

Corolário 5.4.1. *Seja* $f_I \colon \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ *uma* (S, N)*-implicação (ou* (T, N)*-coimplicação) fuzzy intuicionista. Então:*

$$\Delta_{f_I}\left((\tilde{0}, \tilde{1}), \delta\right) = N_{SI} f_I(\delta, N_I(\delta)); \quad \Delta_{f_I}\left((\tilde{0}, \tilde{0}), \delta\right) = N_{SI}(N_I(\delta));$$
$$\Delta_{f_I}\left((\tilde{1}, \tilde{0}), \delta\right) = f_I(N \circ N_{SI}(\delta), \delta); \quad \Delta_{f_I}\left((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta\right) = \delta.$$

Corolário 5.4.2. *Seja* $f_I \colon \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ *uma* (S, N)*-implicação (ou* (T, N)*-coimplicação) fuzzy intuicionista e* f_{N_I} *a sua construção dual. Quando* $N = N_S$*, as seguintes expressões são verificadas: (i)* $\Delta_f\left((\tilde{0}, \tilde{1}), \delta\right) = f_{N_I}(N_I(\delta), \delta)$*; (ii)* $\Delta_f\left((\tilde{1}, \tilde{0}), \delta\right) = f(\delta, \delta)$*; (iii)* $\Delta_f\left((\tilde{0}, \tilde{0}), \delta\right) = \Delta_f\left((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta\right) = \delta$*.*

Proposição 5.4.3. *Seja* $(J_I)I_I : \tilde{U}^n \to \tilde{U}$ *uma (co)implicação fuzzy intuicionista representável e* $(\Delta_J(\tilde{x}, \delta))$ $\Delta_I(\tilde{x}, \delta)$ *a* δ*-sensibilidade de uma (co)implicação* (J) I *no ponto* $\tilde{x}$*. De acordo com a Proposição 5.2.2, quando* N *é uma negação fuzzy padrão (*$N = N_S$ *na Eq. (6)) e* (J_N) I_N *é a função* N*-dual de* (J) I*, a* δ***-sensibilidade de*** I_{IN_I} ***no ponto*** $\tilde{\mathbf{x}}$ *é dada por:*

$$\Delta_{I_{IN_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_{N_S \circ I_b}((x_{12}, N_S(x_{21})), \delta_1), \Delta_{I_a}((N_S(x_{11}), x_{22}), \delta_2)); \tag{123}$$

Dualmente, a δ***-sensibilidade de*** J_{IN_I} ***no ponto*** $\tilde{\mathbf{x}}$ *é dada por:*

$$\Delta_{J_{IN_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = (\Delta_{N_S \circ J_b}((x_{12}, N_S(x_{21})), \delta_1), \Delta_{J_a}((N_S(x_{11}), x_{22}), \delta_2)). \tag{124}$$

Corolário 5.4.3. *As declarações a seguir são verificadas:*

(i) *quando* $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{0}, \tilde{0})$ *ou* $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{1}, \tilde{1})$*, tem-se* $\Delta_{I_{IN_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \Delta_{J_{IN_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \delta$*;*

(ii) *quando* $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{0}, \tilde{1})$ *então* $\Delta_{I_{IN_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \Delta_{T_I}((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta)$*; e* $\Delta_{J_{IN_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \Delta_{S_I}((\tilde{1}, \tilde{1}), \delta)$*;*

(iii) *quando* $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{1}, \tilde{0})$*, tem-se* $\Delta_{I_{IN_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \Delta_{T_I}((\tilde{0}, \tilde{0}), \delta)$*; e* $\Delta_{J_{IN_I}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \Delta_{S_I}((\tilde{0}, \tilde{0}), \delta)$*.*

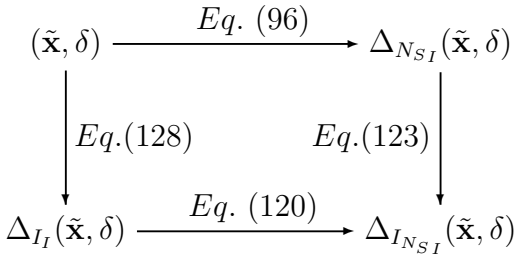

Figura 7: Operador de robustez na classe das (S,N)-implicações representáveis.

A Figura 7 apresenta um diagrama comutativo com os principais resultados discutidos nas Proposições 5.4.2 e 5.4.3.

O Teorema a seguir estende os resultados em (LI et al., 2005, Teorema 2) considerando a abordagem intuicionista proposta por Atanassov.

Teorema 5.4.1. *Seja uma (S, N)-implicação fuzzy intuicionista tal que $I_{S_P,N_S}(\tilde{x}, \tilde{y}) = S_{P_I}(N_{S_I}(\tilde{x}), \tilde{y})$, S_I é uma t-conorma fuzzy intuicionista e N_I é uma negação fuzzy intuicionista. Então:*

(i) $\Delta_I((\tilde{0},\tilde{0}), \tilde{\delta}) = 1 - N_{S_I}(\tilde{\delta})$; ***(ii)*** $\Delta_I((\tilde{0},\tilde{1}),\tilde{\delta}) = 1 - S_{P_I}(N_{S_I}(\tilde{\delta}),1 - \tilde{\delta})$;

(iii) $\Delta_I((\tilde{1},\tilde{0}), \tilde{\delta}) = S_{P_I}(N_{S_I}(1 - \tilde{\delta}),\tilde{\delta})$; ***(iv)*** $\Delta_I((\tilde{1},\tilde{1}),\tilde{\delta}) = \tilde{\delta}$.

