

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Equação do Transporte em Sistema de Águas Rasas

Gustavo Braz Kurz

Pelotas, 2024

Gustavo Braz Kurz

Equação do Transporte em Sistema de Águas Rasas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Régis Sperotto de Quadros
Coorientador: Prof. Dr. Renato Vaz Linn

Pelotas, 2024

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação da Publicação

K95e Kurz, Gustavo Braz

Equação do transporte em sistema de águas rasas [recurso eletrônico]
/ Gustavo Braz Kurz ; Régis Sperotto de Quadros, orientador ; Renato
Vaz Linn, coorientador. — Pelotas, 2024.
88 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade
Federal de Pelotas, 2024.

1. Elementos finitos. 2. Linhas características. 3. Águas rasas. 4.
Dispersão de poluentes. I. Quadros, Régis Sperotto de, orient. II. Linn,
Renato Vaz, coorient. III. Título.

CDD 511.8

Gustavo Braz Kurz

Equação do Transporte em Sistema de Águas Rasas

Dissertação requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 23 de fevereiro de 2024

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Régis Sperotto de Quadros (orientador)

Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Técnica de Darmstadt - Alemanha.

Prof. Dr. Renato Vaz Linn (Coorientador)

Doutor em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Dr. Honorio Joaquim Fernando

Doutor em Modelagem Computacional pelo Laboratório Nacional de Computação Científica.

Prof. Dr. Guilherme Jahnecke Weymar

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Há três métodos para ganhar sabedoria: primeiro, por reflexão, que é o mais nobre; segundo, por imitação, que é o mais fácil; e terceiro, por experiência, que é o mais amargo.
— CONFÚCIO

RESUMO

KURZ, Gustavo Braz. **Equação do Transporte em Sistema de Águas Rasas**. Orientador: Régis Sperotto de Quadros. 2024. 88 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2024.

Esta dissertação tem como objetivo a implementação de um método para resolver a equação de transporte em sistemas de águas rasas por meio de um programa de simulação de escoamentos. O método escolhido é a discretização de elementos finitos usando o método de Galerkin. Mais especificamente, um código é desenvolvido para simular o escoamento, utilizando o método das linhas ou direções características (**CBS - Characteristic-Based Split**). A discretização espacial é realizada com elementos finitos triangulares lineares. A dissertação também inclui uma série de estudos para validar a metodologia, abrangendo problemas bem estabelecidos na literatura sobre escoamento de águas rasas. Além disso, são conduzidas investigações adicionais para estudar a dispersão de poluentes no corpo de água, incluindo cenários de maior complexidade.

Palavras-chave: Elementos finitos. Linhas características. Águas rasas. Dispersão de poluentes.

ABSTRACT

KURZ, Gustavo Braz. **Transport Equation in Shallow Water System**. Advisor: Régis Sperotto de Quadros. 2024. 88 f. Dissertation (Masters in Mathematical modeling) – Institute of Physics and Mathematics, Federal University of Pelotas, Pelotas, 2024.

This dissertation aims to implement a method for solving the transport equation in shallow water systems using a flow simulation program. The chosen method involves finite element discretization using the Galerkin method. More specifically, a code is developed to simulate the flow, employing the method of characteristic-based split (CBS). Spatial discretization is performed using linear triangular finite elements. The dissertation also includes a series of studies to validate the methodology, covering well-established problems in the literature on shallow water flow. Additionally, additional investigations are conducted to study the dispersion of pollutants in the body of water, including scenarios of greater complexity.

Keywords: Finite element. Characteristic-Based Split . shallow water. pollutant dispersion.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Fluxograma da metodologia.	22
Figura 2	Coordenadas	25
Figura 3	Distribuição da velocidade	26
Figura 4	Diferentes sistemas utilizados	30
Figura 5	Coordenadas de área	32
Figura 6	Vetores normais.	34
Figura 7	Médias de normais em um nó k	34
Figura 8	Comprimento \bar{h} característico.	36
Figura 9	Fluxograma completo do trabalho.	46
Figura 10	Definição do domínio no GiD.	49
Figura 11	Discretização utilização elementos triangulares.	49
Figura 12	Evolução temporal da onda entre $0,1s$ e $0,4s$	50
Figura 13	Evolução temporal da onda entre $0,8s$ e $1,6s$	50
Figura 14	Evolução temporal da onda entre $3,8s$ e $4,7s$	51
Figura 15	Verificação no tempo $4,7s$	51
Figura 16	Rompimento parcial da barragem: Geometria da bacia.	52
Figura 17	Visualização da a) superfície livre tridimensional e das b) curvas de nível.	53
Figura 18	Verificação numérica da elevação de água em $t = 4,7s$ e $y = 135,5m$	54
Figura 19	Verificação numérica da velocidade U em $t = 4,7s$ e $y = 135,5m$	55
Figura 20	Volume do fluido e dimensões.	56
Figura 21	Interação do escoamento com domínio de células secas.	56
Figura 22	Interação do escoamento com lâmina de água $0.015m$	56
Figura 23	Interação do escoamento com lâmina de água $0.03m$	56
Figura 24	Domínio e disposição dos sensores.	57
Figura 25	Sensor P1 - Experimento D1.	57
Figura 26	Sensor P1 - Experimento W1.	57
Figura 27	Sensor P1 - Experimento W2.	58
Figura 28	Sensor P2 - Experimento D1.	58
Figura 29	Sensor P2 - Experimento W1.	58
Figura 30	Sensor P2 - Experimento W2.	59
Figura 31	Sensor P3 - Experimento D1.	59
Figura 32	Sensor P3 - Experimento W1.	59
Figura 33	Sensor P3 - Experimento W2.	60
Figura 34	Sensor P4 - Experimento D1.	60

Figura 35	Sensor P4 - Experimento W1.	60
Figura 36	Sensor P4 - Experimento W2.	61
Figura 37	Sensor P5 - Experimento D1.	61
Figura 38	Sensor P5 - Experimento W1.	61
Figura 39	Sensor P5 - Experimento W2.	62
Figura 40	Simulação 3D no tempo $t = 0$ s.	62
Figura 41	Comparação da simulação com a solução analítica em $t = 0$ s.	62
Figura 42	Simulação 3D no tempo $t = 4800$ s.	63
Figura 43	Comparação da simulação com a solução analítica em $t = 4800$ s.	63
Figura 44	Simulação 3D no tempo $t = 9600$ s.	63
Figura 45	Comparação da simulação com a solução analítica em $t = 9600$ s.	63
Figura 46	Distribuição da concentração para o teste de difusão em $t = 0s$	64
Figura 47	Contorno da concentração para o teste de difusão em $t = 0s$	64
Figura 48	Distribuição da concentração para o teste de difusão em $t = 7,5s$	64
Figura 49	Contorno da concentração para o teste de difusão em $t = 7,5s$	64
Figura 50	Distribuição da concentração para o teste de difusão em $t = 15s$	65
Figura 51	Contorno da concentração para o teste de difusão em $t = 15s$	65
Figura 52	Nível de concentração para o teste de difusão em $x = 0$ e $y = 0$	65
Figura 53	Nível de concentração para o teste de difusão em $x = 0,5$ e $y = 0$	65
Figura 54	Batimetria da barragem Santa Bárbara Pelotas/RS.	68
Figura 55	Simulação do escoamento na barragem Santa Bárbara Pelotas/RS.	69
Figura 56	Transporte na barragem Santa Bárbara.	69
Figura 57	Um tubo unidimensional de seção transversal variável.	77
Figura 58	Domínio do escoamento.	84
Figura 59	Discretização do domínio em elementos triangulares.	85

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	Massa específica [kg/m ³]
Ω	Domínio do problema
σ	Tensão interna [m ³ /s ²]
μ	Coefficiente de viscosidade dinâmica [Ns/m ²]
ω	Velocidade angular de rotação [s ⁻¹]
τ	Tensão de cisalhamento [m ³ /s ²]
δ_{ij}	Delta de Kronecker
η	Elevação da superfície livre [m]
χ	Coefficiente de viscosidade generalizado
Γ	Contorno do domínio
ζ_i	Vetor das forças no contorno (componente)
κ	Coefficiente de difusão [m ² /s]
ϕ	Funções de interpolação linear
v	Coefficiente de Manning
ν	Coefficiente de Coriolis
Ψ	Função de ponderação
ϵ	Resíduo
$x_{i,j}$	Coordenadas cartesianas [m]
t	Tempo [s]
$u_{i,j}$	Velocidade instantânea na direção i [m/s]
$U_{i,j}$	Vazão por unidade de largura (componente) na direção i [m ² /s]
z_i	Forças de campo (componente)
g_i	Aceleração da gravidade (componente) [m/s ²]
p	Pressão do fluido [m ³ /s ²]
p_a	Pressão atmosférica do fluido [m ³ /s ²]
h	Altura total de água [m]
H	Altura de água de referência [m]
c_d	Coefficiente de arrasto
c_m	Coefficiente de Chezy [m ^{1/2} /s]
c_w	Celeridade de onda [m/s]
V_i	Velocidade do vento (componente) na direção i [m/s]
F_{ij}	Vetor de fluxo (componente) [m ² /s]
c	Concentração instantânea na direção i [m/s]
δh	Varição arbitrária de h
δU_i	Varição arbitrária de U_i
δC	Varição arbitrária de C

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Identificação dos nós e suas coordenadas globais.	85
Tabela 2	Relação dos nós com suas coordenadas.	85
Tabela 3	Dados para o cálculo das constantes.	86

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFL	<i>Courant-Friedrichs-Lewy</i>
NUMA	<i>Non-Uniform Memory Access</i>
SIMD	<i>Single Instruction Multiple Data</i>
SMP	<i>Symmetric Multi-Processor</i>
SPMD	<i>Single Program Multiple Data</i>
FEM	<i>Finite element method</i>
CBS	<i>Characteristic-Based Split</i>
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
DNOS	Departamento Nacional de Obras e Saneamento
UFPeI	Universidade Federal de Pelotas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	18
1.1.1	Objetivos gerais	18
1.1.2	Objetivos específicos	18
1.1.3	Organização do trabalho	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1	Sistema de águas rasas	20
2.2	Simulação numérica	21
2.3	Metodologia	22
3	EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS	23
4	APROXIMAÇÃO NUMÉRICA	29
4.1	Elemento triangular linear	30
4.2	Funções de forma	33
4.3	Vetores normais	33
4.4	Integração	34
4.5	Comprimento \bar{h} característico	35
4.6	O método CBS	36
4.7	Aplicação do método CBS nas equações de águas rasas	38
4.8	Discretização da equação do transporte	42
4.8.1	Convecção no contorno:	45
4.9	Cálculo do passo de tempo	46
5	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	48
5.1	Ruptura circular de barragem	48
5.2	Rompimento parcial de barragem	51
5.3	Rompimento parcial de barragem com células secas	53
5.4	Advecção de poluentes em domínio quadrado	59
5.5	Difusão em domínio quadrado	60
5.6	Estudo de caso – barragem Santa Bárbara Pelotas/RS	62
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	70
	REFERÊNCIAS	72

APÊNDICE A	EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS . .	77
A.1	Solução unidimensional via método de elementos finitos	77
A.2	Solução bidimensional via método de elementos finitos	80
A.3	Exemplo prático da solução numérica	83

1 INTRODUÇÃO

Devido ao impacto das mudanças climáticas ao longo deste século, a elevação do nível do mar e as tempestades estão cada vez mais ameaçando áreas urbanas costeiras (CORE WRITING TEAM, H. LEE AND J. ROMERO (EDS.), 2023). As regiões urbanas próximas ao mar, oceano e rios estão enfrentando riscos crescentes de submersão. Para mitigar as consequências desses eventos e estarmos mais bem preparados para responder, é imperativo conduzir estudos de avaliação de riscos com precisão e requisitos de resolução que ultrapassem as abordagens convencionais. Em particular, é vital considerar os fenômenos relevantes, como o impacto das ondas, lidar com as incertezas que os afetam e ter a capacidade de descrever esses escoamentos complexos de maneira flexível em várias resoluções espaciais, sejam elas amplas ou minuciosas.

O escoamento de águas rasas, é um conceito importante que descreve o comportamento de fluidos em situações onde a profundidade do fluido é menor em comparação com as outras dimensões do sistema. Esse tipo de problema é caracterizado por algumas suposições simplificadoras que tornam as equações de movimento mais gerenciáveis. Para tornar mais completo o problema, pode-se acoplar a equação do transporte ao sistema de águas rasas, descrevendo a evolução de uma grandeza conservativa, como a altura da água ou a concentração de um poluente, em um escoamento de águas rasas.

A equação de águas rasas é uma forma da equação de conservação da massa para escoamentos de águas rasas e é derivada a partir das equações fundamentais da hidrodinâmica. Ela descreve como a altura da água (ou outra grandeza conservativa) varia com o tempo e a posição ao longo de um canal ou área de interesse.

Essa equação é frequentemente usada em modelagem hidrodinâmica e hidrológica para prever a propagação de cheias, a evolução de marés, a dispersão de poluentes e outros fenômenos em sistemas de águas rasas. É importante notar que esta é uma simplificação das equações completas de Navier-Stokes e é válida apenas para escoamentos, onde a variação de altura é pequena em comparação com o comprimento e a largura da região de estudo.

Hoje dispõe-se de dados e mapas com alta resolução das principais aglomerações urbanas. Embora esses dados possibilitem previsões em nível urbano, frequentemente resultam em tempos de computação consideráveis quando se aplica a um contexto operacional. Isso ressalta a importância de ter à disposição códigos de alto desempenho, geometricamente versáteis e altamente paralelos como componentes essenciais para essas aplicações (LINN, 2013). Para modelar submersões e inundações, recorre-se às equações de águas rasas, também conhecidas como as leis do equilíbrio médio de profundidade, que possuem um caráter inerentemente hiperbólico (SZMELTER; SMOLARKIEWICZ, 2010). Essas equações permitem uma notável precisão na representação da quebra e elevação das ondas e têm um grande potencial para modelar a propagação de ondas, especialmente as de longo alcance, como as ondas de tempestade e tsunamis (SZMELTER; SMOLARKIEWICZ, 2011). Além disso, esse modelo também encontra aplicações valiosas em áreas como hidrologia e meteorologia (CALEFFI; VALIANI; ZANNI, 2003).

Para abordar esses desafios com precisão, é imperativo desenvolver uma metodologia que tenha a capacidade de lidar com a propagação com extrema precisão, gerenciar características descontínuas e simular inundações em ambientes complexos, oferecendo a flexibilidade geométrica suficiente (MICHEL, 2022).

Na simulação numérica de escoamentos não permanentes, é necessário realizar duas discretizações: uma espacial e outra temporal. Dentre os métodos numéricos amplamente empregados para a discretização espacial, destacam-se o método das diferenças finitas, o método dos volumes finitos e o método dos elementos finitos (Galerkin), nos quais a discretização espacial é denominada de malha. O método das diferenças finitas se baseia na aproximação de derivadas nodais (forma diferencial), sendo uma abordagem mais simples, de fácil obtenção e implementação, além de ser eficiente computacionalmente. Por outro lado, o método dos volumes finitos se baseia na aproximação de integrais, destacando-se pelo tratamento conservativo do problema (na forma integral) e pela adaptabilidade a praticamente qualquer tipo de geometria. O método dos elementos finitos deriva de uma aproximação variacional de resíduos ponderados sobre as equações governantes (forma fração), demonstrando flexibilidade e capacidade de lidar com geometrias complexas, semelhante ao método dos volumes finitos. É importante observar que tanto o método dos volumes finitos quanto o método dos elementos finitos podem ser aplicados de forma equivalente no contexto de simulações de escoamentos (LÖHNER, 2008).

Historicamente, métodos como diferenças finitas e volumes finitos (LEVEQUE, 2002) foram amplamente utilizados para discretizar sistemas hiperbólicos, uma vez que têm a capacidade de descrever choques de maneira razoável. No entanto, estender esses métodos para alcançar maior precisão não é trivial. Devido a proximidade de ambos métodos, neste trabalho, optou-se pelo método de elementos finitos, es-

pecificamente, método de Galerkin, por atingir convergência espacial (HESTHAVEN; WARBURTON, 2008).

Os estudos na área da Dinâmica de Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics* - CFD) estão evoluindo constantemente, impulsionados em grande parte pelos avanços conjuntos nos recursos computacionais e algoritmos numéricos. Essa área desempenha um papel crucial em diversos campos da engenharia, incluindo a engenharia hídrica, civil e a meteorologia, tanto em fases de projeto quanto de pesquisa e investigação.

O uso de simulações numéricas oferece várias vantagens, como a capacidade de gerar uma quantidade considerável de dados para sustentar estudos paramétricos do problema, a flexibilidade de ajustar as simulações com a simples modificação das condições de contorno e a habilidade de simular fenômenos, efeitos e situações que seriam difíceis ou dispendiosos de reproduzir experimentalmente. No entanto, há um custo computacional elevado, que resulta em parte da necessidade de utilizar discretizações espaciais refinadas para obter resultados precisos. Além disso, a escala dos fenômenos em análise muitas vezes impõe limitações aos incrementos de tempo utilizados nas simulações. Isto se deve às restrições impostas pela física do problema sobre o algoritmo numérico e outro desafio reside na capacidade dos métodos de lidar com amplas variações de compressibilidade e velocidade, o que pode limitar o uso de determinados algoritmos em certas simulações. Logo, as restrições de simulação são limitadas em grande parte pelo processo de discretização tanto temporal quanto espacial, que devem ser estudado com cautela na elaboração do projeto.

Para a discretização espacial, existem diversas metodologias disponíveis, incluindo o método Galerkin-Descontínuo e o Método das Linhas ou Direções Características (*Characteristic Based Split* - CBS). O Método das Linhas ou Direções Características (CBS) utiliza uma transformação de coordenadas na malha que varia ao longo do tempo, alterando o comportamento das equações governantes para a discretização espacial. O método das linhas características foi desenvolvido para ser aplicável a uma ampla faixa de velocidades, abrangendo desde escoamentos subsônicos até hipersônicos, minimizando oscilações indesejadas. Embora essa abordagem possa exigir mais cálculos a cada incremento de tempo em comparação com outros métodos, sua desvantagem é compensada pela redução no número de etapas necessárias para atingir a convergência (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2011).

A solução explícita para fluidos incompressíveis usando o esquema CBS é facilitada utilizando uma dissipação artificial. Portanto, trabalhos anteriores, como (NITHIARASU, 2003) e (NITHIARASU et al., 2004), incorporaram ao método uma abordagem de tempo para calcular escoamentos de fluidos incompressíveis de forma eficiente. Esse enfoque permitiu alcançar uma solução verdadeiramente transitória. Comparações do método CBS com outras técnicas de estabilização estão disponíveis nas

referências (CODINA; ZIENKIEWICZ, 2002) e (CODINA et al., 2004). Portanto, neste trabalho, o método CBS, empregado de maneira semi-implícita. Uma formulação semi-implícita oferece a vantagem de menor custo computacional, mas pode exigir mais iterações, principalmente para escoamentos permanentes.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos gerais

O objetivo central deste trabalho é realizar o estudo da solução da equação do transporte em águas rasas utilizando o método dos elementos finitos. Além disso, pretende-se realizar simulações computacionais, abrangendo tanto casos simples quanto complexos, para analisar o comportamento da altura das ondas, velocidade do escoamento e concentração de poluentes.

