



Encontro Gaúcho de Educação Matemática

A Educação Matemática do presente e do futuro:
resistências e perspectivas

21 a 23 de julho de 2021 - UFPel (Edição Virtual)

CONCEITOS ALGÉBRICOS NO ENSINO DOS ANOS INICIAIS: HISTÓRIA E PERSPECTIVAS

Nataliya Malska¹

Circe Mary Silva da Silva²

Eixo: 03 – Cultura, Etnomatemática, História da Matemática e da Educação Matemática

Modalidade: Comunicação Científica

Categoria: Aluna de Pós-Graduação

Resumo

O presente estudo faz parte de um projeto de mestrado, em fase inicial de desenvolvimento, que tem como objetivo investigar como professores dos anos iniciais do ensino fundamental compreendem o pensamento algébrico e que estratégias ou processos de ensino é possível mobilizar para introduzir atividades algébricas aos alunos desse nível de ensino. Neste texto, apresentamos uma introdução à pesquisa em andamento, que usa a pesquisa bibliográfica para buscar indícios de como algumas noções algébricas foram apresentadas em livros de álgebra de Newton, Descartes e Euler. Constatou-se que eles entenderam a álgebra como uma aritmética generalizada. A proposta investigativa voltada para os primeiros anos de ensino segue o referencial teórico de Davydov. Incluímos algumas reflexões teóricas sobre o pensamento algébrico e de proposta de como incluí-lo nos primeiros anos do ensino fundamental conforme propõe Davydov.

Palavras-chave: Educação algébrica; Anos Iniciais; Educação Matemática.

Introdução

Um dos grandes desafios que a educação matemática enfrenta, atualmente, é definir os saberes matemáticos que a escola inicial deve oportunizar para garantir aos estudantes que eles adquiram competências que lhes possibilitem se expressarem, partilharem informações, experiências e ideias em diferentes contextos. Outro desafio é possibilitar que haja professores com formação suficiente para ensinar tais saberes nos anos iniciais.

A introdução de conceitos algébricos é muito recente no ensino dos anos iniciais e nos livros didáticos de matemática para os primeiros anos ensino fundamental brasileiro, como

¹ Universidade Federal de Pelotas: n_malska@yahoo.com.br.

² Universidade Federal de Pelotas: circe.dynnikov@ufpel.edu.br.



indicam algumas pesquisas (Santos, 2013; Prestes, 2014; Beck e Silva, 2019; Silva e Ciríaco, 2020). Segundo Nacaratto e Custódio (2018, p. 9), foi a partir de 2012, com o documento:

Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental” que se identifica “[...] pela primeira vez, nas discussões curriculares nacionais, a presença da álgebra nos anos iniciais, com o propósito de desenvolver o pensamento algébrico.

Além disso, Beck e Silva (2019) afirmam que, segundo o NCTM³ de 2000, há alguns anos a álgebra aparecia nos anos finais da educação elementar em grande parte dos países do mundo todo. Entretanto, isso começou a mudar e ela é, atualmente, objeto de estudo desde os anos iniciais de escolaridade.

Na Rússia, nos livros didáticos aprovados pelo ministério da educação da Federação Russa e usados nas escolas dos anos iniciais, os conceitos da álgebra são introduzidos no primeiro ano escolar e, no segundo ano, os alunos já estariam aptos a resolver equações simples com números naturais no campo aditivo (DAVYDOV, 2012). Abordaremos, no presente texto, os motivos que permitem que, já nos primeiros dois anos iniciais, as crianças russas adquiram tais habilidades e a explicação está na metodologia adotada, que se apoia numa perspectiva do ensino desenvolvimental. Davydov entende ensino desenvolvimental como todo ensino que

[...] está orientado em alguma medida para o desenvolvimento ou aperfeiçoamento da consciência e da personalidade do aluno. Uma atividade de estudo completa cria e desenvolve propositalmente nos alunos as bases da consciência e do pensamento teórico, favorece o desenvolvimento de sua personalidade” (DAVYDOV, 1999, p. 5).