Prova. *Pela Proposição 5.4.2, segue que:*

(i) *Seja $\tilde{\delta} \in \tilde{U}^2$. Então tem-se que $\Delta_I((\tilde{1},\tilde{1}),\tilde{\delta}) = (\Delta_{I_a}((N(0),1),\delta_1), \Delta_{I_b}((1,N(0)),\delta_2))$.*

$\Delta_{I_a}((1,1),\delta_1)$	$\Delta_{I_b}((1,1),\delta_2)$
$I_a(1,1) = 1$	$I_b(1,1) = 0$
$I_a\lfloor 1,1\rceil = I_a(1 - \delta_1 \vee 0, 1 + \delta_1 \wedge 1)$	$I_b\lfloor 1,1\rceil = I_b(1 - \delta_2 \vee 0, 1 + \delta_2 \wedge 1)$
$= I_a(1 - \delta_1, 1)$	$= I_b(1 - \delta_2, 1)$
$= 1 - 1 + \delta_1 + 1 - \delta_1 = 1$	$= 1 - 1 + \delta_2 = \delta_2$
$I_a\lceil 1,1\rfloor = I_a(1 + \delta \wedge 1, 1 - \delta \vee 0)$	$I_b\lceil 1,1\rfloor = I_b(1 + \delta \wedge 1, 1 - \delta \vee 0)$
$= I_a(1, 1 - \delta)$	$= I_b(1, 1 - \delta)$
$= 1 - 1 + 1 - \delta = 1 - \delta$	$= 1 - \delta - 1 + \delta = 0$
$(I_a(1,1) - I_a\lceil 1,1\rfloor) \vee (I_a\lfloor 1,1\rceil - I_a(1,1))$	$(I_b(1,1) - I_b\lceil 1,1\rfloor) \vee (I_b\lfloor 1,1\rceil - I_b(1,1))$
$1 - 1 + \delta \vee 1 - 1 = \delta$	$0 - 0 \vee \delta - 0 = \delta$

Portanto, concluímos que $\Delta_I(\tilde{1},\tilde{1}) = \tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$.

(ii) $\Delta_{I_{S_P,N_{S_I}}}((\tilde{0},\tilde{0}),\tilde{\delta}) = \Delta_{I_a}((N(1),0),\delta_1), \Delta_{I_b}((0,N(1)),\delta_2)$. *Logo, temos que:*

$\Delta_{I_a}((0,0),\delta_1)$	$\Delta_{I_b}((0,0),\delta_2)$
$I_a(0,0)=1$	$I_b(0,0)=0$
$I_a\lfloor 0,0\rceil = I_a(0-\delta\vee 0, 0+\delta\wedge 1)$	$I_b\lfloor 0,0\rceil = I_b(0-\delta\vee 0, 0+\delta\wedge 1)$
$= I_a(0,\delta)=1$	$= I_b(0,\delta)=\delta$
$I_a\lceil 0,0\rfloor = I_a(0+\delta\wedge 1, 0-\delta\vee 0)$	$I_b\lceil 0,0\rfloor = I_b(0+\delta\wedge 1, 0-\delta\vee 0)$
$= I_a(\delta,0)=1-\delta+0=1-\delta$	$= I_b(\delta,0)=0$
$(I_a(0,0)-I_a\lceil 0,0\rfloor)\vee(I_a\lfloor 0,0\rceil - I_a(0,0))$	$(I_b(0,0)-I_b\lceil 0,0\rfloor)\vee(I_b\lfloor 0,0\rceil - I_b(0,0))$
$1-1+\delta\vee 1-1=\delta$	$0-0\vee\delta-0=\delta$

$\Delta_{I_{S_P,N_{S_I}}}((\tilde{0},\tilde{0}),\tilde{\delta}) = 1 - N_{S_I}(\tilde{\delta})$.

(iii) $\Delta_{I_{S_P,N_{S_I}}}((\tilde{1},\tilde{0}),\tilde{\delta}) = (\Delta_{I_a}((N(0),0),\delta_1),\Delta_{I_b}((1,N(1)),\delta_2))$. *Logo, temos que:*

$\Delta_{I_a}((1,0),\delta_1)$	$\Delta_{I_b}((1,0),\delta_2)$
$I_a(1,0)=0$	$I_b(1,0)=0$
$I_a\lfloor 1,0\rceil = I_a(1-\delta\vee 0, 0+\delta\wedge 1)$	$I_b\lfloor 1,0\rceil = I_b(1-\delta\vee 0, 0+\delta\wedge 1)$
$= I_a(1-\delta_1,\delta)$	$= I_b(1-\delta_2,\delta_2)$
$= 1-1+\delta_1+\delta_1-\delta_1^2 = 2\delta_1-\delta_1^2$	$\delta_2-\delta_2+\delta_2^2 =$
$I_a\lceil 0,0\rfloor = I_a(0+\delta\wedge 1, 0-\delta\vee 0)$	$I_b\lceil 0,0\rfloor = I_b(0+\delta\wedge 1, 0-\delta\vee 0)$
$= I_a(\delta,0)=1-\delta+0=1-\delta$	$= I_b(\delta,0)=0$
$(I_a(0,0)-I_a\lceil 0,0\rfloor)\vee(I_a\lfloor 0,0\rceil - I_a(0,0))$	$(I_b(0,0)-I_b\lceil 0,0\rfloor)\vee(I_b\lfloor 0,0\rceil - I_b(0,0))$
$1-1+\delta\vee 1-1=\delta$	$0-0\vee\delta-0=\delta$

Portanto, $\Delta_{I_{S_P,N_{S_I}}}((\tilde{1},\tilde{0}),\tilde{\delta}) = \delta$.