1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Estudar a dedução das equações de águas rasas e compreender o sentido físico de seus termos;
- Estudar a teoria de elementos finitos;
- Estudar o método de Galerkin;
- Estudar o método CBS;
- Fazer a implementação computacional do modelo com os métodos propostos para simulação de problemas;
- Implementar uma visualização das soluções obtidas;
- Analisar o comportamento das soluções numéricas, buscando entender os diferentes tipos de erros que podem ocorrer e apresentar possíveis soluções;
- Buscar contribuir para o entendimento do escoamento das águas e poluentes na Bacia do canal Santa Bárbara Pelotas/RS.

1.1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em seis capítulos, sendo este o primeiro capítulo apresentado.

No segundo capítulo será apresentado a revisão bibliográfica a respeito dos trabalhos que vieram sendo publicados sobre as equações de águas rasas, método de

elementos finitos e o método CBS. Além disso é apresentada uma ideia geral sobre simulação numérica.

No terceiro capítulo encontra-se a dedução das equações de águas rasas, onde é apresentado toda a fundamentação teórica da simplificação das equações de Navier-Stokes.

No quarto capítulo tem-se uma fundamentação teórica do método de elementos finitos aplicado a escoamentos. É apresentado ao leitor uma base teórica e um exemplo completo de um escoamento unidimensional. Além disso, mostra-se todo o processo de construção de discretização que foi implementada neste trabalho.

No penúltimo capítulo são exibido os exemplos e casos testes realizados, todos consolidados na literatura, tanto para a validação do código produzido, quanto para o estudo dos parâmetros das simulações. São apresentados 6 problemas, cada um com seu objetivo específico de estudo desde a verificação do comportamento aonde o escoamento possui descontinuidade, até uma reflexão do fluido no contorno do domínio complexo.

Por fim, no último capítulo do trabalho, constam as conclusões e perspectivas futuras.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Sistema de águas rasas

No trabalho de (FERREIRA, 2013) há uma abordagem numérica das equações de águas rasas utilizando o método dos elementos finitos e uma discretização temporal semi-implícita, na qual ele buscou encontrar o par de elementos adequado que represente a velocidade e a elevação da onda para calcular corretamente a solução discreta. No modelo de águas rasas utilizado, foi considerado que o fluido está disposto sobre uma superfície plana, cujo atrito é desprezível.

Já (PEREIRA, 2010) desenvolveu um modelo hidrodinâmico e de transporte de escalares, utilizando as equações de águas rasas, capaz de simular os padrões de circulação e transporte de poluentes. Ele fez um estudo de caso do Rio Guaíba, localizado no estado do Rio Grande do Sul, que mostrou a potencialidade do modelo como instrumento de ajuda ao gerenciamento dos recursos hídricos e na avaliação dos impactos do lançamento de cargas poluidoras.

Desde a sua introdução em 1995 (ZIENKIEWICZ; CODINA, 1995a) e (ZIENKIEWICZ; CODINA, 1995b), o esquema CBS tem sido amplamente utilizado pelos autores e vários outros pesquisadores para resolver problemas dinâmicos de fluidos e sólidos. Esquemas estabilizados para escoamentos compressíveis e incompressíveis precisam ter estabilidade suficiente para suprimir oscilações devido à discretização padrão de Galerkin dos termos de convecção (NITHIARASU; CODINA; ZIENKIEWICZ, 2006).

Os esquemas baseados em características e os esquemas de Taylor-Galerkin são desenvolvidos usando o passo de tempo como base. O uso de esquemas característicos de Galerkin tem sido demonstrado por vários autores no passado para problemas simples de convecção-difusão (KAAZEMPUR-MOFRAD; ETHIER, 2002) e (DONEA; HUERTA, 2003a), esses métodos foram empregados para lidar com a equação completa da dinâmica de fluidos (KAAZEMPUR-MOFRAD; MINEV; ETHIER, 2003). Embora várias versões de esquemas característicos de Galerkin sejam possíveis, o esquema característico simples de Galerkin baseado em uma expansão de Taylor é

atraente devido à sua fácil implementação e sua equivalência com esquemas característicos padrão de Galerkin introduzidos por Morton em (MORTON, 1985) e (CHILDS; MORTON, 1990). A sua equivalência com outros esquemas de estabilização padrão também pode ser provada para problemas de convecção-difusão se o intervalo de tempo for adequadamente dimensionado usando velocidade e comprimento apropriados. Além dessas vantagens, o esquema de características simples de Galerkin pode ser submetido a uma forma de solução totalmente explícita utilizando uma projeção (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005). O método de projeção (CHORIN, 1967) é popular em trabalhos que lidam com fluidos incompressíveis. Além disso, há outras extensões do esquema CBS para águas rasas (ZIENKIEWICZ; ORTIZ, 1995). O esquema também foi estendido simultaneamente para resolver escoamentos em meios porosos (MASSAROTTI; NITHIARASU; ZIENKIEWICZ, 2001).

2.2 Simulação numérica

A simulação numérica de escoamentos em águas rasas é uma ferramenta importante da modelagem computacional usada para prever e entender o comportamento da água em sistemas onde a profundidade da água é muito menor em comparação com outras dimensões da região, como rios, canais, lagos, estuários e áreas costeiras. Essas simulações são valiosas para uma variedade de aplicações, incluindo previsão de inundações, gerenciamento de recursos hídricos, engenharia costeira e estudos ambientais. As equações de águas rasas é uma simplificação das equações de Navier-Stokes. Essas equações descrevem a conservação da massa e do momento linear em uma região de interesse e para resolvê-las, em situações do mundo real, é necessário usar métodos numéricos.

O método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos volumes finitos são comumente utilizados para discretizar as equações e calcular as soluções numéricas das equações, na qual a escolha destes, depende da geometria utilizada, precisão requerida, facilidade de implementação e conhecimento do método.

Outro aspecto fundamental na simulação de escoamentos é a criação de uma malha computacional que divide a região de estudo em elementos menores. Essa malha é usada para calcular as variáveis do escoamento, como a altura da água e a velocidade, em pontos discretos do espaço e do tempo. Para simular escoamentos em águas rasas é necessário definir condições de contorno apropriadas, como níveis de água nas fronteiras da região de estudo.

Portanto pode-se envolver a modelagem de entradas de água, saídas, marés, chuvas e outros fatores relevantes. As simulações de escoamentos em águas rasas podem incluir a modelagem de diversos processos físicos, como a propagação de ondas, a interação com o leito do canal, a erosão e sedimentação, a influência das correntes

de maré, a difusão de poluentes, entre outros. Após a simulação, os resultados podem ser verificados, visualizados e ou analisados. Isso pode incluir a criação de gráficos, mapas de inundação, curvas de maré e outras representações visuais dos resultados. É fundamental validar e calibrar os modelos de simulação usando dados experimentais ou dados já existentes na literatura. Isso ajuda a garantir que as simulações sejam representativas e precisas. Além disso, a formulação numérica de escoamentos em águas rasas, depois de validadas, podem ser usadas de forma mais segura em uma variedade de aplicações, como previsão de enchentes, planejamento urbano, gestão de recursos hídricos, projeto de infraestrutura costeira, avaliação de impacto ambiental e estudos de ecossistemas aquáticos.

2.3 Metodologia

Uma ilustração dessa metodologia pode ser verificada na Figura 1, em que é utilizada a linguagem Fortran 90/95 na ferramenta Geany, para implementar os objetivos citados com relação a simulação. Foi desenvolvido um algoritmo para a resolução da equação do transporte em sistema de águas rasas, onde foram implementados códigos para a aplicação do método dos elementos finitos com elementos triangulares lineares unidos a uma discretização temporal semi-implícita pelo método CBS, capazes de resolver essas equações. Para a geração de malhas, utiliza-se um software auxiliar chamado GiD (MELENDO et al., 2023), pelo qual é realizado o pré-processamento dos dados empregados na simulação. O pós-processamento é realizado pelo software Tecplot360. O algoritmo de águas rasas foi validado a partir da sua aplicação em testes disponíveis na literatura, podendo-se comparar os resultados aos de outros autores.

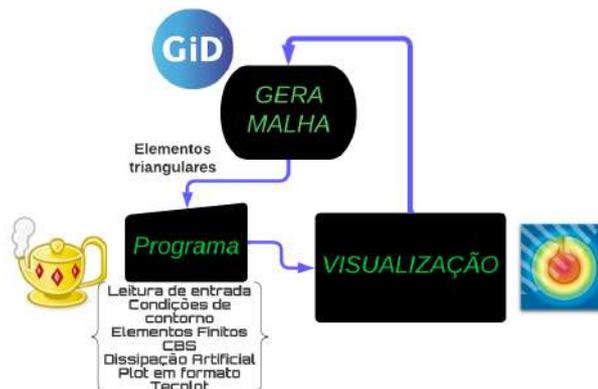


Figura 1 – Fluxograma da metodologia.

Fonte: Dos Autores.

3 EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

A dinâmica do escoamento de água em camadas pouco profundas, como se observa em ambientes como estuários costeiros, oceanos e rios, possui uma relevância prática incontestável. A antecipação precisa das correntes e das variações de maré desempenha um papel vital na facilitação da navegação e na avaliação da dispersão de substâncias poluentes, lamentavelmente ainda despejadas nesses locais com frequência. Além disso, o movimento de sedimentos associado a tais escoamentos também constitui um domínio de investigação importante.

Quando o escoamento de superfície livre é restrito a estratos relativamente delgados, as velocidades horizontais assumem uma posição de destaque, e a problemática pode ser tratada com boa precisão utilizando um modelo de apenas duas dimensões. No contexto deste cenário, é notório que as equações decorrentes, as quais incorporam, além das velocidades horizontais, a variação da superfície livre, podem ser expressas de maneira análoga aos princípios de conservação delineados nas equações de Euler.

Surpreendentemente, a forma pormenorizada dessas equações apresenta uma notável semelhança com aquelas que descrevem o escoamento de um gás compressível – um paralelo intrigante, mesmo considerando que estejamos tratando de um fluido estritamente incompressível (água).

Os tipos de fenômenos (tais como choques, entre outros) encontrados em escoamentos de gás compressível têm a possibilidade de se manifestarem novamente. É evidente que a ênfase prática recai sobre diferentes facetas. O propósito deste capítulo, conseqüentemente, consiste em estabelecer os fundamentos para a dedução da equação e ilustrar as abordagens numéricas aproximativas por intermédio de uma série de exemplos. As simplificações empregadas na formulação do movimento em corpos d'água de profundidade reduzida compartilham, em sua essência, semelhanças com aquelas empregadas para descrever o escoamento de ar na atmosfera terrestre, o que as torna amplamente empregadas na meteorologia. Nesse contexto, a previsão meteorológica, um tema de suma importância, requer a solução diária dessas equações e demanda um volume substancial de cálculos computacionais. Aqueles

que possuem interesse no assunto podem encontrar uma base sólida em literaturas convencionais, como em (ABBOTT, 1979) e (HALTINER; WILLIAMS, 1980). Uma área específica de interesse reside na forma linearizada das equações para águas de pouca profundidade, que, quando submetidas a excitações periódicas, se assemelham às equações que descrevem fenômenos acústicos. No capítulo subsequente, portanto, abordaremos alguns desses fenômenos periódicos, abrangendo a interação e as forças associadas às ondas (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2013):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

e conservação do momento:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} - g_i = 0 \quad (2)$$

com i, j sendo 1, 2 e 3. No caso do escoamento de águas rasas que ilustramos na Figura 2 onde a direção x_3 é vertical, a velocidade vertical u_3 é pequena e as acelerações correspondentes são desprezíveis. A equação do momento na direção vertical pode, portanto, ser reduzida à:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + g = 0 \quad (3)$$

onde $g_3 = -g$ é a aceleração da gravidade. Integrar com relação à x_3 :

$$p = \rho g (\eta - x_3) + p_a \quad (4)$$

como, quando $x_3 = \eta$, a pressão é atmosférica (p_a) (que pode ocasionalmente não ser constante sobre o corpo da água e pode assim influenciar o seu movimento). Na superfície livre, a velocidade vertical u_3 pode, evidentemente, estar relacionada com o tempo total derivada da elevação da superfície. Com referência à Figura 2, pode-se derivar diretamente a conservação da profundidade média (h), da equação de massa considerando um volume de controle infinitesimal no plano horizontal como

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h \bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

onde \bar{u}_i é o campo de velocidade média da profundidade. Pode-se ver imediatamente a semelhança com a equação de conservação da massa para escoamentos de gás compressível com h substituindo densidade ρ . Note que, a Eq. (5), também pode ser obtida integrando a Eq. (1) entre $-H$ e η (ver Figura 2), (PERAIRE, 1986). Agora realiza-se a integração ao longo da profundidade nas equações de momento nas direções horizontais, o que resulta em equações de momento com média de profundidade. Integrando a Eq. (2) entre as superfícies superior e inferior, ou seja,

$$\int_{-H}^{\eta} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - f_i \right] dx_3 = 0 \quad (6)$$

com $i = 1, 2$ e f_i nas equações acima são acelerações de Coriolis. A fim de integrar a Eq. (6), precisa-se usar a seguinte fórmula:

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial s} F(r, s) dr = \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b F(r, s) dr - F(b, s) \frac{\partial b}{\partial s} + F(a, s) \frac{\partial a}{\partial s} \quad (7)$$

Um exemplo simples de uso da fórmula Eq. (7) é com ρ constante:

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-H}^{\eta} \frac{p}{\rho} dx_3 - \left[\frac{p}{\rho} \right]_{\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) + \left[\frac{p}{\rho} \right]_{-H} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

Após a integração, a equação do momento médio da profundidade Eq. (6) torna-se:

$$\frac{\partial h \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} (\tau_{3i}^s - \tau_{3i}^b) + h f_i - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-H}^{\eta} \tau_{ij} dx_3 \quad (9)$$

onde os sobrescritos s e b indicam respectivamente as superfícies superior e inferior (fundo do mar). Na Eq. (9) as tensões de cisalhamento na superfície podem ser prescritas externamente, dado o arrasto do vento. O cisalhamento inferior é frequentemente expresso pela resistência hidráulica dada pela equação de Chézy:

$$\tau_{3i}^b = \frac{\rho g |\bar{\mathbf{u}}| \bar{u}_i}{C h^2} \quad (10)$$

onde

$$|\bar{\mathbf{u}}| = \sqrt{\bar{u}_i \bar{u}_i}; \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

e C é o coeficiente Chézy. As acelerações de Coriolis, f_i , na Eq. (9) são importantes em problemas de grande escala e definidas como:

$$f_1 = \hat{f} \bar{u}_2 \quad f_2 = -\hat{f} \bar{u}_1 \quad (12)$$

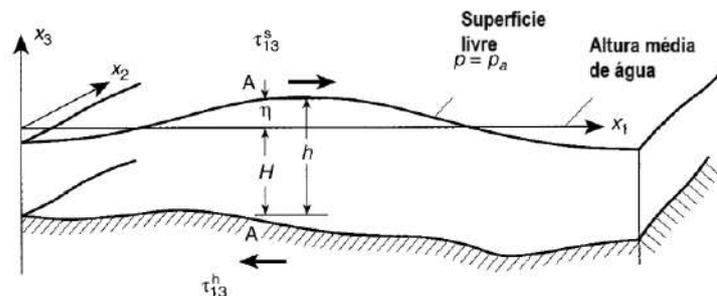


Figura 2 – Coordenadas

Fonte: (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2013)

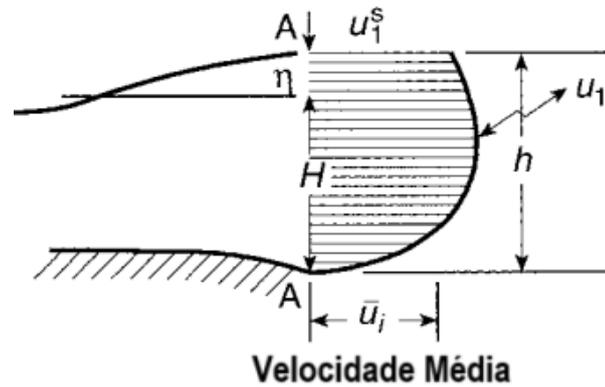


Figura 3 – Distribuição da velocidade

Fonte: (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2013)

onde \hat{f} é o parâmetro de Coriolis. Nesta fase, omite-se as tensões que atuam dentro do fluido e simplesmente considera-se o arrasto de superfície e a base que pode ser avaliada independentemente. A adição de tensões de cisalhamento nas faces verticais serão negligenciadas. Assim, a equação simplificada do momento sem tensões do fluido fica:

$$\frac{\partial h \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} (\tau_{3i}^s - \tau_{3i}^b) + h f_i - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} \quad (13)$$

Se comparar a equação acima com as equações de Euler para escoamento de gás compressível, encontra-se o termo de pressão equivalente na Eq. (13) aparecendo em sua forma não conservativa. Além disso, uma variável adicional η é introduzida. Para escrever a equação acima na forma de conservação e para eliminar a variável adicional η , considera-se a seguinte forma alternativa do termo de pressão equivalente com $\eta = h - H$:

$$-gh \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(g \frac{h^2 - H^2}{2} \right) + g(h - H) \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (14)$$

Substituindo a forma alternativa acima na Eq. (13) dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{u}_i \bar{u}_j) = & -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} g (h^2 - H^2) \right] + \frac{1}{\rho} (\tau_{3i}^s - \tau_{3i}^b) \\ & + h f_i + g(h - H) \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (15)$$

Agora, a equação acima está em uma forma idêntica àquela das equações de momento compressível não viscoso com h substituindo ρ . Os três primeiros termos nas equações acima representam termos transitórios, de convecção e de pressão equivalente. Todos os quatro termos restantes podem ser assumidos como termos de fonte. Logo a Eqs. (5) e (15) formam o problema de águas rasas. Essas equações podem

ser reescritas de forma compacta como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q} = 0 \quad (16)$$

onde,

$$\Phi = \begin{Bmatrix} h \\ h\bar{u}_1 \\ h\bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} h\bar{u}_i \\ h\bar{u}_1\bar{u}_i + \delta_{1i}\frac{1}{2}g(h^2 - H^2) \\ h\bar{u}_2\bar{u}_i + \delta_{2i}\frac{1}{2}g(h^2 - H^2) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

e

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -h\hat{f}\bar{u}_2 - g(h - H)\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{h}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x_1} - \frac{1}{\rho}\tau_{31}^s + \frac{g\bar{u}_1|\bar{\mathbf{u}}|}{Ch^2} \\ h\hat{f}\bar{u}_1 - g(h - H)\frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{h}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x_2} - \frac{1}{\rho}\tau_{32}^s + \frac{g\bar{u}_2|\bar{\mathbf{u}}|}{Ch^2} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

com $i = 1, 2$. A forma conservativa acima das equações para águas rasas foi apresentada pela primeira vez nas referências (ABBOTT, 1979) e (PERAIRE, 1986). No entanto, muitas variantes das equações para águas rasas existem na literatura, introduzindo várias aproximações. Nas seções seguintes deste capítulo discutir-se-á soluções de escalonamento de tempo do conjunto completo das equações descritas em (19) em situações transitórias e em aplicações de estado estacionário correspondentes. Representando a forma linearizada das Eqs (5) e (15), ve-se imediatamente isso na omissão de todos os termos não lineares, arrasto de fundo, etc., e deixando $h\bar{u}_i \approx H\bar{u}_i$ etc., pode-se escrever essas equações como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (H\bar{u}_i) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial (H\bar{u}_i)}{\partial t} + gH\frac{\partial}{\partial x_i} (h - H) = 0 \quad (21)$$

Note que:

$$\eta = h - H \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (22)$$

utilizando a substituição acima, obtém-se:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (H\bar{u}_i) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial (H\bar{u}_i)}{\partial t} + gH\frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \quad (24)$$

Eliminando o termo $H\bar{u}_i$ na Eq. (23) substituindo na Eq. (24) tem-se:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (25)$$

que é a equação de onda de Helmholtz padrão.