A ênfase pouco significativa no ensino de álgebra nos anos iniciais, no Brasil, talvez tenha sido a razão da inclusão dessa disciplina na proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada em 2017. Em tal documento, a sugestão é de que a introdução da álgebra aconteça já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, com a determinação de conteúdos mínimos a serem ensinados. Apenas no terceiro ano está previsto que se use a relação de igualdade entre dois termos para mostrar que, se adicionarmos ou subtrairmos um mesmo número, essa igualdade não se altera; e, também, para determinar um número

³ NCTM – Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Tradução portuguesa dos Principles and Standards for Mathematics. APM, Lisboa, 2008.



desconhecido que torne verdadeira uma igualdade que envolva as operações fundamentais com números naturais (Brasil, 2017). Ainda segundo essas prescrições oficiais, para o quinto ano, uma das habilidades indicada é:

Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (BRASIL, 2017, p. 295)

A restrição para que não sejam usadas letras para expressar regularidades, não traz qualquer justificativa plausível.

A seguir, apresentamos, a partir da análise de livros escritos por Descartes, Newton e Euler, uma síntese histórica de como noções algébricas foram entendidas por matemáticos dos séculos XVII e XVIII. A fim de apontar algumas perspectivas de novas abordagens do ensino de álgebra, as autoras desta investigação analisaram alguns livros russos recomendados para o ensino dos anos iniciais e estudaram as pesquisas sobre ensino desenvolvimental de Davydov.

Revisitando os autores clássicos

A gênese do conceito de equação do primeiro grau reside na ideia de tratar, num problema matemático, uma quantidade desconhecida como se ela fosse conhecida. Os egípcios, sem ainda possuírem uma notação simbólica, utilizavam o termo “ahá” para expressar um termo desconhecido num problema. Posteriormente – no século XVII – René Descartes e Isaac Newton utilizaram o “x” com esse mesmo significado. A regra da falsa posição dos egípcios consistia em supor um “falso” número para substituir o termo desconhecido numa igualdade. Para entender a regra, consideremos, o seguinte problema: Um número mais a sua metade é igual a 24. Qual é esse número? Escolhemos um número qualquer como o “falso” número, por exemplo, 4; a sua metade é 2; 4 adicionado a 2 dá como resultado 6. Qual o número que devo multiplicar por 6 para obter 24? A resposta é 4, assim, $4 \times 4 = 16$ e 16 é o número procurado, já que ele verifica a situação dada $16 + 16/2 = 24$. O número falso tem a mesma função que um símbolo, como o “□”, ou uma letra, como x, uma vez que tomo o desconhecido como conhecido e opero com ele.

Não é objetivo do presente trabalho apresentar o desenvolvimento do conceito de equação ao longo da história, mas, mas é ilustrativo trazer pelo menos um exemplo de como



esse objeto matemático começou a ser proposto como um conhecimento objeto de ensino. Embora há muitos séculos problemas matemáticos tenham sido resolvidos com auxílio de um pensamento algébrico, demorou muito tempo para que um simbolismo universal fosse criado e a generalização fosse obtida – não mais a resolução de equações particulares, mas métodos para se resolver equações mais gerais. Foi a partir da contribuição de muitos matemáticos, entre eles Viète, Descartes e Newton, que a álgebra começou a se constituir com uma área da matemática.

No outono de 1683, Newton registrou o ensino ministrado em notas de aula, que foram publicadas em um livro - *Arithmetica Universalis*. A distinção entre a Aritmética e a Álgebra é explicada por ele da seguinte maneira:

Cálculos são realizados ou por meio de números, como é comum em aritmética, ou por meio de variáveis gerais, como é o hábito de matemáticos analistas. Ambos os tipos se baseiam nos mesmos fundamentos e estão direcionados ao mesmo fim; os procedimentos aritméticos são realizados, efetivamente, por uma abordagem determinada e particular, mas os algébricos avançando de um modo indeterminado e universal [...] (NEWTON, 1972, p. 539).