5.5 Robustez da Diferença e Co-Diferença Fuzzy Intuicionistas

Esta seção formaliza a análise da da robustez de operadores de diferença e co-diferença da lógica fuzzy intuicionista, levando em consideração a metodologia de avaliação da sensibilidade ponto a ponto de conectivos fuzzy, como proposto em (LI, 2011) e extendida em (REISER; BEDREGAL, 2012).

Primeiramente, os resultados em (LI et al., 2005, Theorem 1) são extendidos para a abordagem intuicionista proposta por Atanassov(ATANASSOV, 1999, 2003).

Sejam $f_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$, $\tilde{\delta} = (\delta_1,\delta_2) \in \tilde{U}$ e $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{U}^2$. Então consideramos a seguinte notação:

$$f_I\lfloor\tilde{\mathbf{x}}\rceil \equiv f_I((\tilde{x}-\tilde{\delta})\vee\tilde{0},(\tilde{y}+\tilde{\delta})\wedge\tilde{1}); \qquad f\lceil\tilde{\mathbf{x}}\rfloor \equiv f_I((\tilde{x}+\tilde{\delta})\wedge\tilde{1},(\tilde{y}-\tilde{\delta})\vee\tilde{0}).$$

Proposição 5.5.1. *Considerando $f_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$, $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2) \in \tilde{U}$ e $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{U}^2$. Se f_I verifica ambas as propriedades, $1-$ligar isotonicidade e $2-$lugar antimonotonicidade, então:*

$$\Delta_f(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}) \;=\; (f\lfloor\tilde{\mathbf{x}}\rceil - f(\tilde{\mathbf{x}})) \vee (f(\tilde{\mathbf{x}}) - f\lceil\tilde{\mathbf{x}}\rfloor). \tag{125}$$

Prova. *Segue da Proposição3.1.2, considerando as funções projeção em $\tilde{U}$.*

Sejam os parâmetros $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$, e os pontos $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n$, nas seguintes proposições. A seguir, consideram-se os principais resultados de Robustez baseado na representabilidade Negação Fuzzy Intuicionista usando a δ-sensibilidade.

Proposição 5.5.2. *Sejam os operadores $D_I, E_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ conectivos A-IFD e A-IFE, $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2) \in \tilde{U}$ e $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{U}^2$, então as seguintes igualdades são verificadas:*

$$\Delta_{D_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}) \;=\; (D_I\lceil\tilde{\mathbf{x}}\rfloor - D_I(\tilde{\mathbf{x}})) \vee (D_I(\tilde{\mathbf{x}}) - D_I\lfloor\tilde{\mathbf{x}}\rceil); \tag{126}$$

$$\Delta_{E_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}) \;=\; (E_I\lceil\tilde{\mathbf{x}}\rfloor - E_I(\tilde{\mathbf{x}})) \vee (E_I(\tilde{\mathbf{x}}) - E_I\lfloor\tilde{\mathbf{x}}\rceil). \tag{127}$$

Prova. *Segue da Proposição 5.5.1.*

Prova. *Para todo $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^n$, tem-se que:*

$$\begin{aligned}
&\Delta_{(f_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \\
&= \Big(r_{\tilde{U}}(\Delta_{(f_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta), l_{\tilde{U}}(\Delta_{(f_I)_{N_{SI}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)\Big) \text{ pelas Eqs.(66)(67) e Eq.(102)} \\
&= \Big(\Delta_{r_{\tilde{U}} \circ f_I}(r_{\tilde{U}} \circ N_I(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}} \circ N_I(\delta)), \Delta_{l_{\tilde{U}} \circ f_I}(l_{\tilde{U}} \circ N_I(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}} \circ N_I(\delta))\Big) \\
&= \Big(\Delta_{r_{\tilde{U}} \circ f_I}(l_{\tilde{U}}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}}(\delta), \Delta_{l_{\tilde{U}} \circ f_I}(r_{\tilde{U}}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}}(\delta))\Big) \text{ pelas Eqs.(50)} \\
&= (r_{\tilde{U}}(\Delta_{f_I}(N_I(\tilde{\mathbf{x}}), N_I(\delta)), l_{\tilde{U}}(\Delta_{f_I}(N_I(\tilde{\mathbf{x}}), N_I(\delta))) \text{ pelas Eqs.(66)(67)} \\
&= N_{SI}\left(\Delta_{f_I}(N_{SI}(\tilde{\mathbf{x}}), N_{SI}(\delta))\right) \text{ pelas Eqs.(97) (98).}
\end{aligned}$$

Assim, conclui-se que a Eq.(126) e verificada. Da mesma forma prova-se a Eq.(127), referente a construção dual.