As equações de águas rasas derivadas nesta seção consideram apenas a profundidade média do fluido e, portanto, não podem reproduzir certos fenômenos que ocorrem na natureza e nos quais a variação de velocidade com a profundidade deve ser considerada. Em muitos desses problemas, a suposição básica de uma distribuição de pressão verticalmente hidrostática ainda é válida e uma forma de comportamento em águas rasas pode ser assumida. A extensão da formulação pode ser alcançada por uma divisão, a priori, do fluido para componente em cada uma das quais ocorrem velocidades diferentes. O conjunto final de discretização das equações consiste em várias aproximações bidimensionais acopladas. Alternativamente, o mesmo efeito pode ser introduzido usando vários testes de velocidade diferentes.

4 APROXIMAÇÃO NUMÉRICA

Introduzido no final da década de 1950 na indústria aeronáutica, o método dos elementos finitos (MEF) emergiu como um dos métodos numéricos mais poderosos já desenvolvidos. Entre os atributos básicos do método que levaram à sua ampla aceitação e uso estão a facilidade na modelagem de geometrias complexas, o tratamento consistente de condições de contorno do tipo diferencial e a possibilidade de ser programado em um formato flexível e de uso geral.

As aproximações padrão de elementos finitos são baseadas na formulação de Galerkin do método dos resíduos ponderados. Esta formulação tem se mostrado eminentemente bem-sucedida na aplicação a problemas de mecânica sólida/estrutural e em outras situações, como condução de calor, governada por equações do tipo parabólicas. A razão para este sucesso é que, quando aplicado a problemas governados por equações diferenciais parciais elípticas ou parabólicas autoadjuntas, o método dos elementos finitos de Galerkin leva a matrizes de rigidez simétricas. Neste caso, a diferença entre a solução de elementos finitos e a solução exata é minimizada em relação à norma energética, ver, por exemplo, Strang e Fix (1973). Na prática, a formulação de Galerkin é ótima em problemas governados por equações autoadjuntas. Nestes casos, existe um funcional quadrático cujo mínimo corresponde à satisfação da equação diferencial parcial que rege o problema em questão. Por exemplo, na elasticidade linear, a posição de equilíbrio de uma estrutura corresponde ao mínimo do funcional quadrático que expressa a energia potencial total do sistema. Da mesma forma, em problemas de condução de calor estacionária, o equilíbrio térmico resultante da satisfação da equação de Laplace ou Poisson corresponde ao mínimo de um funcional quadrático expresso em termos do escoamento térmico, que representa fisicamente a energia térmica total do sistema.

O sucesso do método dos elementos finitos de Galerkin em mecânica estrutural, condução de calor e outros problemas do tipo potencial proporcionou, no início da década de 1970, um forte impulso para a utilização do método na simulação de problemas de dinâmica de fluidos. Pensou-se que as vantagens significativas obtidas na mecânica estrutural e nos problemas do tipo difusão estariam novamente abertas à

exploração na área de simulação do escoamento de fluidos. Na verdade, este provou ser um ponto de vista otimista, especialmente no que diz respeito à modelagem de fenômenos de transporte dominados pela convecção.

A principal dificuldade deveu-se à presença de operadores de convecção na formulação de problemas de escoamento baseados em descrições cinemáticas diferentes da Lagrangiana. Os operadores de convecção são, de fato, não simétricos e, portanto, a propriedade de melhor aproximação na norma energética do método Galerkin, que é a base para o sucesso em casos simétricos, é perdida quando a convecção domina o processo de transporte.

Na prática, as soluções para problemas de transporte dominados pela convecção pelo método Galerkin são frequentemente corrompidas por oscilações espúrias de nó a nó. Estes só podem ser removidos por um refinamento severo da malha (e do passo de tempo), o que prejudica claramente a utilidade prática do método. Isto motivou o desenvolvimento de alternativas à formulação padrão de Galerkin que impedem oscilações sem exigir malha ou refinamento de intervalo de tempo. Tais alternativas são chamadas de técnicas de estabilização e proporcionaram um grande avanço na modelagem de elementos finitos de problemas em dinâmica de fluidos.

4.1 Elemento triangular linear

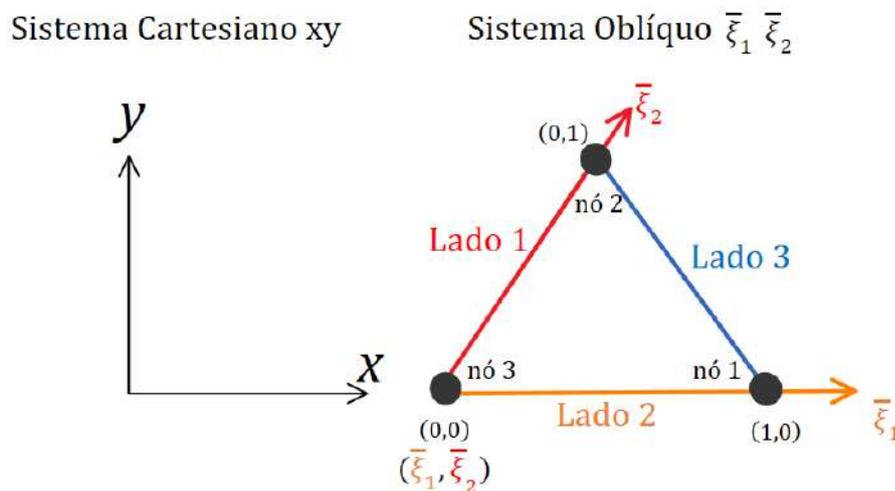


Figura 4 – Diferentes sistemas utilizados

Fonte: Dos Autores.

Os nós são numerados no sentido anti-horário e o lado é numerado como oposto ao nó. O sistema oblíquo é adimensionalizado em $[0, 1]$ com relação ao comprimento l_{ij} de cada lado $\bar{i}\bar{j}$:

$$\xi_1 = \frac{\bar{\xi}_1}{l_{31}} \quad \xi_2 = \frac{\bar{\xi}_2}{l_{32}} \quad (26)$$

A transformação do sistema cartesiano para o sistema oblíquo buscada é:

$$p(x, y) \longrightarrow P(\xi_1, \xi_2) \quad (27)$$

que vale da Figura 4:

$$\begin{aligned} x &= X_3 + (X_1 - X_3)\xi_1 + (X_2 - X_3)\xi_2 \\ y &= Y_3 + (Y_1 - Y_3)\xi_1 + (Y_2 - Y_3)\xi_2 \end{aligned} \quad (28)$$

onde (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) são as coordenadas dos três vértices no sistema global de coordenadas. A transformada Eq. (28) pode ser reescrita da forma:

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + (1 - \xi_1 - \xi_2) X_3 \\ y &= \xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + (1 - \xi_1 - \xi_2) Y_3 \end{aligned} \quad (29)$$

A expressão da Eq. (29) pode ser invertida:

$$\xi_1 = \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta} \quad (30)$$

$$\xi_2 = \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2\Delta} \quad (31)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & a_2 &= X_3 Y_1 - X_1 Y_3 \\ b_1 &= Y_2 - Y_3 & b_2 &= Y_3 - Y_1 \\ c_1 &= X_3 - X_2 & c_2 &= X_1 - X_3 \end{aligned} \quad (32)$$

e

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{área } \overline{123}. \quad (33)$$

Ao longo do lado 3, tem-se que $\xi_1 + \xi_2 = 1$. Pode-se introduzir uma terceira coordenada ξ_3 que vale $\xi_3 = 0$ no lado 3. Agora, cada ponto é descrito por (ξ_1, ξ_2, ξ_3) que podem ser interpretados como coordenadas de área $L_1 = \xi_1$, $L_2 = \xi_2$ e $L_3 = \xi_3$ tal que:

$$L_1 = \frac{\text{Área } P_{23}}{\text{Área } 123} \quad L_2 = \frac{\text{Área } P_{31}}{\text{Área } 123} \quad L_3 = \frac{\text{Área } P_{12}}{\text{Área } 123}. \quad (34)$$

A Figura 5 ilustra as coordenadas de área.

Portanto, tem-se 3 coordenadas de área, mas apenas duas são independentes:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (35)$$

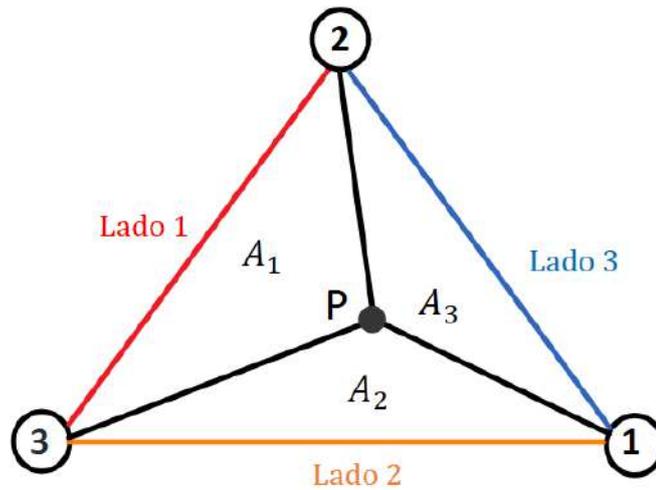


Figura 5 – Coordenadas de área
Fonte: Dos Autores.

pois:

$$\frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = \frac{A}{A} = 1 \quad (36)$$

ou, da Eq. (35):

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2. \quad (37)$$

De uma forma mais geral a Eq. (29) pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} x &= L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3 \\ y &= L_1 Y_1 + L_2 Y_2 + L_3 Y_3 \end{aligned} \quad (38)$$

onde:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta} \\ L_2 &= \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2\Delta} \\ L_3 &= \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2\Delta} \end{aligned} \quad (39)$$

com:

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix} = \text{area } \overline{123} \quad (40)$$

e também:

$$\begin{aligned} a_1 &= X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & a_2 &= X_3 X_1 - X_1 Y_3 & a_3 &= X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \\ b_1 &= Y_2 - Y_3 & b_2 &= Y_3 - Y_1 & b_3 &= Y_1 - Y_2 \\ c_1 &= X_3 - X_2 & c_2 &= X_1 - X_3 & c_3 &= X_2 - X_1 \end{aligned} \quad (41)$$

4.2 Funções de forma

Uma função de forma para interpolação pode ser obtida adotando-se as coordenadas de área L_i :

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3 \quad (42)$$

que obviamente, retorna no nó 1 $N_1 = 1$ e $N_2 = N_3 = 0$, no nó 2 $N_2 = 1$ e $N_3 = N_1 = 0$ e no nó 3 $N_3 = 1$ e $N_1 = N_2 = 0$. Para qualquer outra região no interior do elemento $N_1 + N_2 + N_3 = 1$ da Eq. (35). Estas condições satisfazem os requerimentos para uma função de forma no método dos elementos finitos para interpolação. As funções de forma são:

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3] \quad (43)$$

Em qualquer região do elemento, uma variável u qualquer pode ser calculada por:

$$u = \mathbf{N}\tilde{u} \quad \text{onde} \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

E as derivadas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{N}\tilde{u}) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\tilde{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{N}\tilde{u}) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y}\tilde{u} \quad (45)$$

onde:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \left[\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial x} \right] \quad (46)$$

e:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} = \left[\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial y} \right] \quad (47)$$

Da Eq. (46) em Eq. (39) e Eq. (40):

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \left[\frac{b_1}{2\Delta}, \frac{b_2}{2\Delta}, \frac{b_3}{2\Delta} \right] \quad (48)$$

e da Eq. (47) em Eq. (39) e Eq. (40):

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} = \left[\frac{c_1}{2\Delta}, \frac{c_2}{2\Delta}, \frac{c_3}{2\Delta} \right] \quad (49)$$

4.3 Vetores normais

Definindo-se:

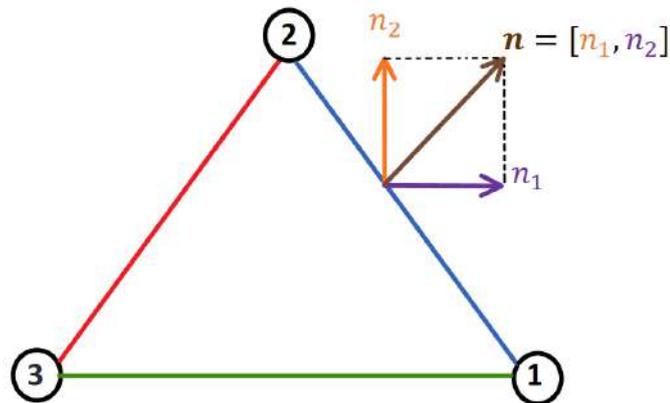


Figura 6 – Vetores normais.
Fonte: Dos Autores.

$$dx = x_2 - x_1 \quad \text{e} \quad dy = y_2 - y_1 \quad (50)$$

então, o vetor perpendicular $\mathbf{n} = [n_1, n_2]$ deve satisfazer:

$$[n_1, n_2] \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = 0. \quad (51)$$

O problema acima admite duas soluções. Adota-se a solução cuja normal aponta na direção para fora do domínio e torna-se o \mathbf{n} em vetor unitário $\bar{\mathbf{n}}$ tal que $|\bar{\mathbf{n}}| = 1$:

$$\bar{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \bar{n}_1 \\ \bar{n}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dy/l_{12} \\ -dx/l_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dy/\sqrt{dx^2 + dy^2} \\ -dx/\sqrt{dx^2 + dy^2} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Em algumas situações, utiliza-se o valor da normal em nós K . Isto é obtido pela média das normais dos lados i e j .

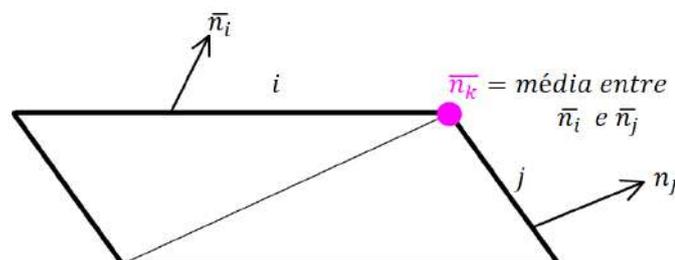


Figura 7 – Médias de normais em um nó k .
Fonte: Dos Autores.

4.4 Integração

Para um triângulo a seguinte integração pode ser obtida de forma generalizada em coordenadas de área ((ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005)):

$$\int_{\Omega^{(l)}} L_1^i L_2^j L_3^k d\Omega^{(l)} = \frac{i!j!k!2A}{(i+j+k+2)!} \quad (i, j, k \geq 0) \quad (53)$$

e para um lado (reta):

$$\int_{\Gamma^{(l)}} L_1^i L_2^j d\Gamma^{(l)} = \frac{i!j!}{(i+j+1)!} L \quad (i, j \geq 0). \quad (54)$$

Por exemplo:

$$\int_{\Omega^{(l)}} L_1 d\Omega^{(l)} = \int_{\Omega^{(l)}} L_2 d\Omega^{(l)} = \int_{\Omega^{(l)}} L_3 d\Omega^{(l)} = \frac{A}{3} \quad (55)$$

e:

$$\int_{\Gamma^{(l)}} L_1 d\Gamma^{(l)} = \int_{\Gamma^{(l)}} L_2 d\Gamma^{(l)} = \frac{L}{2} \quad (56)$$

Outra integração muito importante é a matriz de massa M:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} L_1 L_1 d\Omega & \int_{\Omega} L_1 L_2 d\Omega & \int_{\Omega} L_1 L_3 d\Omega \\ \int_{\Omega} L_2 L_1 d\Omega & \int_{\Omega} L_2 L_2 d\Omega & \int_{\Omega} L_2 L_3 d\Omega \\ \int_{\Omega} L_3 L_1 d\Omega & \int_{\Omega} L_3 L_2 d\Omega & \int_{\Omega} L_3 L_3 d\Omega \end{bmatrix} = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Por simplicidade, M da Eq. (57) pode ser diagonalizada, para simplificar os cálculos, da forma que :

$$\mathbf{M}_{ii}^{\text{DIAG}} = \sum_j M_{ij} \quad (58)$$

então de Eq. (57) em Eq. (56):

$$\mathbf{M}^{\text{DIAG}} = \frac{A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

4.5 Comprimento \bar{h} característico

Os comprimentos h_1 , h_2 e h_3 do triângulo em Figura 8 podem ser obtido por:

$$h_i = \frac{1}{|\nabla \mathbf{N}^i|} \quad (60)$$

Adota-se o menor valor para o comprimento característico \bar{h} de um nó j :

$$\bar{h}_j = \min (h_i)_j \quad (61)$$

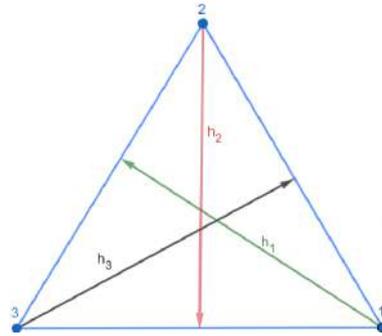


Figura 8 – Comprimento \bar{h} característico.

Fonte: Dos Autores.