Essa distinção entre o particular e o universal, entre um número determinado e um número indeterminado é o que caracteriza, de acordo com o autor, o tipo de procedimento usado na aritmética e que, segundo ele, difere daquele usado na álgebra. Também segundo ele, a aritmética, em todas as suas operações, tinha um papel instrumental para a álgebra mas para se inteirar da álgebra, era necessário primeiro entender os símbolos da aritmética.

Newton começava com a apresentação do significado dos símbolos (0, 1, 2, 3, 4,) e o sinal de igualdade e, afirmava que, usualmente, se designa por letras quantidades desconhecidas ou indeterminadas para distingui-las das conhecidas. Para ele, as equações eram coleções de quantidades iguais entre si ou efetivamente iguais a nada (zero). René Descartes, assim como Newton, partia da ideia de que o desconhecido deveria ser tratado como conhecido, embora ele tenha partido de um problema geométrico para expor o conceito de equação. Exprimir a mesma quantidade de duas maneiras, ou seja, usar a igualdade para expressar essa relação entre quantidades quaisquer, quer fossem conhecidas quer fossem desconhecidas, estava no cerne do pensamento algébrico à época. As últimas letras do alfabeto foram escolhidas por Descartes para representar as quantidades desconhecidas e as



primeiras, para aquelas conhecidas.

Leonard Euler, no século XVIII, em seu livro *Introdução à Álgebra* escreveu:

[...] o principal objeto da álgebra, bem como de todos os outros ramos da matemática, é determinar o valor das quantidades desconhecidas, e isto é obtido considerando atentamente as condições dadas, que são sempre expressas por números conhecidos, por essa razão ela pode ser definida como “a ciência que ensina como determinar quantidades desconhecidas por meio daquelas que são conhecidas”. (EULER, 1840, p. 186)

Essa breve síntese mostra o tratamento dispensado à introdução da álgebra por matemáticos que tiveram um papel fundamental no desenvolvimento da matemática nos séculos XVII e XVIII. Suas ideias apenas esboçadas aqui permitem inferir que a álgebra era uma generalização da aritmética. Assim, o pensamento algébrico diferia do aritmético por aquele ser mais geral que este. Essa separação entre aritmética e álgebra manteve-se no ensino por séculos. Entretanto, no século XX, psicólogos e pedagogos passam a refletir sobre a questão e experimentam uma fusão do ensino de ambas áreas da matemática.

Discussões e propostas pedagógicas do século XX

O desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos nos anos iniciais do ensino, não é particularmente uma ideia nova. Por exemplo, na China e na Rússia, conceitos algébricos foram introduzidos para alunos do ensino fundamental nos anos 1950 e 1960 (CAI; HOWSON; 2013). Na última década, no entanto, em vários países, tem havido uma maior ênfase e uma aceitação mais ampla das vantagens do desenvolvimento das ideias algébricas dos alunos nos anos iniciais, e este novo grau de aceitação é refletido em uma série de documentos políticos influentes. Por exemplo, no currículo chinês, os alunos do ensino fundamental são convidados a resolver problemas usando duas abordagens: uma aritmética, que não envolve variáveis, e uma algébrica, com variáveis. Essa prática tem o propósito de auxiliar os alunos a desenvolverem precocemente maneiras de pensar sobre a resolução de problemas. Outro exemplo sobre o currículo de matemática em Cingapura é o de fornecer uma ampla variedade de experiências para ajudar as crianças a desenvolver o pensamento algébrico, utilizando o modelo de "métodos" ou "pictórica" ou "equações" para analisar partes e todos, generalizar e especificar, fazer e desfazer (HOWSON; CAI, 2013).