Proposição 5.5.3. *Sejam os operadores $D_I(E_I) : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ conectivos de (co)diferença fuzzy representáveis dadas pela Eq.(85a) Eq.(85b). Sempre que $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$ e $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \tilde{U}^2$ a δ-**sensibilidade de** D_I **no ponto** $\tilde{\mathbf{x}}$ é definida pela expressão*

$$\Delta_{D_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}) \;=\; (\Delta_D(l_{\tilde{U}}(N_S(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2), \delta_1), \Delta_D(r_{\tilde{U}}(N_S(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2)), \delta_2))\,; \tag{128}$$

*Analogamente, a δ-**sensibilidade de** E_I **no ponto** $\tilde{\mathbf{x}}$ é definida pela expressão*

$$\Delta_{E_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}) \;=\; (\Delta_E(l_{\tilde{U}}(\mathbf{x}_1, N_S(\mathbf{x}_2)), \delta_1), \Delta_E(r_{\tilde{U}}(\mathbf{x}_1, N_S(\mathbf{x}_2))), \delta_2)\,. \tag{129}$$

Prova. *Sejam $D_I, E_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ os operadores de diferença e co-diferença representáveis em $\tilde{U}$ dados pelas Eq.(85a) Eq.(85b) e N_S a negação padrão. Então, seguem as seguintes*

igualdades:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{D_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}) = \\
&= \sup\{|D_I(\tilde{\mathbf{x}}) - D_I(\tilde{\mathbf{y}})| : \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^2 \text{ e } \bigvee(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1 \text{ e } \bigwedge(r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\} \\
&= \sup\{|D_I((x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})) - D_I((y_{11}, y_{12}), (y_{21}, y_{22}))| : \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^2 \text{ e } \\
&\qquad \bigvee(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1 \text{ e } \bigwedge(r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\} \\
&= \sup\{|((D(x_{11}, N_S(x_{22}), N_S(D(N_S(x_{12}), x_{21})) - (D(y_{11}, N_S(y_{22})), N_S(D(N_S(y_{12}), y_{21})| : \\
&\quad \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^2 \text{ e } \bigvee(l_{\tilde{U}^n}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1 \text{ e } \bigwedge(r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\} \ \ pelas\, Eq.(\ 85) \\
&= \sup\{|l_{\tilde{U}^2}(D_I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) - l_{\tilde{U}}(D_I(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2))| : \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^2 \text{ e } \bigvee(l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_1\}, \\
&\quad \sup\{|r_{\tilde{U}^2}(D_I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) - r_{\tilde{U}}(D_I(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2))| : \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^2 \text{ e } \bigwedge(r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}), l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{y}})) \leq \delta_2\}) \\
&= (\Delta_D(l_{\tilde{U}}(\mathbf{x}_1, N_S(\mathbf{x}_2)), \delta_1), \Delta_D(r_{\tilde{U}}(\mathbf{x}_1, N_S(\mathbf{x}_2)), \delta_2)) \ \ pelas\, Eq.(\ 37).
\end{aligned}
$$

Portanto, para todo $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{U}^2$*, pela Eq. 128, tem-se que:*
$(i) l_{\tilde{U}^2}(\Delta_{D_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta})) = \Delta_D(l_{\tilde{U}}(\mathbf{x}_1, N_S(\mathbf{x}_2)), \delta_1)$; *e*
$(ii) r_{\tilde{U}^2}(\Delta_{D_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_D(r_{\tilde{U}}(\mathbf{x}_1, N_S(\mathbf{x}_2)), \delta_2)$.
De forma análoga, a Eq. (129) também pode ser provada:
$(iii) l_{\tilde{U}^2}(\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_S(l_{\tilde{U}}(\tilde{\mathbf{x}}), \delta)$, *e*
$(iv) r_{\tilde{U}^2}(\Delta_{S_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)) = \Delta_T(r_{\tilde{U}}(\tilde{\mathbf{x}}), \delta)$.

O diagrama comutativo abaixo resume os principias resultados provados nas Proposições 5.5.2 e 5.5.3: a análise da robustez de conectivos A-IFDs e A-IFEs representáveis na abordagem intuicionista podem ser obtida pela análise da robustez dos conectivos em seus argumentos, sendo estes determinados pelas correspondentes funções-projeção em $\tilde{U}$:

$$
\begin{array}{ccc}
(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}) & \xrightarrow{Eq.\ (5.5.1)} & \Delta_{D_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}) \\
\Big\downarrow Eqs.(66)(67) & & Eqs.(66)(67) \Big\downarrow \\
(r_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}), l_{\tilde{U}^2}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta})) & \xrightarrow{Eqs.\ (126)(127)} & (\Delta_{l_{\tilde{U}} \circ D_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}), \Delta_{r_{\tilde{U}} \circ D_I}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\delta}))
\end{array}
$$

Figura 8: Operador de robustez na classe das A-IFDs representáveis em $\tilde{U}$.

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A principal contribuição deste trabalho é a colaboração no estudo da robustez de operadores da lógica fuzzy intuicionista, levando em consideração a metodologia de avaliação da sensibilidade ponto a ponto de conectivos fuzzy, como proposto em (LI, 2011) e extendida em (REISER; BEDREGAL, 2012).

Este estudo tem muitas aplicações, obtendo significativa relevância no reconhecimento de padrões, aprendizagem de máquina e diagnóstico médico.

A análise da robustez, onde considera-se a definição da δ-sensibilidade dos operadores de (co)diferença fuzzy intuicionista foca em componentes ponto a ponto, obtidos pelas projeções das funções de pertinência e não-pertinência.

Este estudo contribui para uma análise mais detalhada da estabilidade em sistemas flexíveis que usam as regras fuzzy intuicionistas como base do sistema de inferência.

Várias definições e propriedades dos conectivos fuzzy intuicionistas foram estudadas, como: monotonicidade, construção dual e conjugada. Análises também foram realizados no decorrer do trabalho, como da sensibilidade de operadores, sensibilidade de funções monotônicas e isotônicas em ambos argumentos, sensibilidade dos operadores de diferença e análise da sensibilidade nas construções duais e conjugadas dos operadores fuzzy.