4.6 O método CBS

Para a explicação do método utiliza-se um exemplo prático. Considere a equação de advecção-difusão unidimensional Eq. (62):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q = 0 \quad (62)$$

onde ϕ = variável de conservação, K = coeficiente de difusão, U = velocidade, Q = termo fonte e considerou-se $U \partial \phi / \partial x = 0$ por simplicidade.

Agora aplica-se uma mudança de variável independente em x :

$$x' = x - Ut \quad \text{ou} \quad dx' = dx - U dt \quad (63)$$

Logo com a mudança da Eq. (63), tem-se $\phi = \phi(x', t)$, ou seja:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x=cte} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x'=cte} = -\frac{U \partial \phi}{\partial x'} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x'=cte} \quad (64)$$

Agora pode-se inserir a Eq. (64) em Eq. (62) para reescrever a Eq. (62) na coordenada x' :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{K \partial \phi}{\partial x'} \right) + Q(x') = 0 \quad (65)$$

O sistema de coordenadas definido na Eq. (63) descreve as linhas ou direções características. Para o caso particular $K = 0$ e $Q = 0$, a Eq. (65) fica:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{ou, de outra forma:} \quad \phi(x') = \phi(x - Ut) = cte \quad (66)$$

que é uma equação de onda propagando-se com velocidade U na direção x . Para $K \neq 0$, Eq. (66) é uma onda com atenuação.

A vantagem em escrever a Eq. (65) em termos de x' que são coordenadas em convecção, é remover o termo advectivo de Eq. (62) para aplicar discretizações com aproximação espacial como de Galerkin de forma otimizada.

Utilizando-se uma atualização lagrangeana para x' constante:

$$dx = U dt. \quad (67)$$

E para um nó i :

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} U dt \quad (68)$$

como $U = U(\phi)$, a velocidade é constante na direção das linhas características devido à Eq. (66), então:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + U \Delta t \quad (69)$$

Atualizar x_i é obviamente problemático em cenários bidimensionais e tridimensionais. Uma alternativa é retornar à posição inicial por algum tipo de interpolação ou projeção.

Considerando a Eq. (66) pode-se escrever a seguinte discretização no tempo:

$$\frac{\phi(x)^{n+1} - \phi(x)^n}{\Delta t} = 0 \quad (70)$$

Expandindo-se uma série de Taylor no entorno de $(x' - x)$ da distância entre $\phi(x')^n$ e $\phi(x)$ em um tempo de n :

$$\phi(x')^n = \phi(x)^n - (x' - x) \frac{\partial \phi(x)^n}{\partial x} + \frac{(x' - x)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(x)^n}{\partial x^2} - \frac{(x' - x)^3}{6} \frac{\partial^3 \phi(x)^n}{\partial x^3} + \dots \quad (71)$$

Com uma velocidade constante \bar{U} na direção característica a Eq. (63) e Eq. (69), escreve-se:

$$x' - x = \bar{U} \Delta t. \quad (72)$$

Inserindo-se Eq. (72) e Eq. (71) em Eq. (69) com $\phi(x)^{n+1} = \phi(x')$:

$$\frac{\phi(x)^{n+1} - \phi(x)^n}{\Delta t} = -\frac{\bar{U} \partial \phi(x)^n}{\partial x} + \frac{\Delta t \bar{U}^2 \partial^2 \phi(x)^n}{2} - \frac{\Delta t^2 \bar{U}^3 \partial^3 \phi(x)^n}{6} + \theta (\Delta t^3). \quad (73)$$

Para um caso não linear, onde $U\phi(x)$ vale:

$$U\phi(x)^n = U\phi(x)^n - (x' - x) \frac{\partial}{\partial x} (U\phi(x))^n + \frac{(x' - x)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U\phi(x))^n + \dots \quad (74)$$

e $\Delta t = (x' - x)/U$, então:

$$\frac{\phi(x)^{n+1} - \phi(x)^n}{\Delta t} = \frac{-\partial}{\partial x} (U\phi(x))^n + \frac{\Delta t}{2} U \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (U\phi(x)) \right]^n + O(\Delta t^2). \quad (75)$$

Para o problema de advecção-difusão:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x)^{n+1} - \phi(x)^n}{\Delta t} &= \frac{-\partial}{\partial x}(U\phi(x))^n + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) \right)^n \\ &+ \Delta t U \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x}(U\phi(x)) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) \right) \right]^n + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (76)$$

4.7 Aplicação do método CBS nas equações de águas rasas

Sejam as equações governantes do problema descritas da forma:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (77)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + Q_i = 0, \text{ com } g = \frac{1}{2}g(h^2 - H^2). \quad (78)$$

Lembrando que para o problema genérico na variável ϕ unidimensional:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \phi} + \bar{Q}x = 0 \quad (79)$$

o método CBS resulta em:

$$\frac{\phi(x)^{n+1} - \phi(x)^n}{\Delta t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x}(\bar{U}\phi(x)) + \bar{Q} \right]^n + \frac{\Delta t}{2} \left[\bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\bar{U}\phi(x)) \right) + \bar{U} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \right]^n \quad (80)$$

ou, na forma vetorial, considerando $\Delta\phi = \phi(x)^{n+1} - \phi(x)^n$:

$$\Delta\phi = -\Delta t \left[\frac{\partial (U_j \phi)}{\partial x_j} + \bar{Q} \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} U_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial (U_j \phi)}{\partial x_j} + \bar{Q} \right]^n \quad (81)$$

Observando-se a Eq. (78), despreza-se Q_i e a semelhança com a Eq. (81).

$$U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta t \left[-\frac{\partial (u_j U_i)}{\partial x_j} \right]^n - \Delta t \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial (u_j U_i)}{\partial x_j} \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right). \quad (82)$$

Uma possível metodologia para determinar de forma incremental o avanço temporal do sistema definido pelas Eq. (77) e Eq. (78) consiste nos seguintes passos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005):

Passo 1: Resolver a Eq. (82) removendo-se o primeiro termo de pressão, para determinar U_i^{*n+1} :

$$U_i^{*n+1} - U_i^n = \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) \right]^n + \frac{\Delta t^2 \tilde{u}_k}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i)^n + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (83)$$

Para o método FEM, aproxima-se $U_i = \mathbf{N}\tilde{U}_i$, $u_j = \mathbf{N}\tilde{u}_j$ e $p = \mathbf{N}\tilde{p}$, onde \sim são os valores nodais e \mathbf{N} são as funções de forma dos elementos. Então:

$$\mathbf{N}\Delta\tilde{U}_i^* = \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{N}\tilde{u}_j\tilde{U}_i \right) \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} \tilde{u}_k \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{N}\tilde{u}_j\tilde{U}_i \right)^n + \frac{\partial (\mathbf{N}\tilde{p})^n}{\partial x_i} \right) \right] \quad (84)$$

Agora, aplica-se o método de Galerkin ponderando-se por \mathbf{N}^T a Eq. (84) e integrando-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \Delta \tilde{U}_i^* d\Omega &= \Delta t \left[- \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{N}\tilde{u}_j\tilde{U}_i \right) \right]^n d\Omega \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \tilde{u}_k \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{N}\tilde{u}_j\tilde{U}_i \right)^n + \frac{\partial (\mathbf{N}\tilde{p})^n}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (85)$$

A Eq. (85) é uma escolha difícil, pois sabe-se os valores nodais, porém não os valores de suas derivadas. Logo, pode-se utilizar a relação das derivadas e o teorema da divergência (AKIN, 2005):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} F d\Omega = - \int_{\Omega} f \frac{\partial F_i}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Gamma} f F_i n_i d\Gamma \quad (86)$$

ou de uma forma alternativa,

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot F d\Omega = - \int_{\Omega} f \nabla \cdot F d\Omega - \int_{\Gamma} f F \cdot n d\Gamma \quad (87)$$

Aplicando a Eq. (86) ao lado direito de Eq. (85):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \Delta \tilde{U}_i^* d\Omega &= \Delta t \left[\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \mathbf{N} \tilde{u}_j \tilde{U}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} n_j \tilde{u}_j \tilde{U}_i d\Gamma \right]^n \\ &- \frac{\Delta t^2}{2} \tilde{u}_k \left[\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \tilde{u}_j \tilde{U}_i d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} n_k \tilde{u}_j \tilde{U}_i d\Gamma \right] \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \tilde{p} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} n_k \tilde{p} d\Gamma. \end{aligned} \quad (88)$$

A Eq. (88), pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\Delta\tilde{U}_i^* &= \Delta t \left[(\mathbf{C} - \mathbf{S}) \left(\tilde{u}_j\tilde{U}_i \right) - (\mathbf{K}_{\tau} - \mathbf{T}_{\tau}) \mathcal{T}_{ij} \right]^n \\ &- \frac{\Delta t^2}{2} \tilde{u}_k \left[(\mathbf{K}_u - \mathbf{T}_u) \left(\tilde{u}_j\tilde{U}_i + (\mathbf{K}_p - \mathbf{T}_p) \tilde{p} \right) \right]^n \end{aligned} \quad (89)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \\
\mathbf{S} &= \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} n_j d\Gamma \\
\mathbf{C} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \mathbf{N} d\Omega \\
\mathbf{K}_u &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \\
\mathbf{K}_p &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \\
\mathbf{T}_u &= \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} n_k d\Gamma \\
\mathbf{T}_p &= \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} n_k d\Gamma
\end{aligned}$$

Passo 2: calcular o incremento de h devido ao **passo 1**. Da Eq. (77) tem-se onde:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{c^2}\right)^n \frac{\partial p}{\partial t} \quad (90)$$

sendo c a celeridade. A Eq. (90), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{c^2}\right)^n (p^{n+1} - p^n) = -\Delta t \frac{\partial U_i^{n+\theta_1}}{\partial x_i} \quad (91)$$

onde:

$$U_i^{n+\theta_1} = \theta_1 U_i^{n+1} + (1 + \theta_1) U_i^n \quad (92)$$

com $0,5 \leq \theta_1 \leq 1$. Observe que das Eq. (82) e (83) tem-se que:

$$U_i^{n+1} - U_i^* = -\Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (93)$$

Combinando-se Eq. (93) e Eq. (92):

$$U_i^{n+\theta_1} = \theta_1 \left[U_i^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] + (1 - \theta_1) U_i^n \quad (94)$$

e com a Eq. (94) em (91), obtém-se:

$$\left(\frac{1}{c^2}\right)^n (p^{n+1} - p^n) = -\Delta t \left[\theta_1 \frac{\partial U_i^*}{\partial x_i} + (1 - \theta_1) \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} \right] + \Delta t^2 \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \quad (95)$$

ou, alternativamente, com a Eq. (90) em Eq. (95) e com a observação que, $\theta_1 U_i^{n+1} + (1 - \theta_1) U_i^n = U_i^n + \theta_1 \Delta U_i$, tem-se:

$$h^{n+1} - h^n = -\Delta t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \theta_1 - \frac{\Delta U_i^*}{\partial x_i} - \Delta t \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (96)$$

Discretizando a Eq. (96), ponderando-se por \mathbf{N}^T e integrando-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \Delta \tilde{h} d\Omega = -\Delta t \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \frac{\partial (\mathbf{N} \tilde{U}_i)}{\partial x_i} + \theta_1 \mathbf{N}^T \frac{\Delta \mathbf{N} \tilde{U}_i^*}{\partial x_i} - \Delta \theta_1 \mathbf{N}^T \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial (\mathbf{N} \tilde{p})}{\partial x_i} d\Omega \right) \right]. \quad (97)$$

Integrando-se por partes:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \Delta \tilde{h} d\Omega = \Delta t & \left[\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{N} \tilde{U}_i d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} n_i \tilde{U}_i d\Gamma \right. \\ & + \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T \mathbf{N}}{\partial x_i} \mathbf{N} \Delta \tilde{U}_i^* - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} n_i \Delta \tilde{U}_i^* d\Gamma \right) \theta_1 \\ & \left. - \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \tilde{p} d\Omega \theta_1 \right] .. \end{aligned} \quad (98)$$

Na forma compacta, a Eq. (98) fica:

$$\mathbf{M} \Delta \tilde{h} = \Delta t \left[(\mathbf{D} - \mathbf{R}u) \left(\tilde{U}_i + \theta_1 \Delta \tilde{U}_i^* \right) - \Delta t \theta_1 \mathbf{K} \tilde{p} \right]^n. \quad (99)$$

onde

$$\mathbf{D} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{N} d\Omega \quad \mathbf{R}u = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} n_i d\Gamma \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega. \quad (100)$$

Passo 3: Atualiza-se $U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta U_i^* + \Delta U_i^{**}$, lembrando que U_i^{**} é o termo de pressão removido da Eq. (82):

$$\Delta U_i = \Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p^n}{\partial x_i}. \quad (101)$$

Discretizando-se, ponderando-se por \mathbf{N}^T e integrando:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \Delta \tilde{U}_i d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \Delta \tilde{U}_i^* d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \frac{\partial (\mathbf{N} \tilde{p}^n)}{\partial x_i} d\Omega \quad (102)$$

Finalmente, integrando-se por partes:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \Delta \tilde{U}_i d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \Delta \tilde{U}_i^* + \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{N} \tilde{p}^n d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \tilde{p}^n n_i d\Gamma \quad (103)$$

tem-se então:

$$\mathbf{M} \Delta \tilde{U}_i = \mathbf{M} \Delta \tilde{U}_i^* + \Delta t [(\mathbf{D} - \mathbf{R}u) \tilde{p}^n]^n \quad (104)$$

onde as matrizes foram definidas anteriormente na Eq. (100).

4.8 Discretização da equação do transporte

Partindo-se de equação de continuidade para uma variável escalar T representando um problema de transporte:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial (T\mu_i)}{\partial x_i}}_A = 0 \quad (105)$$

observa-se que o termo A representa a convecção de T . A difusão de T pode ser expressa por:

$$-\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)}_B \quad (106)$$

O sinal negativo de B indica que o termo contribui para a redução de T no tempo. Combinando-se Eq. (106) e Eq. (105) e incluindo-se um termo fonte (R) obtém-se a equação de transporte de T :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (Tu_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + R = 0 \quad i = 1, 2 \quad (107)$$

onde K é um coeficiente de difusão, considerado isotrópico, isto é $K = K_1 = K_2$:

Para aplicar a Eq. (107) nas equações de águas rasas, necessitamos considerar a integração na profundidade h , resultando em:

$$\frac{\partial (hT)}{\partial t} + \frac{\partial (hU_i T)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(hk \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + R = 0 \quad i = 1, 2 \quad (108)$$

Lembrando o método CBS:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q = 0 \quad (109)$$

que resulta em:

$$\begin{aligned} \Delta \phi = & - \Delta t \left[\frac{\partial (U_j \phi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q \right]^n \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} U_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial (U_j \phi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q \right]^n \end{aligned} \quad (110)$$

A nossa variável $\phi = hT$, portanto aplicando-se o método CBS (conforme Eqs. (108), (109) e Eq. (108) na Eq. (110):

$$\begin{aligned} \Delta hT = & -\Delta t \left[\frac{\partial (U_j hT)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial (hT)}{\partial x_i} \right) + R \right]^n \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} U_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial (U_j hT)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial (hT)}{\partial x_i} \right) + R \right]^n \end{aligned} \quad (111)$$

Discretizando-se:

$$\begin{aligned} \tilde{N} \Delta (\tilde{hT}) = & -\Delta T \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{N} \tilde{U}_j \tilde{hT} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{N} \tilde{hT} \right) \right) + \tilde{N} \tilde{R} \right]^n \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \tilde{U}_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{N} \tilde{U}_j \tilde{hT} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{N} \tilde{hT} \right) \right) + \tilde{N} \tilde{R} \right]^n \end{aligned} \quad (112)$$

Ponderando-se por \tilde{N}^T e integrando-se em Ω (Galerkin):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{N}^T \tilde{N} \Delta (\tilde{hT}) d\Omega = & -\Delta t \left[\int_{\Omega} \tilde{N}^T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{N} \tilde{U}_j \tilde{hT} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{N}^T \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{N} \tilde{hT} \right) d\Omega \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} \tilde{N}^T \tilde{N} \tilde{R} d\Omega + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \tilde{N}^T \tilde{U}_k^n \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tilde{N} \tilde{U}_j \tilde{hT} \right)^n - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{N} \tilde{hT} \right) + \tilde{N} \tilde{R} \right]^n d\Omega \right] \end{aligned} \quad (113)$$

Então:

$$\begin{aligned} \tilde{M} (\Delta \tilde{hT}) = & \Delta t \left[\left(\tilde{C} - \tilde{S} \right) \tilde{U}_j (\tilde{hT}) + \left(\tilde{B} - \tilde{A} \right) k \frac{\partial (\tilde{hT})}{\partial x_i} + \tilde{M} \tilde{R} \right]^n \\ & - \frac{\Delta t^2}{2} \left[\tilde{U}_k \left(\tilde{k} u - \tilde{T} u \right) \tilde{U}_j (\tilde{hT}) \right]^n \end{aligned} \quad (114)$$

onde foram desprezados termos de alta ordem e:

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \int_{\Omega} \tilde{N}^T \tilde{N} d\Omega, \quad \tilde{C} = \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_j} \tilde{N} d\Omega, \quad \tilde{S} = \int_{\Gamma} \tilde{N}^T \tilde{N} n_j d\Gamma, \\ \tilde{B} &= \int_{\Gamma} \tilde{N}^T n_j d\Gamma, \quad \tilde{A} = \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_j} d\Omega, \quad \tilde{K}_u = \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_j} d\Omega, \\ \tilde{T}_u &= \int_{\Gamma} \tilde{N}^T \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_j} n_k d\Gamma. \end{aligned}$$

Para discretizar a convecção, começa-se com as integrais e variáveis que envolvem o domínio:

$$\tilde{M} (\Delta \tilde{hT}) = \Delta t \left[\tilde{C} \tilde{U}_j (\tilde{hT}) \right]^n - \frac{\Delta t^2}{2} \left[\tilde{U}_k \left(\tilde{K} u \right) \tilde{U}_j (\tilde{hT}) \right]^n \quad (115)$$

Primeiro abriremos o termo \tilde{C} , lembrando que:

$$C_{\tilde{\sim}} = \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_j} N d\Omega \quad j = 1, 2$$

$$\tilde{M}(\Delta \tilde{hT}) = \Delta t \left[\left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_j} N d\Omega \right\} \tilde{U}_j(\tilde{hT}) \right]^n - \frac{\Delta t^2}{2} [\tilde{U}_k(\tilde{Ku}) \tilde{U}_j(\tilde{hT})]^n \quad (116)$$