Lins e Gimenez (1997) discutiram amplamente sobre o pensamento algébrico no livro



Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI. Após apresentar diferentes concepções do que seria pensamento algébrico, trouxeram para debate a proposta de V. V. Davydov, que formulou um ponto de partida para a atividade algébrica, qual seja, começar pela atividade de lidar com relações quantitativas.

Davydov e o pensamento algébrico

Vasily Vasilievich Davydov (1930 - 1998), psicólogo russo, escreveu vários livros onde propôs sua teoria desenvolvimentista; para ele “a questão central da aprendizagem escolar é o desenvolvimento mental dos alunos por meio do ensino e da educação, que ocorre com a cooperação entre adultos e crianças na atividade de ensino” (LIBÂNEO, 2004, p. 14).

Para Davydov na primeira série do ensino fundamental, a ênfase deve residir na construção do número inteiro, mas paralelamente, o aluno precisa ser estimulado a realizar medições com o auxílio da régua graduada em centímetros, com o objetivo de comparar medidas de comprimento. Em recentes pesquisas sobre o ensino desenvolvimental, Silveira (2012 p. 107) concluiu que: “o fundamento em Davydov são as relações entre grandezas discretas e contínuas”; e Rosa (2012), que Davydov não permite o distanciamento das significações aritméticas e algébricas, além de incluir as significações geométricas.

Davydov e sua equipe produziram livros didáticos de ensino de matemática para os anos iniciais e livros para professores. Uns e outros continuam a ser usados nas escolas do ensino fundamental que têm base na teoria de Davydov e seus colaboradores de pesquisa. Segundo as experiências de ensino, baseados nas teorias psicológicas de Vygotsky, surgiram as pesquisas em paralelo, como a de Elkonin e Davydov, que buscam concretizar as hipóteses do Vygotsky.

A meta de Davydov era buscar a generalização do simbolismo algébrico desde o primeiro ano de ensino. Desenvolver a capacidade de generalizar o pensamento algébrico, segundo este autor, é a base do ensino desenvolvimental. A introdução das medidas, das desigualdades deve acontecer já no primeiro ano. Ele recomenda a operar com objetos reais ao ensinar matemática, pois é preciso revelar para as crianças quais são as propriedades dos objetos, que é uma característica quantitativa. As crianças comparam os objetos em termos de parâmetros como comprimento, volume, área, intervalo de tempo etc. Ou seja, é essa ação que

esconde que a relação existente entre eles é de “igual”, “maior” ou "menor" e estas são as leis que as regem. Portanto, já no primeiro ano ele sugere o estudo do tema: comparação das quantidades. (DAVYDOV, 1962)

A fim de desenvolver o pensamento algébrico, o objetivo das aulas é ensinar as crianças a destacar as quantidades e fazer a equalização ou separação de itens para uma tarefa: “escolha isto...”, “faça o mesmo...” E, ainda no primeiro ano, as anotações podem ser feitas, usando as letras. Vejamos alguns exemplos presentes no livro do coletivo de autores Davydov, Gorbov, Mikulina e Saveliena:

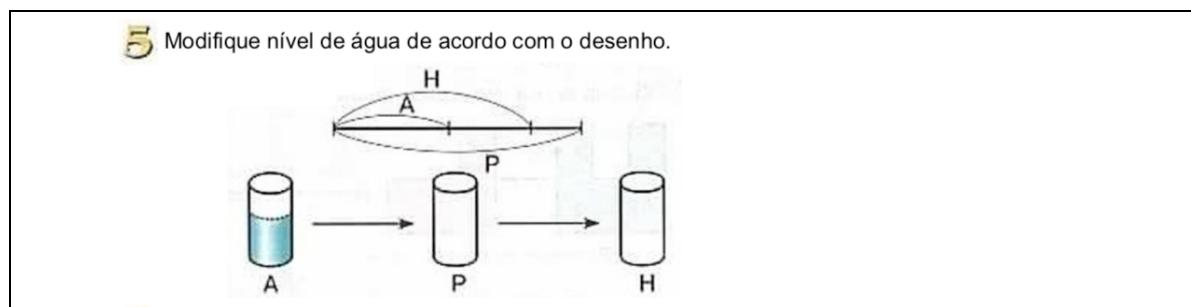


Figura 1: Comparação de medidas com o uso de letras

Fonte: Davidov, V. V.; Gorbov, S.F.; Mikulina, G.G.; Savelieva, O. V. Matemática. 1º ano. 2012, p. 26

Outro exemplo, na Figura 2, trata de grandezas de massa. Solicita que os alunos realizem uma atividade de comparação das massas dos animais, com o emprego de letras.



Figura 2: Associação entre a massa de animais usando letras

Fonte: Davidov, V. V.; Gorbov, S.F.; Mikulina, G.G.; Savelieva, O. V. Matemática. 1º ano. 2012, p. 27

A utilização dos símbolos “<”, “>”, “=” também é introduzida no primeiro ano escolar, por exemplo, com atividades do tipo da figura 3.

Complete o desenho de acordo com a notação.

$A < M$

$C > T$

$H \neq Y$

Figura 3: Compreensão dos símbolos de igualdade e desigualdade

Fonte: Davidov, V. V.; Gorbov, S.F.; Mikulina, G.G.; Savelieva, O. V. Matemática. 1º ano 2012, p. 31

O objetivo principal é, segundo Davydov (1962), a partir de tarefas como a da Figura 3, desenvolver nas crianças os conceitos relacionais de igualdade e desigualdade, que operaram com características quantitativas de uma forma generalizada e com simbologia de letras. Ao realizar estes estudos em sala de aula, foi constatado por Davydov, que alunos conseguiam operar com letras, entendendo as relações quantitativas de objetos, sabiam relacionar os objetos e anotavam quem era maior ou menor. Além disso, eles sabiam anotar a relação e analisá-la, o que permitiu o desenvolvimento intelectual de realizar análises a partir das atividades. Estes exemplos de questões feitas no primeiro ano e os resultados obtidos de um bom desempenho dos alunos ao lidar com relações quantitativas nesta etapa mostram que os alunos na idade de 7 a 8 anos são intelectualmente capazes de entender as quantidades e suas relações sem usar números nem operações comuns de aritmética de soma e subtração.

A análise investigativa de Damazio e Rosa (2012, p. 27) sobre as ideias de Davydov (1999) na especificidade da matemática levaram os autores a concluir que:

[...] o objetivo/finalidade de Davydov e seus colaboradores é que, ao finalizar o ensino fundamental, o estudante tenha formado uma concepção autêntica e completa do número real, com base no conceito de grandeza (comprimento, área, volume, massa, etc.), na inter-relação entre aritmética, geometria e álgebra.

Atualmente, em muitas escolas da Federação Russa, em que utilizam o ensino desenvolvimental, constata-se que é possível ensinar noções de álgebra desde o início da escolarização. Os livros didáticos escritos para tal ensino, como das Moro, Volkova e



Ctepanova (2011), continuam a ser utilizados no ensino fundamental da Federação Russa. (SILVA, 2018)

Considerações Finais

Os clássicos textos de Descartes, Newton e Euler revelam o grande potencial da álgebra para resolver problemas matemáticos. Embora tenham entendido a álgebra como uma aritmética generalizada, aritmética e álgebra permaneceram como disciplinas isoladas, sendo ensinadas separadamente. Nas décadas de 1950 e 1960, Davydov(1962) e sua equipe mostraram que é possível a introdução da álgebra desde os primeiros anos de escolarização. Em outros países do mundo, experiências de introdução do ensino da álgebra no ensino fundamental têm sido realizadas como mostram as pesquisas (CAI E HOWSON, 2013). Lins e Gimenez (1997) chamaram a atenção para a necessidade de um estudo mais aprofundado sobre o significado do pensamento algébrico e lançaram algumas perspectivas para o ensino de aritmética e álgebra para o século XXI. Além disso, chamaram a atenção para os trabalhos de Davydov e seus seguidores na Rússia. Para estes dois autores o mais importante é uma mudança de perspectiva que leve a pensar em termos de desenvolver significados de conceitos e não apenas técnicas e conteúdos.