Esta dissertação teve como meta principal o estudo do operador de (co)diferença fuzzy e de (co)diferença fuzzy intuicionista, juntamente com o estudo da análise da δ robustez agindo sobre esses operadores.

A **Análise da Robustez** levou a resultados importantes, resumidos abaixo:

(i) A principal contribuição deste trabalho na análise da robustez foi focada nos operadores de diferença fuzzy e co-diferença fuzzy, com ênfase na análise da δ-sensibilidade ponto a ponto, como proposto no trabalho de (LI; WANG; CHEN, 2010). Entretanto, também foram apresentados interpretações e estudos de outros conectivos fuzzy, como negações, t-normas e t-conormas, (S,N)-implicações e (T,N)-coimplicações.

(ii) A outra relevante contribuição foi estender esta análise de robustez para os correspondentes operadores de diferença fuzzy e co-diferença fuzzy representáveis em $\tilde{U}$. Os principais resultados desta análise da robustez de conectivos A-IFDs e A-IFEs

representáveis na abordagem intuicionista mostram que a robustez pode ser obtida a partir de seus argumentos, sendo estes determinados pelas correspondentes funções-projeção em $\tilde{U}$. Desta forma, os estudos consolidados em trabalhos relacionados a abordagem fuzzy podem ser aplicados quando da extensão para a abordagem fuzzy intuicionistas.

O estudo da **Dualidade de Conectivos Fuzzy** também foi centrado na análise de propriedades em três classes de operadores Dif diferença fuzzy intuicionista introduzidos em (HUAWEN, 1987).

Estes estudos embasaram a definição das correspondentes classes dos operadores duais $CoDif$ que foram introduzidas neste trabalho, e contribuíram para compreensão do comportamento dual e extensão intuicionista das análises da robustez para operadores de diferença e co-diferença. O trabalho considerou o uso de geradores nas estruturas destas classes, onde pode-se verificar a construção e prova de propriedades dos operadores.

Também na **Geração de Funções Conjugadas**, buscou-se enfatizar a ação de automorfismos sobre operadores de diferença e co-diferença fuzzy, que preservam as mesmas propriedades das classes destes conectivos fuzzy. E ainda, os operadores de diferença e co-diferença comutam com o operador de conjugação.

Como trabalhos futuros podemos destacar da δ-sensibilidade fuzzy baseada em regras fuzzy intuicionistas em outros conectivos fuzzy intuicionistas, incluindo a extensão do estudo da robustez de R-(co)implicações.

Outra linha de pesquisa a ser abordada é o comportamento da robustez do operador de (co)diferença simétrica fuzzy e fuzzy intuicionista. A diferença simétrica de dois conjuntos é o conjunto de elementos que estão em um dos conjuntos, e não em sua interseção, deste modo uma análise do comportamento da robustez da diferença simétrica poderia nos trazer resultados diferentes aos encontrados e reforçar o estudo da $delta$-sensibilidade ponto a ponto.

REFERÊNCIAS

ALSINA, C.; TRILLAS, E. On the symmetric difference of fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.181–194, 2005.

ALSINA, C.; TRILLAS, E. On the difference of fuzzy sets. **International Journal of Intelligent Systems**, [S.l.], v.23, n.3, p.355–363, 2008.

ANGELOV, P. Optimization in an intuitionistic fuzzy environment. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.86, p.299–306, 1997.

ATANASSOV, K. **Intuitionistic fuzzy sets**: theory and applications. [S.l.]: Physica-Verlag, 1999. (Studies in fuzziness and soft computing).

ATANASSOV, K.; GARGOV, G. Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.31, n.3, p.343–349, 1989.

ATANASSOV, K.; GARGOV, G. Elements of Intuitionistic Fuzzy Logic. **Fuzzy Sets and Systs.**, [S.l.], v.9, n.1, p.39–52, 1998.

ATANASSOV, K. T. Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.20, p.87–96, 1986.

ATANASSOV, K. T. New Operations Defined Over the Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.61, n.2, p.137–142, 1994.

ATANASSOV, K. T. Intuitionistic fuzzy sets: past, present and future. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais...** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.12–19.

ATANASSOV, K. T. Intuitionistic Fuzzy Implications and Modus Ponens. **Academy of Sciences**, [S.l.], v.11, n.1, p.1–5, 2005.

ATANASSOV, K. T. My Personal View on Intuitionistic Fuzzy Sets Theory. In: SOLA, H. B.; HERRERA, F.; MONTERO, J. (Ed.). **Fuzzy Sets and Their Extensions**: Representation, Aggregation and Models. [S.l.]: Springer, 2008. p.23–43. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.220).

ATANASSOV, K. T. **On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory**. [S.l.]: Springer, 2012. 1–283p. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.283).

ATANASSOV, K. T.; PASI, G.; YAGER, R. R.; ATANASSOVA, V. Intuitionistic fuzzy graph interpretations of multi-person multi-criteria decision making. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais...** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.177–182.

BACZYŃSK, M.; JAYARAM, B. (U,N)-implications and their characterizations. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.14, p.2049–2062, 2009.

BACZYŃSKI, M. On some properties of intuitionistic fuzzy implications. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais...** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.168–171.

BACZYŃSKI, M.; JAYARAM, B. (S,N)- and R-implications: A state-of-the-art survey. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.14, p.1836–1859, 2008.