Agora tem-se que:

$$\int_{\Omega} N d\Omega = \frac{A}{3} \quad (117)$$

$$\tilde{M}(\Delta \tilde{hT}) = \Delta t \left[\left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_j} N d\Omega \right\} \tilde{U}_j(\tilde{hT}) \right]^n - \frac{\Delta t^2}{2} [\tilde{U}_k(\tilde{Ku}) \tilde{U}_j(\tilde{hT})]^n \quad (118)$$

As derivadas do tipo $\frac{\partial N^T}{\partial x_j}$ são constantes, logo:

$$\left\{ \frac{\partial N^T}{\partial x_j} \int_{\Omega} N d\Omega \right\} \tilde{U}_j(\tilde{hT}) \quad (119)$$

Logo utilizando Eq. (117) em Eq. (119) e abrindo o somatório de $i = 1, 2$:

$$\frac{\partial N^T}{\partial x_1} \frac{A}{3} \tilde{U}_1(\tilde{hT}) + \frac{\partial N^T}{\partial x_2} \frac{A}{3} \tilde{U}_2(\tilde{hT}) \quad (120)$$

Finalmente chegando em:

$$\tilde{M}(\Delta \tilde{hT}) = \Delta t \left[\frac{\partial N^T}{\partial x_1} \frac{A}{3} \tilde{U}_1(\tilde{hT}) + \frac{\partial N^T}{\partial x_2} \frac{A}{3} \tilde{U}_2(\tilde{hT}) \right]^n - \frac{\Delta t^2}{2} [\tilde{U}_k(\tilde{Ku}) \tilde{U}_j(\tilde{hT})]^n \quad (121)$$

Agora o objetivo é abrir a Eq. (121), logo:

$$\tilde{U}_k(\tilde{Ku}) \tilde{U}_j(\tilde{hT}) \quad (122)$$

Sendo que:

$$Ku = \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_k} \frac{\partial N}{\partial x_j} d\Omega \quad (123)$$

Logo:

$$\tilde{U}_k \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_j} d\Omega \right) \tilde{U}_j (\tilde{hT}) \quad (124)$$

ainda se tem:

$$\tilde{U}_k \left(\frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_j} \int_{\Omega} d\Omega \right) \tilde{U}_j (\tilde{hT}) \quad (125)$$

Lembrando que:

$$\int_{\Omega} d\Omega = A \quad (126)$$

Então pode-se:

$$\tilde{U}_k \left(\frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_j} A \right) \tilde{U}_j (\tilde{hT}) \quad (127)$$

Agora os índices k' s tem que acompanhar os k 's e os j' s com os j 's, ou seja:

$$U_1 \left(\frac{\partial N^T}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_1} \frac{A}{3} \tilde{U}_1(\tilde{hT}) + \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_2} \frac{A}{3} \tilde{U}_2(\tilde{hT}) \right] \right) + U_2 \left(\frac{\partial N^T}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_1} \frac{A}{3} \tilde{U}_1(\tilde{hT}) + \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_2} \frac{A}{3} \tilde{U}_2(\tilde{hT}) \right] \right) \quad (128)$$

Portanto chegamos a conclusão que a discretização aberta da equação de convecção para o domínio é:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\Delta \tilde{hT}) &= \Delta t \left[\frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_1} \frac{A}{3} \tilde{U}_1(\tilde{hT}) + \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_2} \frac{A}{3} \tilde{U}_2(\tilde{hT}) \right]^n - \\ &\frac{\Delta t^2}{2} \left[\tilde{U}_1 \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_1} A(\tilde{hT}) + \tilde{U}_2 \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_2} A(\tilde{hT}) + \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_1} A \tilde{U}_1(\tilde{hT}) + \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_2} A \tilde{U}_2(\tilde{hT}) \right]^n \end{aligned} \quad (129)$$

4.8.1 Convecção no contorno:

$$\tilde{M}(\Delta \tilde{hT}) = \Delta t \left[(-S) \tilde{U}_j(\tilde{hT}) \right]^n - \frac{\Delta t^2}{2} \left[\tilde{U}_k \left(\frac{-Tu}{\tilde{N}} \right) \tilde{U}_j(\tilde{hT}) \right]^n \quad (130)$$

Logo, abrindo os termos, tem-se:

$$\Delta t \left[\left(- \int_{\Gamma} \tilde{N}^T \tilde{N} n_j d\Gamma \right) \tilde{U}_j(\tilde{hT}) \right]^n \quad (131)$$

$$-\frac{\Delta t^2}{2} \left[\tilde{U}_k \left(- \int_{\Gamma} N^T \frac{\partial N}{\partial x_j} n_k d\Gamma \right) \tilde{U}_j (\tilde{hT}) \right]^n \quad (132)$$

$$-\frac{\Delta t^2}{2} \left[\tilde{U}_k \left(- \frac{\partial N}{\partial x_j} \int_{\Gamma} N^T n_k d\Gamma \right) \tilde{U}_j (\tilde{hT}) \right]^n \quad (133)$$

Uma visualização geral de como é feito a programação e a simulação das equações utilizando o método de elementos finitos com o método CBS está na Figura 9.

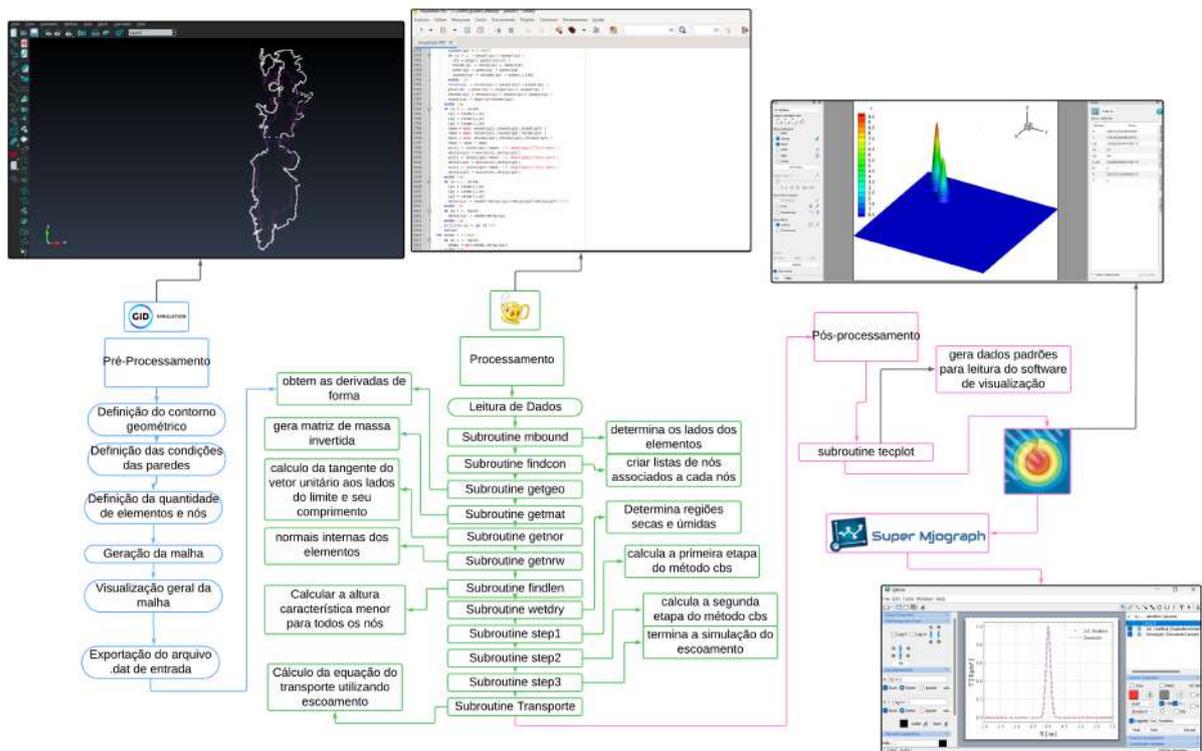


Figura 9 – Fluxograma completo do trabalho.

4.9 Cálculo do passo de tempo

O cálculo do passo de tempo é uma parte importante de qualquer algoritmo. Em uma abordagem de passo de tempo local, diferentes passos de tempo são usados em diferentes nós e a solução é acelerada para o estado estacionário. Usando o intervalo de tempo mínimo global, os cálculos para o estado estacionário levam muito mais tempo do que o procedimento de intervalo de tempo local. A seguinte abordagem de intervalo de tempo local é recomendada (NITHIARASU; CODINA; ZIENKIEWICZ, 2006):

$$\Delta t = \min(\Delta t_{\text{conv}}, \Delta t_{\text{diff}}) \quad (134)$$

onde

$$\Delta t_{\text{conv}} = \frac{h}{|\mathbf{u}_{\text{conv}}| + c} \quad (135)$$

e o limite da difusão é dado por:

$$\Delta t_{\text{diff}} = \frac{h^2}{2v} \quad (136)$$

O Δt calculado é multiplicado por um fator de segurança variando entre 0,1 e 1,0 dependendo do problema e da malha utilizada. Como os intervalos de tempo são calculados nos nós é necessário atribuir um tamanho de elemento apropriado, h , aos nós Eq. (61). Também é possível calcular os tamanhos dos elementos na direção do fluxo para melhorar a precisão. No entanto, a melhoria da precisão deve ser realizada às custas do cálculo do tamanho do elemento dependente do tempo (THOMAS; NITHIARASU, 2005).

5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

O modelo apresentado será validado neste trabalho através de dois casos testes: Ruptura circular de barragem e Rompimento parcial de barragem. Cada caso foi simulado usando um Δt em função de t que satisfaz o critério Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) Eq. (134). Um esquema CBS, será aplicado, de modo a satisfazer ambos testes, garantindo a limitação exigida pelos cálculos das velocidades de propagação.

5.1 Ruptura circular de barragem

Este caso é incluído para verificar a capacidade do modelo numérico CBS para simetria e resolução de choque em modelagem de escoamento de águas rasas. Compara-se os resultados apresentados por (BIK et al., 2002) e (YU; HUANG; WU, 2015), entre outros. Um domínio plano $40 \times 40m$, sem atrito é considerado.

Um cilindro de água com raio de $2,5m$, centrada no domínio, separa duas regiões onde o fluido permanece em repouso $u = v = 0$, no instante inicial $t = 0$. Na região dentro do cilindro, a altura é de $2,5m$, na região externa é de $0,5m$. Todos os contornos do domínio estão definidos como paredes reflexivas. As principais características investigadas neste caso são: a onda de rarefação e o salto hidráulico (onda de choque) incluindo uma condição de transição de escoamento subcrítico para supercrítico. O tempo total de simulação foi definido em $4,7s$. O domínio foi discretizado em 1.031.738 elementos triangulares (517.204 nós), a visualização do pré-processamento, pode ser vista nas Figuras 10 e 11. Após $0,1s$, a água começa a se mover radialmente em todas as direções Figura 12. Aos $0,4s$, a onda de choque propagou-se para fora, enquanto a onda circular de rarefação viajou para dentro, mostrando que esta onda quase atinge a lâmina inicial de água situado no centro do domínio, na Figura 12.

Este fenômeno continuou até que a onda de rarefação mergulhou totalmente no centro do domínio em aproximadamente $0,8s$ Figura 13. Esta onda foi repentinamente refletida, criando um gradiente acentuado de elevação da superfície da água. Aos $1,6s$, a onda de choque circular continua a se propagar radialmente a partir do centro do domínio, enquanto a onda de rarefação refletida agora faz a elevação de água

reduzir-se para baixo da profundidade inicial de $0,5m$ Figura 13.

Deste último efeito, resulta do desenvolvimento de uma onda de choque circular secundária, abaixo da profundidade de $0,5m$. A onda de choque circular primária

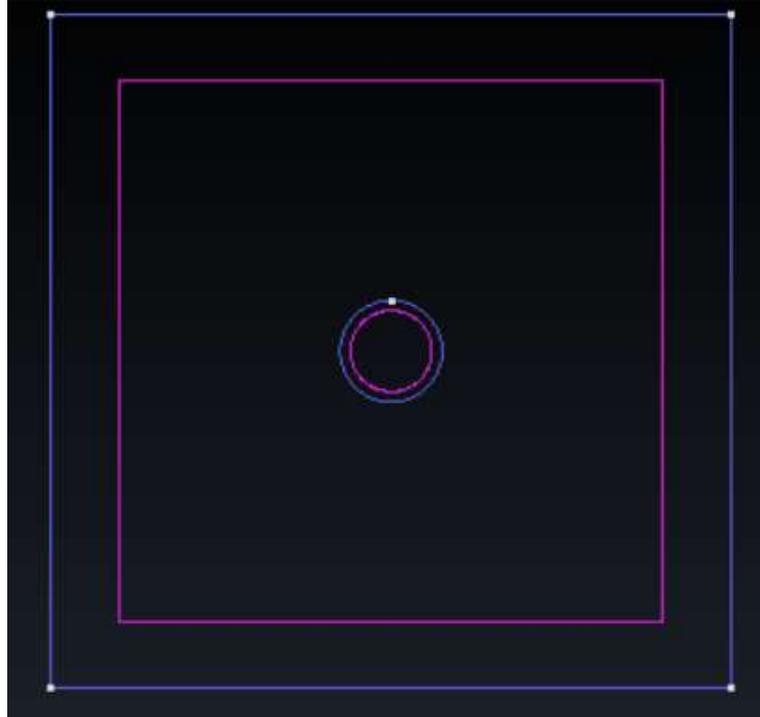


Figura 10 – Definição do domínio no GiD.

Fonte: Dos Autores.

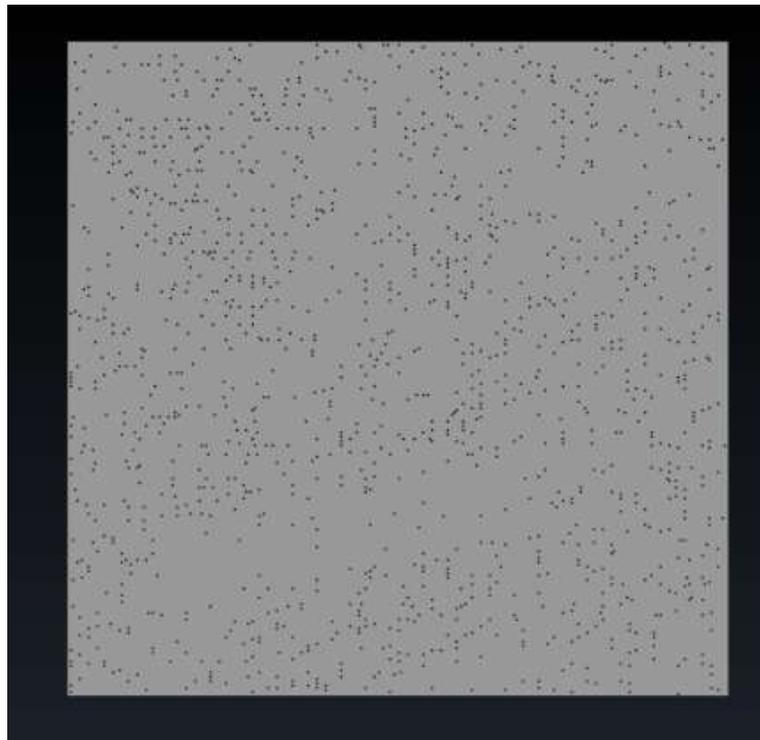


Figura 11 – Discretização utilização elementos triangulares.

Fonte: Dos Autores.

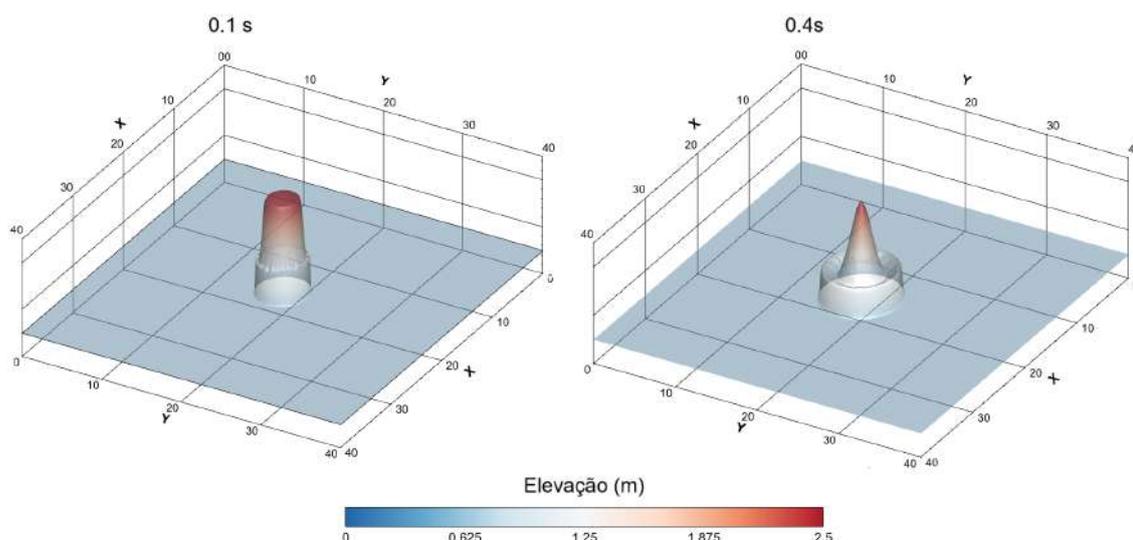


Figura 12 – Evolução temporal da onda entre 0,1s e 0,4s.

Fonte: Dos Autores.

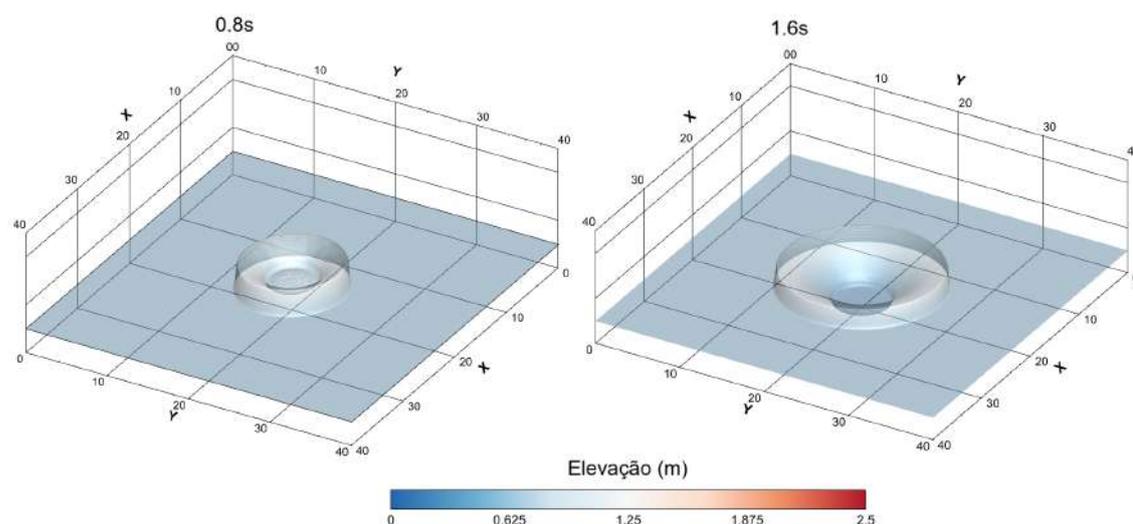


Figura 13 – Evolução temporal da onda entre 0,8s e 1,6s.