Referências

BECK, Vinicius Carvalho; SILVA, João Alberto. A relação entre conceitos algébricos formais e o ensino da álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Educar Mais**, v. 3, n. 2, 2019, p. 192-201.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Curricular Comum, <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>, 2017. Acesso em 10 de março de 2021.

CAI, J.; HOWSON, G. Toward an International Mathematics Curriculum. In: Clements; Bishop, Keitel, Kilpatrick, Leung (Ed.) **Third International Handbook of Mathematics Education**. V. 27. New York: Springer, 2013.

DAMAZIO, Ademir; ROSA, Josélia; PEREIRA, Ledina; BANHARA, Elaine. A concepção de álgebra na proposição de Davydov para o ensino de número. *Poésis*, Tubarão, v. 5, p. 280-299, jan. /Jun. 2012.



DAVYDOV, V.V. Experiência de introdução do ensino de álgebra na escola inicial [Opyt vvedeniya elementov algebry v natchalnoy chkole]. Sovetskaya Pedagogika. Moscou. n. 8, 1962.

DAVYDOV, V. V. O que é atividade de estudo. **Revista Escola Inicial**, n. 7, 1999, p. 1- 8.

DAVYDOV, V. V.; GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVELIEVA, O. V. **Matemática**. 1. Ano. Livro texto. Moscou: Vita Press, 2012.

EULER, Leonard. **Elements of Algebra**. Tradução Francis Horner. 5. ed. Londres: Printed for Longman, 1840.

LIBÂNEO, José Carlos. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**. n. 27. p. 5- 24, Set. /Out./Nov. /Dez. 2004.

LINS, Rômulo C.; GIMENES, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

NACARATTO, Adair Menezes; CUSTÓDIO, Iris Aparecida. **O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica** [livro eletrônico] Brasília. Coleção SBEM 12, 2018.

NEWTON, Issac. **The Mathematical Paper of Isaac Newton**. V. 5, 1683-1684. Cambridge: Cambridge University press, 1972.

PRESTES, Diego Barboza; GERMANO, Mara Aparecida Pedrini; FERREIRA, Márcia Praisler Pereira. **Tarefas da early algebra realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I**. Universidade Estadual de Londrina, 2014.

SANTOS, Carla Cristiane Silva. **Os Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental**. Universidade São Francisco. 2013.

ROSA, Josélia Euzébio. A primeira tarefa de estudo davydoviana na especificidade da Matemática. **XVI ENDIPE**, Campinas, p. 25-35, 2012. REIS, Otelo de Souza. **Álgebra - primeiros passos**. Rio de Janeiro, 1919. Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/159574>. Acesso em: 19 mar. 2021.



Encontro Gaúcho de Educação Matemática

Edição Virtual - 2021 - UFPel

SILVA, Circe Mary Silva. Equações nos primeiros anos do ensino fundamental em livros didáticos russos. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 7, n. 3, p. 226-251, jan.-jun. 2018.

SILVA, Danielle Abreu; Ciríaco, Klinger Teodoro. O livro didático “A conquista da Matemática” e o pensamento algébrico no ciclo de alfabetização. **Crítica Educativa**. V. 6, 2020, p. 1-23.

SILVEIRA, Gisele Mezzari. **Proposições para o ensino do sistema de numeração em Davydov**. Diss. Curso de Pós-Graduação e Especialização em Educação Matemática, Criciuma, 2012.