BACZYŃSKI, M.; JAYARAM, B. **Fuzzy implications**. [S.l.]: Springer, Berlin, 2008. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.231).

BAETS, B. Coimplicators, The Forgotten Connectives. **Tatra Mountains Mathematical Publications**, [S.l.], p.229–240, 1997.

BALASUBRAMANIAM, J. Yager's New Class of Implications J_f and Some Classical Tautologies. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.3, p.930–946, 2007.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy com Aplicações em Biomatemática.** Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2006.

BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N.; DIMURO, G. P.; REISER, R. H. S. Interval Valued R-Implications and Automorphisms. In: **Pre-Proceedings of the 2nd Workshop on Logical and Semantic Frameworks, with Applications**. Ouro Preto: UFMG, 2007. p.82–97.

BEZDEK, J.; DUBOIS, D.; PRADE, H. (Ed.). **Fuzzy sets in Approximate Reasoning and Information Systems**. Boston, Mass., USA: Kluwer, 1999. (The Handbooks of Fuzzy Sets).

BISHOP, C. **Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics**. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2006.

BOUCHON-MEUNIER, B.; RIFQI, M.; BOTHOREL, S. Towards general measures of comparison of objects. **Fuzzy sets and systems**, [S.l.], v.84, n.2, p.143–153, 1996.

BUSTINCE, H.; BARRENECHEA, E.; MOHEDANO, V. Intuicionistic Fuzzy Implication Operators - An Expression and Main Properties. **Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.12, p.387–406, 2004.

BUSTINCE, H.; BARRENECHEA, E.; PAGOLA, M. Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal E_N-functions: Image thresholding invariant. **Pattern Recognition Letters**, [S.l.], v.29, p.525–536, 2008.

BUSTINCE, H.; BARRENECHEAA, E.; PAGOLAA, M.; FERNANDEZ, J. Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: Application to edge detection. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.13, p.1819–1840, 2009.

BUSTINCE, H.; BURILLO, P.; SORIA, F. Automorphisms, negations and implication operators. **Fuzzy Sets Systems**, [S.l.], v.134, n.2, p.209– 229, 2003.

CAI, K. Robustness of Fuzzy Reasoning and δ-Equalities of Fuzzy Sets. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.9, n.5, p.738 –750, oct 2001.

CALVO, T.; KOLESÁROVÁ, A.; KORMONÍKOVÁ; MESIAR, R. Aggregation Operators: Properties, Classes and Construction Methods. In: CALVO, T.; MAYOR, G.; MESIAR, R. (Ed.). **Aggregation Operators New Trends and Applications**. [S.l.]: Springer, 2002. p.3–106. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.97).

CELENK, M. **A Color Clustering Technique for Image Segmentation**. San Diego, USA: Academic Press Professional, Inc., 1990.

CORNELIS, C.; ATANASSOV, K. T.; KERRE, E. E. Intuitionistic Fuzzy Sets and Interval-Valued Fuzzy Sets: a Critical Comparison. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais...** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.159–163.

CORNELIS, C.; DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Classification of Intuitionistic Fuzzy Implicators: An Algebraic Approach. In: JCIS, 2002. **Anais...** JCIS / Association for Intelligent Machinery: Inc, 2002. p.105–108.

CORNELIS, C.; DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Advances and Challenges in Interval-Valued Fuzzy Logic. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.157, n.5, p.622–627, 2006.

COSTA, C. G. da; BEDREGAL, B. C.; NETO, A. D. D. Relating De Morgan triples with Atanassov's Intuitionistic De Morgan Triples via Automorphisms. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.52, p.473–487, 2011.

DESCHRIJVER, G.; CORNELIS, C.; KERRE, E. E. On the Representation of Intuitionistic Fuzzy t-Norms and t-Conorms. **IEEE-Fuzzy Systems**, [S.l.], v.12, p.45–61, 2004.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.229–248, 2005.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.229–248, 2005.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Smets-Magrez Axioms for R-implicators in Interval-Valued and Intuitionistic Fuzzy Set Theory. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.13, n.4, p.453–464, 2005.

DUBOIS, D.; OSTASIEWICZ, W.; PRADE, H. **Fuzzy Sets**: History and Basic Notions. [S.l.]: Springer, 2000.

DUBOIS, D.; PRADE, H. Fuzzy-set-theoretic differences and inclusions and their use in the analysis of fuzzy equations. **Control and Cybernetics**, [S.l.], v.13, n.3, p.129–146, 1984.

DUBOIS, D.; PRADE, H. **Fundamentals of Fuzzy Sets**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FEI, Y.; XIYANG, Y.; HONGXING, L. Fuzzy implication operators and their construction (III): FIOS constructed by triangular norms or co-triangular norms. **Journal of Beijing Normal University (Natural Science)**, [S.l.], n.39, p.606–611, 2003.

FEI, Y.; YANBIN, F.; HONGXING, L. Fuzzy implication operators and their construction (I): fuzzy implication operators and their properties. **Journal of Beijing Normal University (Natural Science)**, [S.l.], n.40, p.427–432, 2004.

FODOR, J. C. On Fuzzy Implication Operators. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.42, n.3, p.293–300, 1991.

FODOR, J. C. Contrapositive Symmetry of Fuzzy Implications. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.69, n.2, p.141–156, 1995.

FODOR, J.; ROUBENS, M. **Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994.

G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, E. K. Implications in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification and application. **International Journal of Approximate Reasoning**, [S.l.], n.35, p.55–95, 2004.