Fonte: Dos Autores.

continua propagando-se para fora do centro do domínio em 3,8s (ver Figura 14) e, também, a onda de choque circular secundária recentemente criada desloca-se em direção ao centro. Aos 4,7s, é mostrado que a onda circular primária quase atingiu o limite do domínio e neste momento um gradiente muito acentuado de elevação da superfície da água foi criado perto desse limite Figura 14.

Além da malha de 1.031.738 de elementos, a mesma simulação foi também realizada utilizando-se outras duas malhas menos refinadas: 90.000 e 160.000 elementos triangulares, para fins de análise de convergência, conforme mostrado na Figura 15. Ou seja, à medida que aumenta-se o refinamento da malha, maior é a proximidade da solução aproximada à analítica, neste escoamento descontínuo. Isto mostra a eficácia e consistência numérica aferida nas simulações.

O tempo de simulação para o computador com Intel(R) Core(TM) i5-1135G7

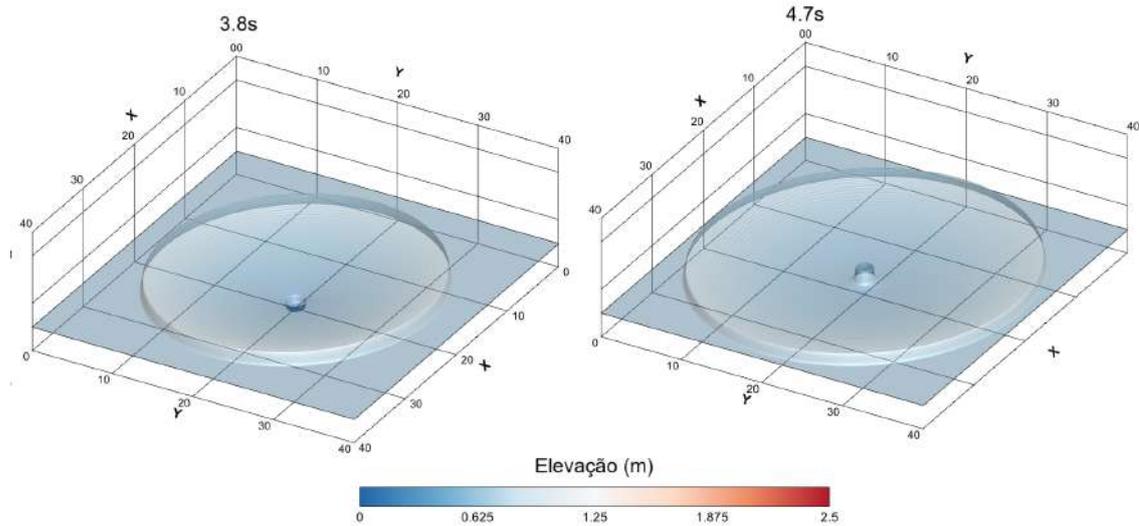


Figura 14 – Evolução temporal da onda entre 3,8s e 4,7s.

Fonte: Dos Autores.

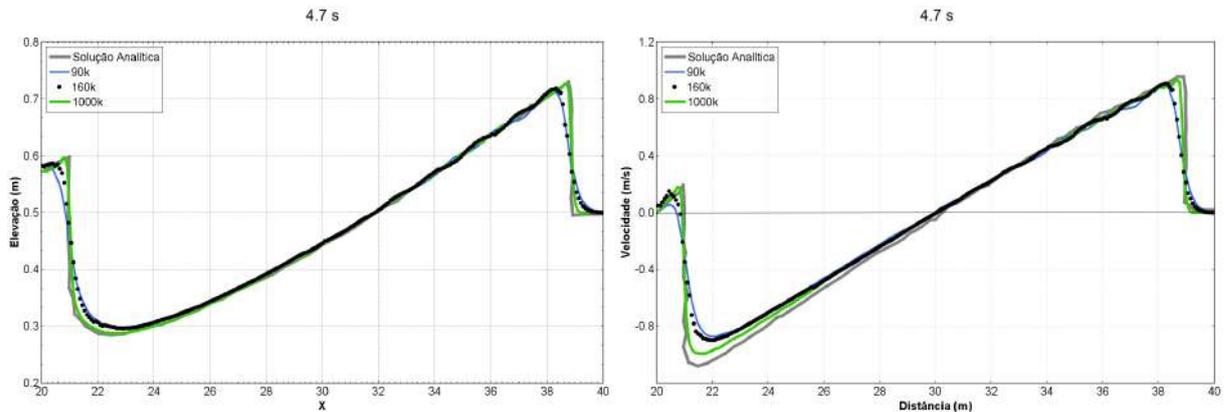


Figura 15 – Verificação no tempo 4,7s.

Fonte: Dos Autores.

2.40GHz, foi de aproximadamente 5 minutos.

5.2 Rompimento parcial de barragem

Os escoamentos torrenciais devido ao rompimento de barragem e diques são frequentemente bidimensionais. Nosso objetivo aqui é verificar a capacidade do modelo proposto reproduzir a propagação bidimensional de inundações na presença de frente descontínua da altura da água e da velocidade. Considera-se o escoamento torrencial devido à ruptura assimétrica de barragens. Este problema, que foi proposto por Fennema em (FENNEMA; CHAUDHRY, 1990), é amplamente utilizado por muitos pesquisadores para validar seus modelos de rompimento de barragens. O nosso interesse particular é que sua solução seja caracterizada por:

Primeiro: uma onda de choque que se propaga a jusante aumentando abruptamente a altura da água e é modificada por uma onda de reflexão (quando colide com

a parede);

Segundo: uma onda de rarefação (depressão), que se move domínio acima, diminuindo a altura da água, muitas vezes descrito como um choque de rarefação.

A área de estudo é uma bacia com $200m$ de largura e $200m$ de comprimento e tem fundo plano. A água fica retida no lado esquerdo da bacia. Supõe-se que em $t = 0s$ o sistema está parado. Subtamente, para $t > 0$ o reservatório da barragem se rompe parcialmente e assimetricamente ao longo de um comprimento de $75m$. A espessura da barragem é de $10m$ na direção do escoamento. A Figura 16 fornece uma descrição geométrica deste problema. Deve-se notar que não há solução analítica para este problema bidimensional, mas os resultados podem ser comparados com outros esquemas numéricos como (FUJIHARA; BORTHWICK, 2000).

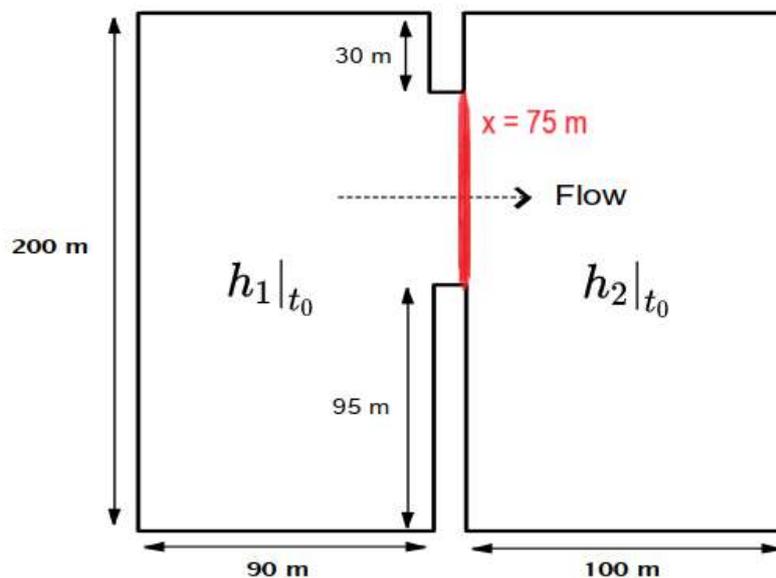


Figura 16 – Rompimento parcial da barragem: Geometria da bacia.

Fonte: (LAKHLIFI; DAOUDI; BOUSHABA, 2018)

Uma proporção de $\frac{h_2}{h_1} = 0,5$ é assumida em $t = 0$. Inicialmente é fixado em $h_1 = 10m$ a altura da água no reservatório e $h_2 = 5m$ a altura da água na jusante da barragem. Supõe-se que a água da bacia esteja em repouso no estado inicial. Nesta simulação, o fundo tem atrito com coeficiente de Manning utilizado de $0,03s/m^{1/3}$ (coeficiente de rugosidade do leito).

O domínio estudado foi inicialmente discretizado com 44877 nós e 88702 triângulos cujos tamanhos são regularmente fixado em $1m$, o intervalo de tempo $\Delta t = 0.0001s$ é escolhido tal que a condição de estabilidade seja satisfeita. No instante do rompimento da barragem $t = 0$, a água é liberada através da comporta de $75m$ de largura.

As Figura 17 mostram os resultados em $8s$. Nestas figuras mostra-se as superfícies livres tridimensionais e as isolinhas da altura da águas. Pode-se observar que o escoamento em movimento para a direita se propaga para cima e para baixo. A onda

de rarefação se propaga para montante e dois vórtices fracos assimétricos são desenvolvidos em ambos os lados externos da barragem. É evidente que com o uso de malhas refinadas a alta resolução é obtida automaticamente naquelas regiões onde os gradientes da profundidade da água são elevados, como as frentes de choques móveis. Aparentemente, o escoamento geral para este exemplo é preservado sem difusão numérica excessiva nos resultados.

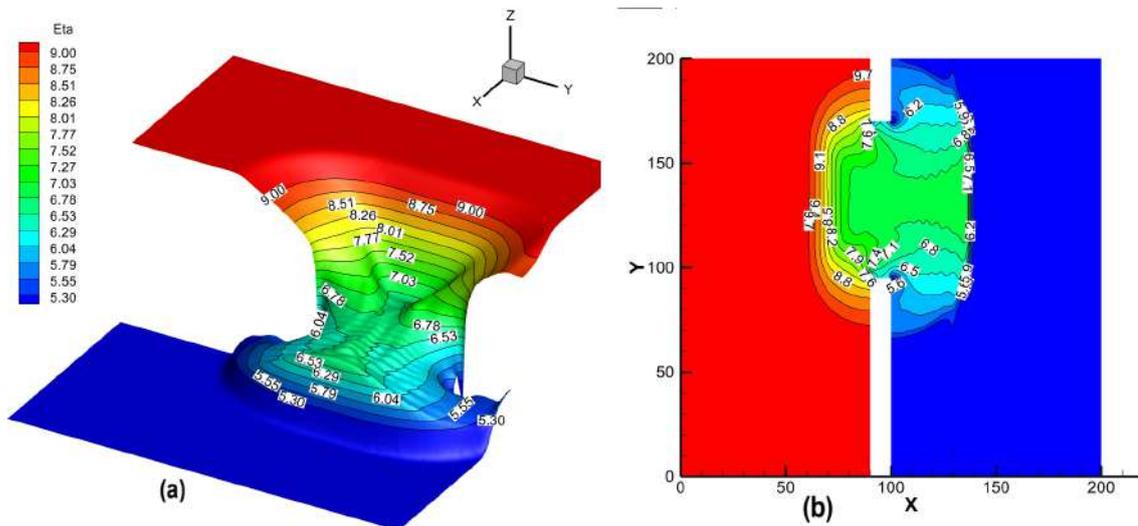


Figura 17 – Visualização da a) superfície livre tridimensional e das b) curvas de nível.

Fonte: Dos Autores.

Os resultados gerados pelo autor parecem ser muito semelhantes aos apresentados pelos estudos existentes e mencionados anteriormente. Nota-se também um ligeiro encolhimento do espaço livre na superfície à frente da onda. Este aumento também é observado nos resultados apresentados por Fennema e Chaudhry, sem viscosidade artificial (FENNEMA; CHAUDHRY, 1990). Nas Figuras 18 e 19, apresenta-se as seções transversais de h e u em $y = 135,5m$ no tempo $t = 4s$. Em primeiro lugar, a partir destes números pode-se ver que a solução numérica obtida usando elementos triangulares é consistente com os resultados obtidos pelas referências. Avaliando tanto a velocidade quanto a elevação de onda, nota-se, que u tem uma descontinuidade que é captada pelo nosso modelo.

O tempo de simulação para o computador com Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 2.40GHz, foi de aproximadamente 10 minutos.

5.3 Rompimento parcial de barragem com células secas

O domínio computacional $x = [0, 1]$ e, $y = [0, 0.5]$, (a parte espacial é medida em metros e a temporal em segundos), foi subdividido em uma malha não estruturada de 284864 células triangulares e 143383 nós. Na simulação, o contorno é definido como reflexivo (KOCAMAN; OZMEN-CAGATAY, 2015). Além disso, para fins de validação

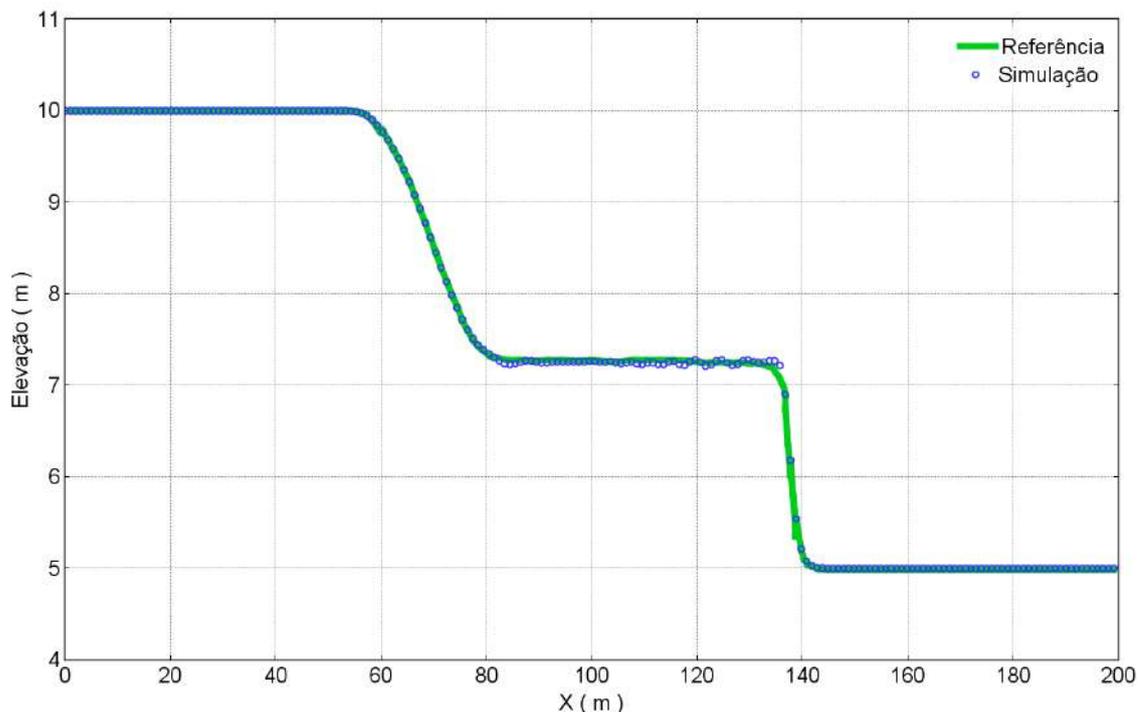


Figura 18 – Verificação numérica da elevação de água em $t = 4,7s$ e $y = 135,5m$

Fonte: Dos Autores.

do código, são verificadas comparações com experimentos e com simulações. A simulação de águas rasas realizada por (KOCAMAN; OZMEN-CAGATAY, 2015), será nomeada como SWE e servirá como uma referência para esta parte do trabalho. Um volume constante de fluido com dimensões de $0,25 \times 0,50 \times 0,15$ m para a representação de um reservatório foi atribuído como condição inicial e o tempo em segundos Figura 20.

Uma vez estabelecidas as condições iniciais e de contorno, o modelo foi aplicado em três diferentes casos de η para $x \geq 0,25$.

Caso D1 : Considera-se $\eta = 0,00$, e coeficiente de Manning $0,025$.

Caso W1: Considera-se $\eta = 0,015$, e coeficiente de Manning $0,03$.

Caso W2: Considera-se $\eta = 0,030$, e coeficiente de Manning $0,04$.

Claro, podemos refinar essa explicação para torná-la mais clara e precisa. A razão para o uso de diferentes coeficientes e níveis de água, representados por D1, W1 e W2, é proporcionar uma variedade de cenários que abrangem desde situações extremas até condições mais realistas para a simulação de fluxo em águas rasas.

O caso extremo D1 representa um leito seco com pouco atrito, o que pode ser desafiador para a simulação usando as equações das águas rasas devido à falta de água. Este cenário é útil para explorar os limites do modelo e compreender sua capacidade de lidar com condições adversas.

No caso intermediário W1, há uma quantidade moderada de água e um atrito maior, o que contribui para uma simulação mais realista. Este cenário é valioso para

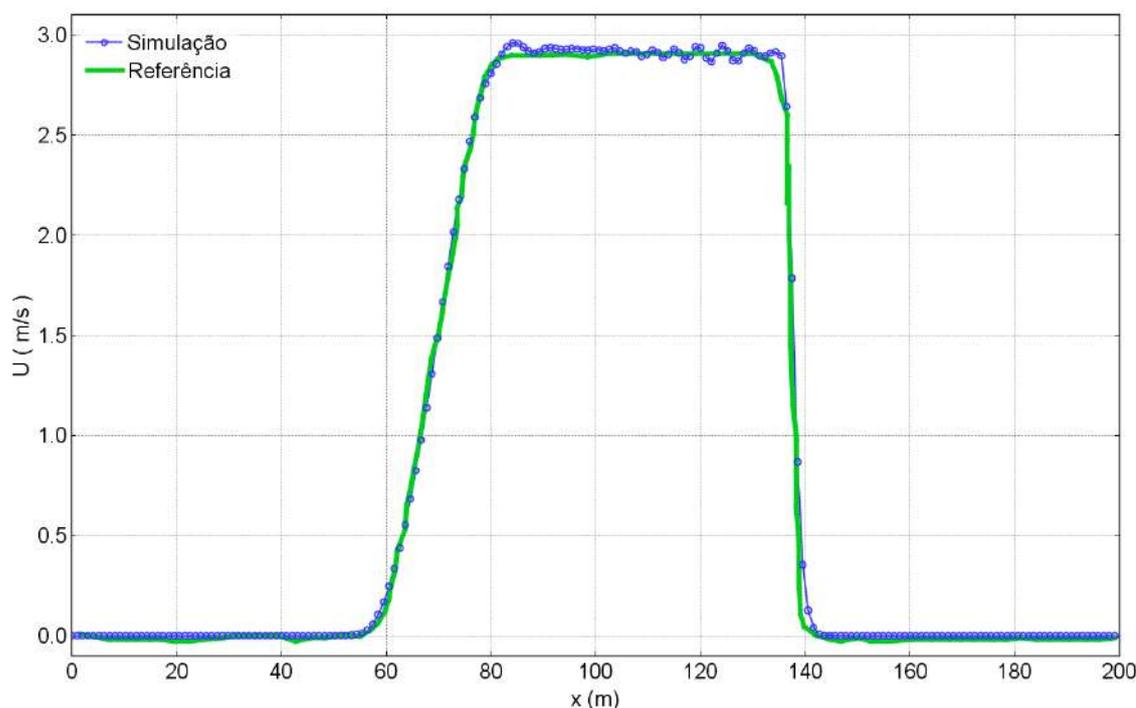


Figura 19 – Verificação numérica da velocidade U em $t = 4,7s$ e $y = 135,5m$

Fonte: Dos Autores.

aprimorar a qualidade dos dados obtidos na simulação, proporcionando um equilíbrio entre complexidade e precisão.

Por fim, o caso W2 representa uma situação ideal para a simulação de águas rasas, onde o leito está molhado e o coeficiente de Manning reflete as características físicas típicas de um experimento real. Essa configuração oferece uma oportunidade para validar o modelo em condições mais próximas da realidade e obter resultados mais confiáveis. Nas Figuras 21, 22 e 23 mostra-se o comportamento do escoamento nos casos D1, W1 e W2, respectivamente. Observa-se um bom comportamento físico, já que com o aumento da lâmina de água também ocasiona o aumento da velocidade.

Para auxiliar na análise do escoamento foram dispostos cinco sensores (ver Figura 24).

Em P1, (ver Figuras 25, 26 e 30), os resultados experimentais e numéricos tiveram um comportamento bem semelhante. Depois de $t = 5,5s$, o nível da água aumentou ligeiramente devido à frente de onda refletida. Uma pequena discordância ocorreu em P1 para todas as fases entre os resultados experimentais e numéricos.

Deve-se considerar que os gráficos do sensor P2 em todos os experimentos deram resultados errôneos entre o intervalo de tempo $0 < t < 2$, pois o sensor não conseguiu ler as profundidades corretamente (KOCAMAN; OZMEN-CAGATAY, 2015), tem-se uma amenização nesses erros conforme se aumenta a lâmina de água. O tempo de resposta do sensor e as curvas da frente do escoamento foram consideradas prováveis causas da discordância citada acima. A simulação no intervalo $2 < t < 4$, em P2,

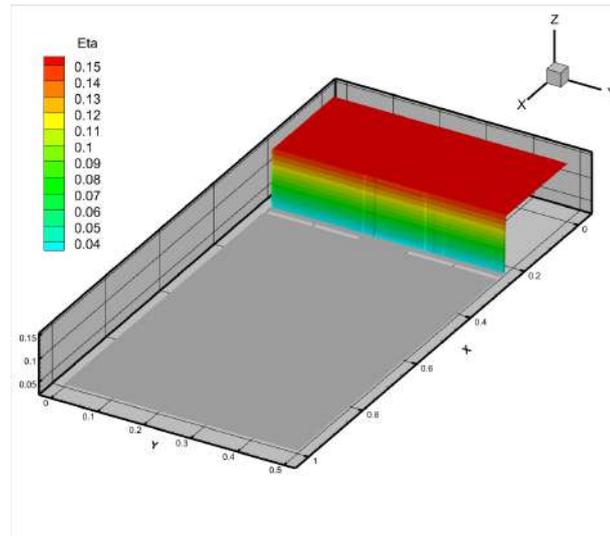


Figura 20 – Volume do fluido e dimensões.

Fonte: Dos Autores.

teve bons resultados, principalmente por não ocorrer praticamente o salto hidráulico que ocorre no experimento e no SWE. Os picos observados no intervalo $4 < t < 10$ se formam devido à passagem das ondas, depois ocorreu uma diminuição gradual nos resultados experimentais e computados devido ao volume finito do reservatório.

Quanto ao sensor P3, no experimento *D1*, a simulação teve uma divergência no intervalo $0 < t < 2$ devido ao fato de este sensor está na região de interação de células secas e molhadas. Pode-se, possivelmente, amenizar esse erro, aumentando a difusão numérica. Um aumento acentuado foi observado nos resultados assim que a onda refletida atingiu o P3 ($1 < t < 2$). Os dados experimentais estão de acordo com os dados numéricos para o intervalo de tempo $2 < t < 10$ segundos, enquanto uma discordância foi observada até $t = 4s$. Depois disso, os resultados experimentais estavam em boa concordância em geral, enquanto pequenas oscilações devido a reflexões das ondas nas paredes.

O comportamento na fase inicial do sensor P4 foi semelhante ao P3, e os resulta-

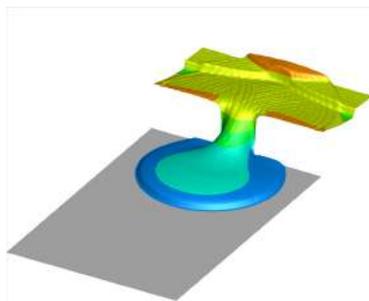


Figura 21 – Interação do escoamento com domínio de células secas.

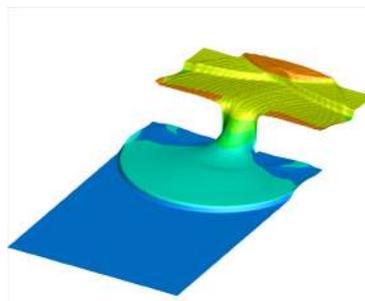


Figura 22 – Interação do escoamento com lâmina de água 0.015m.

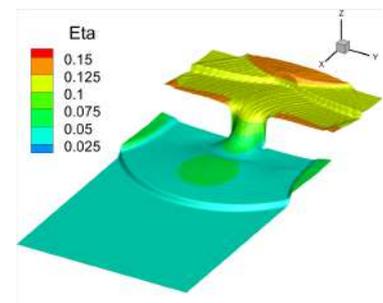


Figura 23 – Interação do escoamento com lâmina de água 0.03m

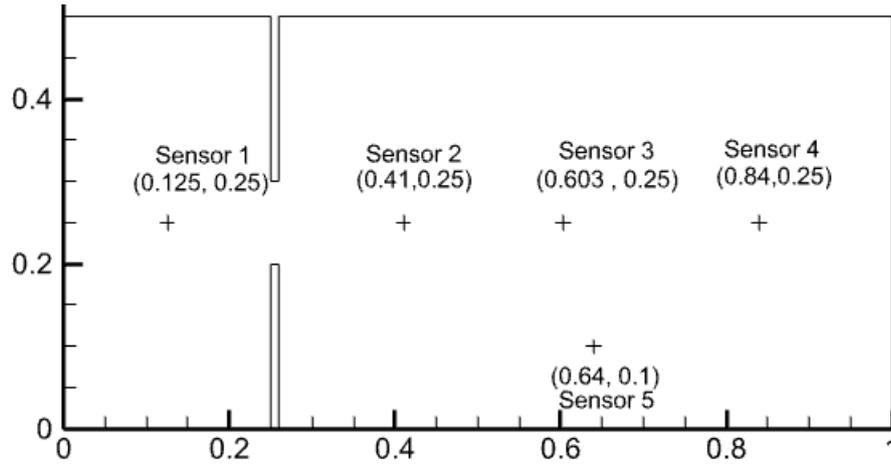


Figura 24 – Domínio e disposição dos sensores.

Fonte: Dos Autores.

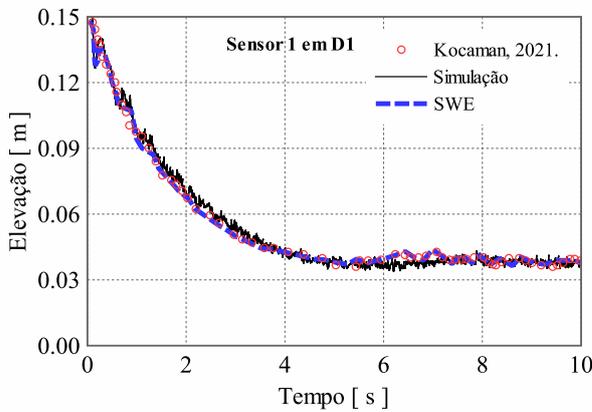


Figura 25 – Sensor P1 - Experimento D1.

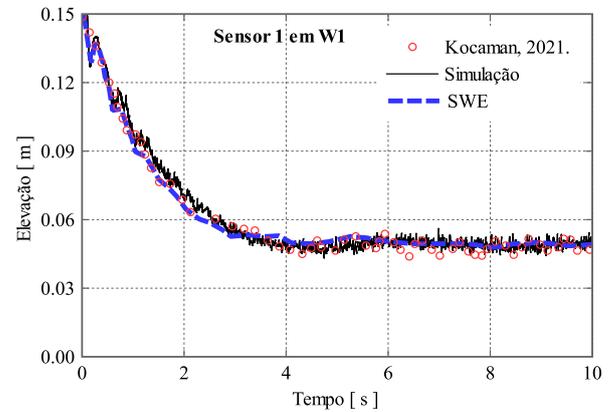


Figura 26 – Sensor P1 - Experimento W1.

dos medidos novamente apresentam uma diferença entre os experimentais. O salto hidráulico ocorreu exatamente como na sonda anterior, no exemplo (5.1), trata-se como resolver um tipo de descontinuidade semelhante. Observa-se que os sensores também tiveram dificuldade em captar com exatidão o comportamento da frente de onda, que ocorre no $1 < t < 3$. Mais ondulações foram observadas em comparação com o sensor P2 e P3. O comportamento na fase inicial do sensor P4 foi semelhante ao P3, e os resultados medidos novamente apresentam uma diferença entre os experimentais. O salto hidráulico ocorreu exatamente como na sonda anterior, no exemplo (5.1), trata-se como resolver um tipo de descontinuidade semelhante. Observa-se que os sensores também tiveram dificuldade em captar com exatidão o comportamento da frente de onda, que ocorre no $1 < t < 3$. Mais ondulações foram observadas em comparação com o sensor P2,P3.

Em contraste, os resultados foram diferentes comparando os tipos de casos, em D1 (célula seca) no intervalo de tempo $0 < t < 2$ há uma descontinuidade e logo após a simulação entra em concordância com os dados experimentais. Já para W1 e W2, há duas grandes variações na altura de onda no intervalo $0 < t < 2$, isso era

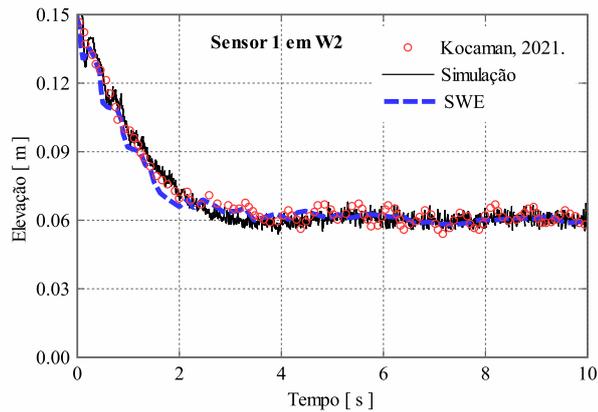


Figura 27 – Sensor P1 - Experimento W2.

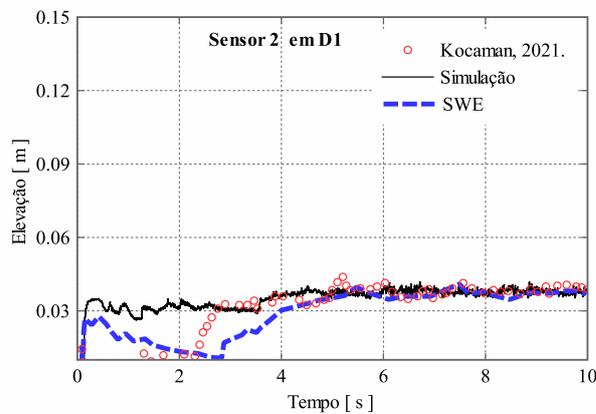


Figura 28 – Sensor P2 - Experimento D1.

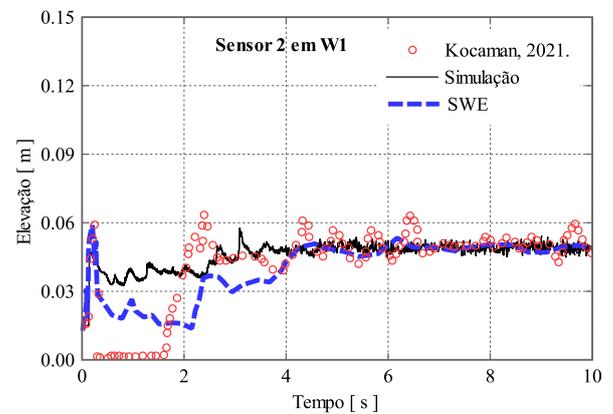


Figura 29 – Sensor P2 - Experimento W1.

de se esperar devido ao fato de haver uma lâmina de água nesses dois casos. Outro ponto é que a medida que aumentamos a altura de água, embora pequena variação (de $0,015m$ para $0,03$) há uma divergência no SWE em representar W1, W2, já para a simulação presente houve um comportamento semelhante em todos os casos. Essa divergência se dá ao fato do SWE ser muito sensível as frentes de ondas refletidas.

É perceptível que as cristas das ondas são mais nítidas do que para o teste W1, e a forte quebra das ondas não pode ser vista aqui, uma vez que a altura residual da água é mais alta no teste W2. Pode-se dizer que o aumento do nível da água causou cristas de ondas menores e menos quebra de onda. Comportamento semelhante foi observado em um estudo anterior (KOCAMAN; OZMEN-CAGATAY, 2015). A concordância dos resultados da simulação com os resultados medidos foi melhor em P1. Com o aumento das ondulações, os resultados da simulação discordaram dos resultados experimentais.

O tempo de simulação para o computador com Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 2.40GHz, foi de aproximadamente 30 minutos.

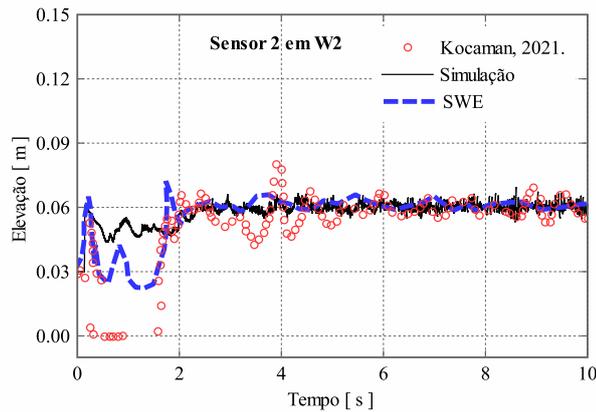


Figura 30 – Sensor P2 - Experimento W2.

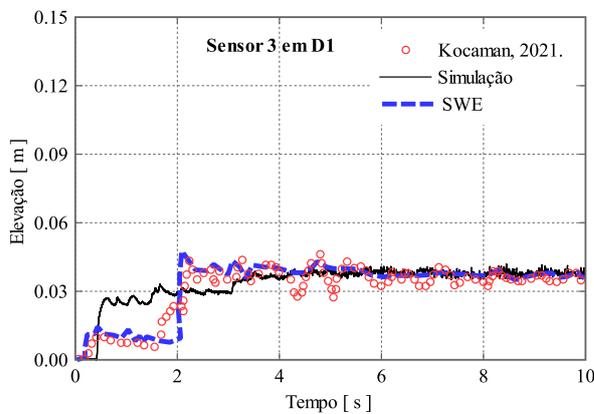


Figura 31 – Sensor P3 - Experimento D1.

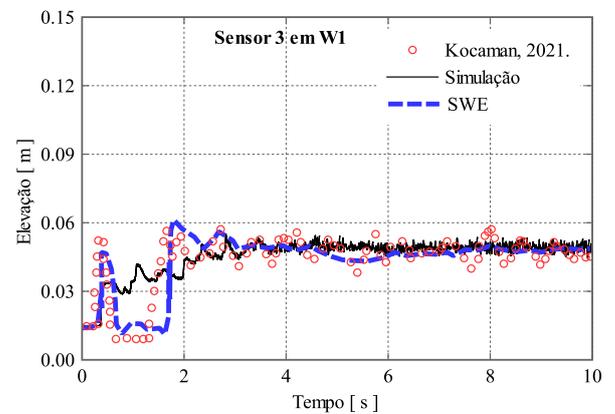


Figura 32 – Sensor P3 - Experimento W1.

5.4 Advecção de poluentes em domínio quadrado

O problema teste, retirado de (LI; DUFFY, 2012), é descrito como pura advecção de contaminante em uma cavidade quadrada. No presente trabalho, a topologia é assumida como suave e plana e não há forças de atrito. O domínio computacional é um canal quadrado de $9 \text{ km} \times 9 \text{ km}$, que é discretizado com uma grade não-uniforme e não estruturada. Um fluxo uniforme com $u = v = 0,5 \text{ m/s}$ e $h = 0,2485 \text{ m}$ é imposto em todo o domínio. A concentração inicial do poluente é dada pela seguinte superposição de distribuições gaussianas, escolhidas pois são casos validados pela literatura de (LI; DUFFY, 2012):

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 e^{-\frac{d_1^2}{\delta_1^2}} + \phi_2 e^{-\frac{d_2^2}{\delta_2^2}} \\ d_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ d_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \end{aligned} \quad (137)$$

Os parâmetros para a concentração inicial foram escolhidos da seguinte forma:

$$x_1 = y_1 = 1400m \quad x_2 = y_2 = 2400m \quad \phi_1 = 10 \quad \phi_2 = 6.5 \quad \delta_1 = \delta_2 = 264$$

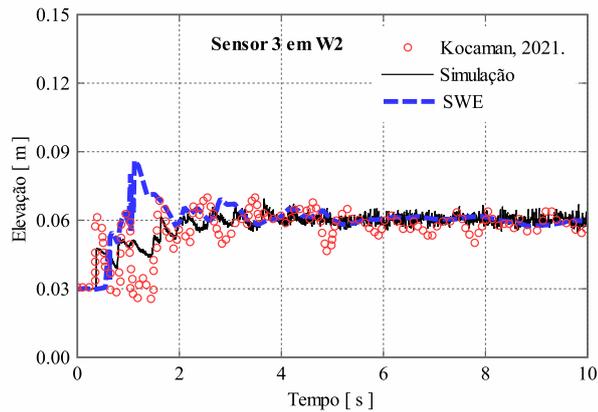


Figura 33 – Sensor P3 - Experimento W2.