GARCIA-HONRADO, I.; TRILLAS, E. Remarks on the Symmetric Difference from an Inferential Point of View. **Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing**, [S.l.], v.24, 2015.

GOMES, L. T.; BARROS, L. C. A note on the generalized difference and the generalized differentiability. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.280, p.142–145, 2015.

HEIJMANS, H. **Morphological Image Operators.** New York, NY: Academic Press, 1994.

HERRERA, F.; MARTÍNEZ, L.; SÁNCHEZ, P. J. Managing non-homogeneous Information in Group Decision Making. **European Journal of Operational Research**, [S.l.], v.166, n.1, p.115–132, 2005.

HUAWEN, L. Difference operation defined over the intuitionistic fuzzy sets. **School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan, Shandong**, [S.l.], v.250100, 1987.

JIN, J.; LI, Y.; LI, C. Robustness of Fuzzy Reasoning via Logically Equivalence Measure. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.22, p.5103–5117, 2007.

KLEMENT, E.; MESIAR, R.; PAP, E. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.143, n.1, p.5–26, 2004.

KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. **Triangular Norms**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000.

KLIR, G. J. Developments in Uncertainty-Based Information. **Advances in Computers**, [S.l.], v.36, p.255–332, 1993.

KLIR, G. J. **Uncertainty and information Foundations of generalized Information theory**. [S.l.]: Wilwy-Interscience, 2005.

KUMAR STEINBACH M, e. T. P. **Introduction to data mining**. [S.l.]: Pearson Addison Wesley, 2006.

LI, D. Extension Principles for Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets and Algebraic Operations. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, [S.l.], v.10, n.1, p.45–58, 2011.

LI, D.-F.; WANG, L.-L.; CHEN, G.-H. Group Decision Making Methodology Based on the Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Set Generalized OWA Operator. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.18, n.6, p.801–817, 2010.

LI, D.; LI, Y.; XIE, Y. Robustness of Interval Valued Fuzzy Inference. **Information Sciences**, [S.l.], v.181, p.4754–4764, 2011.

LI, P.; FANG, S.-C. A survey on fuzzy relational equations, part I: classification and solvability. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, Hingham, MA, USA, v.8, n.2, p.179–229, 2009.

LI, Y. Approximation and Robustness of Fuzzy Finite automata. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.47, n.2, p.247–257, 2008.

LI, Y.; LI, D.; PEDRYCZ, W.; WU, J. An Approach to Measure the Robustness of Fuzzy Reasoning. **Int. J. Intell. Syst**, [S.l.], v.20, n.4, p.393–413, 2005.

LIN, L.; XIA, Z.-Q. Intuitionistic Fuzzy Implication Operators: Expressions and Properties. **Journal of Applied Mathematics and Computing**, [S.l.], v.22, p.325–338, 2006.

MAES, K.; BAETS, B. de. Commutativity and self-duality: Two tales of one equation. **Int. J. Approx. Reasoning**, New York, NY, USA, v.50, n.1, 2009.

MAKSA, G. Quasisums and generalized associativity. **Aequationes Mathematicae**, [S.l.], v.69, n.1-2, p.6–27, 2005.

MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J. Two types of implications derived from uninorms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.158, n.3, p.2612–2626, 2007.

MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J.; TRILLAS, E. A Survey on Fuzzy Implication Functions. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.15, n.6, p.1107–1121, 2007.

MITRA, S.; PAL, S. K. Fuzzy Sets in Pattern Recognition and Machine Intelligence. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.156, n.3, p.381–386, 2005.

MOLNAROVA, M.; MYSKOVA, H.; PLAVKA, J. The robustness of interval fuzzy matrices. **Linear Algebra and its Applications**, [S.l.], v.225, n.438, p.3350–3364, 2013.

NAVARA, M. Characterization of measures based on strict triangular norms. **Mathematical Analysis and Applications**, [S.l.], v.236, n.2, p.370–383, 1999.

OBERGUGGENBERGER, M.; SCHMELZER, B.; FELLIN, W. Sensitivity analysis through random and fuzzy sets. In: NAFIPS 2008 NY, 2008. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2008. DOI: 10.1109/NAFIPS.2008.4531315.

PAPA, M.; JASON, J.; SCHENOBI, S. Evaluation Controller Robustness Using Cell Mapping. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.121, p.3–12, 2001.

PEI, D. Unified full implication algorithms of fuzzy reasoning. **Information Sciences**, [S.l.], v.178, n.2, p.520–530, 2008.

PEKALA, B. Properties of Atanassov's intuitionistic fuzzy relations and Atanassov's operators. **Information Sciences**, [S.l.], v.213, p.84–93, 2012.

RAY, S. The difference, symmetric difference and α-rings of fuzzy sets. **Fuzzy sets and systems**, [S.l.], v.50, n.3, p.315–329, 1992.

REISER, R.; BEDREGAL, B. Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Implications – Construction, Properties and Representability. **Information Sciences**, [S.l.], v.28, n.1, 2013.

REISER, R.; BEDREGAL, B. Robustness on Intuitionistic Fuzzy Connectives. **Trends in Applied and Computational Mathematics**, [S.l.], v.15, n.2, p.133–149, 2014.

REISER, R.; BEDREGAL, B. R. C. Robustness on Intuitionistic Fuzzy Connectives. **TEMA – Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, [S.l.], p.1–12, 2015. accepted to be published.

REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. R. C. Robustness of N-Dual Fuzzy Connectives. In: PINTO, P. M.; COUTO, P.; SERÔDIO, C.; FODOR, J.; BAETS, B. (Ed.). **Eurofuse 2011**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p.79–90. (Advances in Intelligent and Soft Computing, v.107).

RUAN, D.; KERRE, E. Fuzzy implication operators and generalized fuzzy methods of cases. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.54, n.1, p.23–37, 1993.

RUIZ-AGUILERA, D.; TORRENS, J. Residual Implications and Co-implications from Idempotent Uninorms. **Kybernetika**, [S.l.], v.1, n.40, p.21–38, 2004.

RUIZ-AGUILERA, D.; TORRENS, J. S- and R-implications from Uninorms Continuous in $]0,1[^2$ and Their Distributivity Over Uninorms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.6, p.832–852, 2009.

SAINIO, E.; TURUNEN, E.; MESIAR, R. A characterization of fuzzy implications generated by generalized quantifiers. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.4, p.491–499, 2008.

SHEN, Z.; ZHANG, D. Symmetric difference operators on fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.30, n.1, p.5–10, 2015.

SHI, Y.; GASSE, B. V.; RUAN, D.; KERRE, E. E. On the first place antitonicity in QL-implications. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.22, p.2988–3013, 2008.

SHI, Y.; RUAN, D.; KERRE, E. E. On the characterizations of fuzzy implications satisfying $I(x,y) = I(x,I(x,y))$. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.145, p.2954–2970, 2007.

SZMIDT, E.; KACPRZYK, J. A Similarity Measure for Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Application in Supporting Medical Diagnostic Reasoning. In: ICAISC, 2004. **Anais...** Springer, 2004. p.388–393. (Lecture Notes in Computer Science, v.3070).

TIZHOOSH, H. R. Interval-Valued Versus Intuitionistic Fuzzy Sets: Isomorphism Versus Semantics. **Pattern Recognition**, [S.l.], v.41, n.5, p.1829–1830, 2008.

TORRA, V. Hesitant Fuzzy Sets. **International Journal of Intelligent Systems**, [S.l.], v.25, p.529–539, 2010.

TORRA, V.; NARUKAWA, Y. On hesitant fuzzy sets and decision. In: FUZZ IEEE 2009, 2009. **Anais...** IEEE Computer Society, 2009. p.1378–1382.

WANG, W. Q.; XIN, X. L. Distance Measure Between Intuitionistic Fuzzy Sets. **Pattern Recognition Letters**, [S.l.], v.26, n.13, p.2063–2069, Oct. 2005.

XIA, M.; XU, Z.; CHEN, N. Some hesitant fuzzy aggregation operators with their application in group decision making. **Group Decision and Negotiation**, [S.l.], v.22, n.2, p.259–279, 2013.

XU, Z. Corrigendum to Dynamic Intuitionistic Fuzzy Multi-Attribute Decision Making. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.51, n.1, p.162–164, 2009.

XU, Z.; YAGER, R. Intuitionistic and Interval-Valued Intutionistic Fuzzy Preference Relations and Their Measures of Similarity for the Evaluation of Agreement Within a Group. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, [S.l.], v.8, p.123–139, 2009.

YAGER, R. R. On the implication operator in fuzzy logic. **Information Sciences**, [S.l.], v.31, n.2, p.141–164, 1983.

YAGER, R. R. On global requirements for implication operators in fuzzy modus ponens. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.106, n.1, p.3–10, 1999.

YAGER, R. R. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning. **Information Sciences**, [S.l.], v.167, n.1–4, p.193–216, 2004.

YING, M. Perturbation on fuzzy reasoning. **IEEE Transaction on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.7, p.625–629, 1999.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, [S.l.], v.8, n.3, p.338–353, 1965.

ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I. **Information Sciences**, [S.l.], v.8, n.3, p.199–249, 1975.

ZANOTELLI, R. M. **ConsolidaÃ§Ã£o do estudo da robustez de operadores fuzzy considerando a abordagem intuicionista**. [S.l.]: PPGC/UFPEL, 2015. 1–81p.

ZANOTELLI, R. M.; REISER, R. H. S.; CAVALHEIRO, S. C.; FOSS, L. Sensitivity and Dual Constructions on the Fuzzy f-XOR Class. In: WORSHOP-SCHOOL ON THEORETICAL COMPUTER SCIENCE (WEIT 2013) - IEEE CONF. PUBLICATIONS, 2013. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2013. p.105–110. DOI: 10.1109/WEIT.2013.13.

ZANOTELLI, R. M.; REISER, R. H. S.; CAVALHEIRO, S. C.; FOSS, L.; BEDREGAL, B. Towards Robusteness and Duality Analysis of Intuitionistic Fuzzy Aggregations. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ IEEE 2015) - ISTANBUL TURKEY, 2015. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2015.

ZANOTELLI, R. M.; REISER, R. H. S.; COSTA CAVALHEIRO, S. A. da; FOSS, L.; BEDREGAL, B. R. C. Robustness on the fuzzy f-Xor Class: Implication, bi-implications and dual constructions. In: COMPUTING CONFERENCE (CLEI), 2014 XL LATIN AMERICAN, 2014. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2014. p.1–8.

ZHANG, L.; CAI, K. Optimal fuzzy reasoning and its robustness analysis. **Journal of Intelligent Systems**, [S.l.], v.19, n.11, p.1033–1049, 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Centro de Desenvolvimento Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Computação

Dissertação

Diferença Fuzzy Intuicionista: Robustez, Dualidade e Conjugação

WILSON ROBERTO DA SILVA CARDOSO

Pelotas, 2016