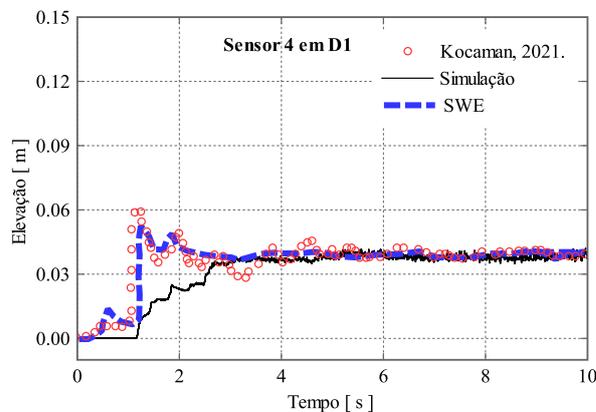


Figura 34 – Sensor P4 - Experimento D1.

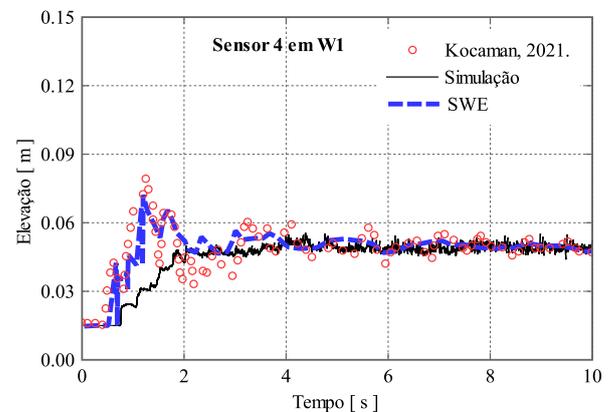


Figura 35 – Sensor P4 - Experimento W1.

As condições características de entrada e saída são aplicadas nos limites. A solução exata da concentração do poluente se move diagonalmente através do domínio com velocidade constante, enquanto sua forma deve ser preservada para sempre. As Figuras 40 - 45 ilustram os resultados computados deste caso teste comparados com a solução teórica (LI; DUFFY, 2012) em diferentes momentos. Para verificar esses resultados, foi utilizado uma malha com 298036 elementos ou 149739 nós, para o caso completo de $t = 15s$, precisou-se de aproximadamente 30 minutos, para um computador com processador 11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 @ 2.40GHz 2.42 GHz e memória RAM de 8 GB para completar a simulação. Como visto, os resultados computados não apresentam erros significativos de dispersão e, portanto, concordam muito bem com os valores teóricos.

5.5 Difusão em domínio quadrado

A difusão de uma distribuição gaussiana de contaminantes em águas paradas é considerada aqui para examinar a precisão da metodologia atual na simulação numérica da difusão. Um domínio quadrado variando de $-2m < x < 2m$ e $0m < y < 1m$ com fundo plano e liso é assumido como o domínio computacional. Considerando

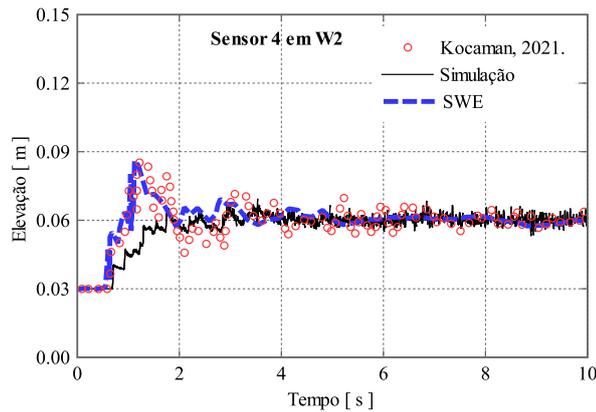


Figura 36 – Sensor P4 - Experimento W2.

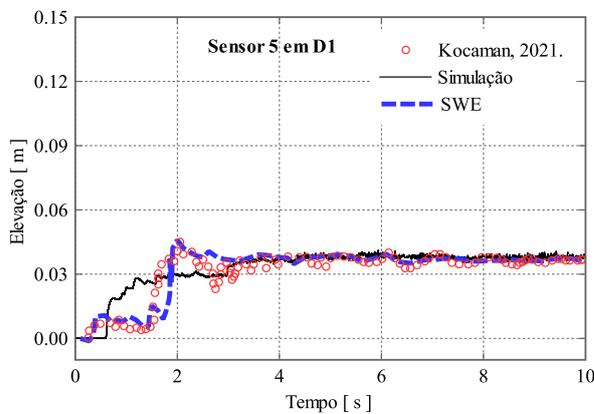


Figura 37 – Sensor P5 - Experimento D1.

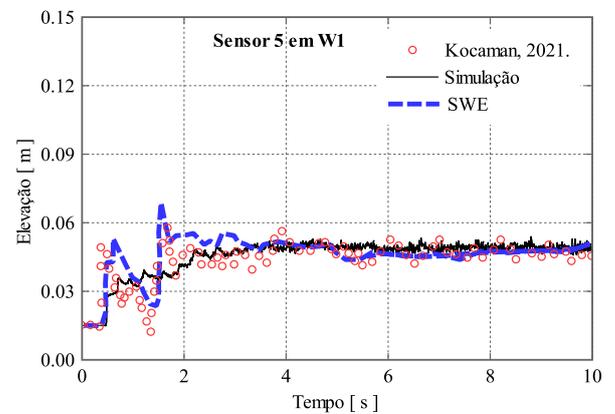


Figura 38 – Sensor P5 - Experimento W1.

uma profundidade de água constante de $h = 0,01m$ com as componentes da velocidade iguais a zero. A distribuição inicial do contaminante é uma distribuição gaussiana centrada em $x_0 = y_0 = 0$ com valor máximo de 1 e desvio padrão de $\sigma = 0,1$ e é dada por:

$$T(x, y, 0) = e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\sigma^2}} \quad (138)$$

A solução analítica para esse problema é dada em (GUO et al., 2011) pela equação:

$$T(x, y, t) = \frac{\sigma^2}{4Dt + \sigma^2} e^{\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt + \sigma^2} - \frac{(y-y_0)^2}{4Dt + \sigma^2}\right]} \quad (139)$$

onde o coeficiente de difusão isotrópica é $D = 0,01$. Os cálculos são realizados em uma malha não estruturada com 367800 elementos triangulares ou 184701 nós, e calculados no intervalo de tempo em segundos $0 < t < 15$. Nas Figuras (46 - 51) são mostradas as distribuições numéricas e teóricas dos contaminantes em vários instantes de tempo. As Figuras 47, 49, 51 ilustram os contornos do contaminante.

A Figura 50 mostra as taxas numéricas e analíticas de difusão do contaminante em dois pontos dentro do domínio. Como pode ser observado neste caso de validação, obtém-se uma excelente concordância.

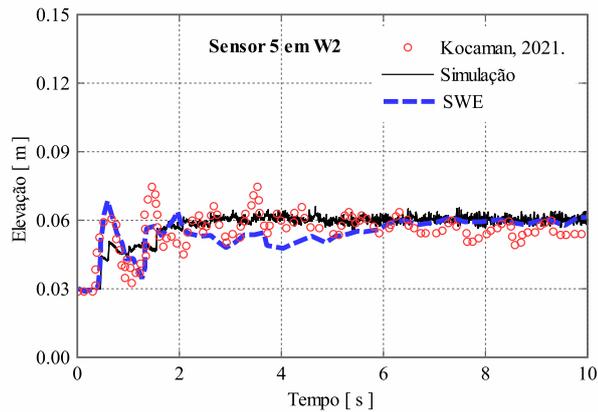


Figura 39 – Sensor P5 - Experimento W2.

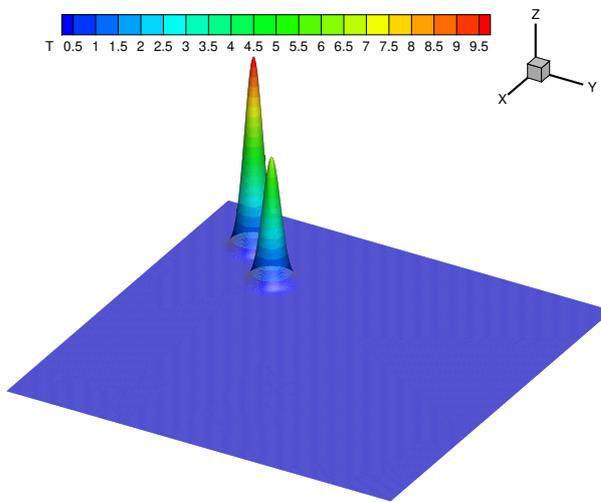


Figura 40 – Simulação 3D no tempo $t = 0$ s.

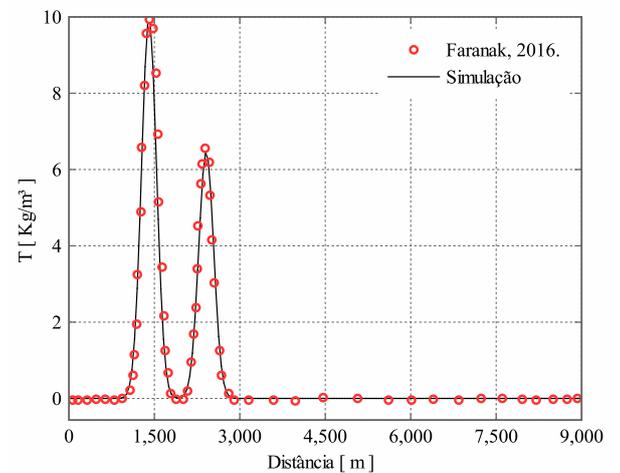


Figura 41 – Comparação da simulação com a solução analítica em $t = 0$ s.

5.6 Estudo de caso – barragem Santa Bárbara Pelotas/RS

A construção da barragem de Santa Bárbara, um feito da engenharia finalizado em 1968, tinha como principal propósito mitigar a propagação de ondas de cheia, protegendo assim a área urbana situada na bacia. Junto ao vertedouro da barragem, encontra-se um canal de drenagem artificial, planejado e construído simultaneamente à barragem para direcionar o escoamento da bacia para o canal São Gonçalo. Com uma extensão de 15 km e uma declividade média de 1%, a região da cidade atravessada pelo canal enfrenta frequentemente problemas de inundação, devido às suas características físicas e topográficas de alta vulnerabilidade (SILVA, 2007). A Figura 54 mostra o contorno da barragem.

Para o caso teste foi considerado um rompimento na zona A (em vermelho) na Figura 54, que no plano representa uma reta que passa pelas coordenadas ($x = 750$ e $y = 4400$) e ($x = 1000$ e $y = 4400$), ou seja, um rompimento de aproximadamente 250m. Este local é extremamente importante, pois é o vertedouro que é utilizado em casos de cheia da barragem e também é uma estrutura de concreto desenvolvida há

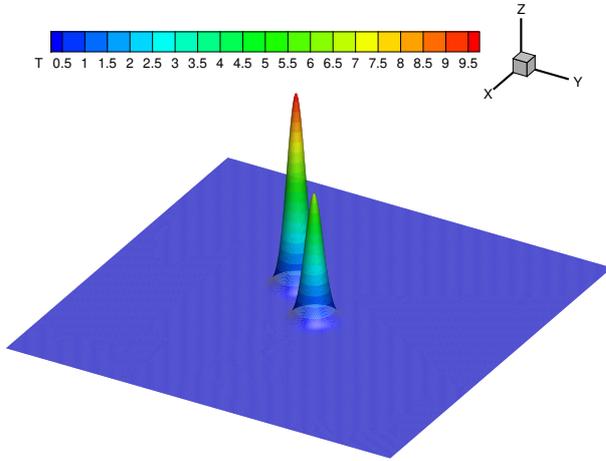


Figura 42 – Simulação 3D no tempo $t = 4800$ s.

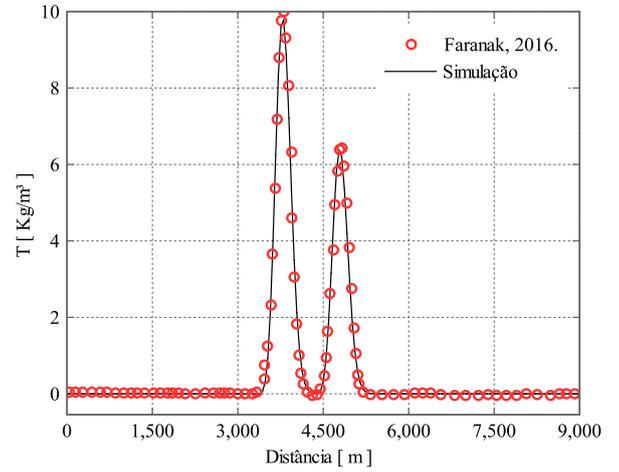


Figura 43 – Comparação da simulação com a solução analítica em $t = 4800$ s.

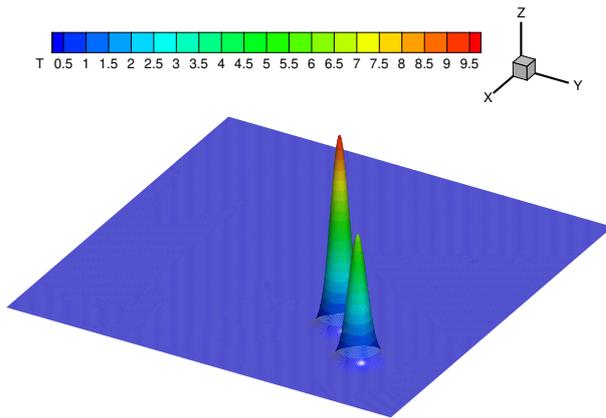


Figura 44 – Simulação 3D no tempo $t = 9600$ s.

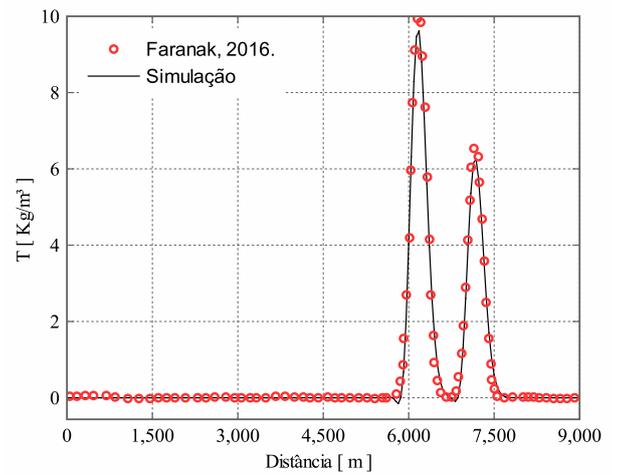


Figura 45 – Comparação da simulação com a solução analítica em $t = 9600$ s.

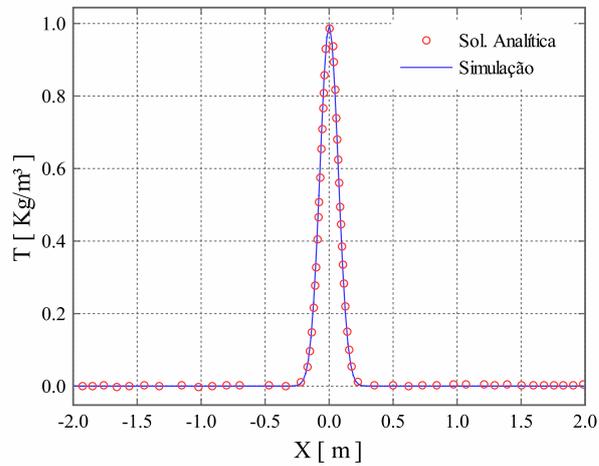


Figura 46 – Distribuição da concentração para o teste de difusão em $t = 0s$.

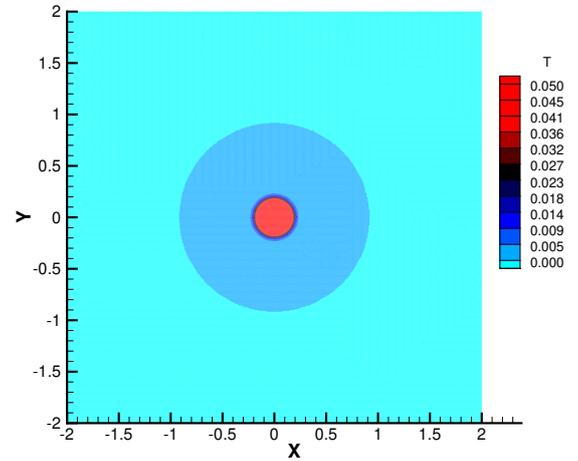


Figura 47 – Contorno da concentração para o teste de difusão em $t = 0s$

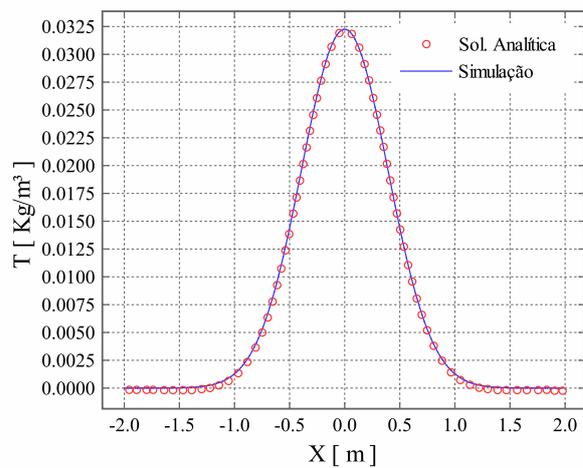


Figura 48 – Distribuição da concentração para o teste de difusão em $t = 7,5s$.

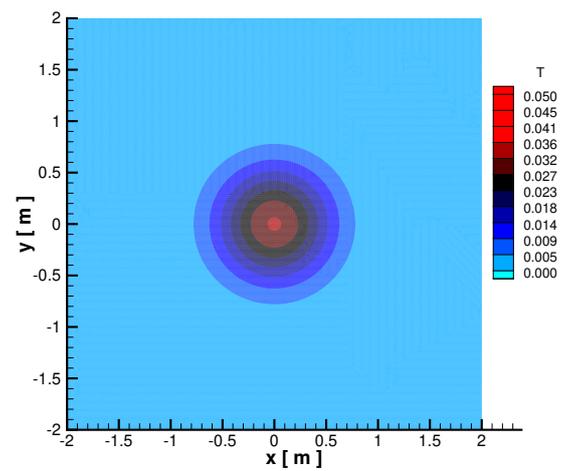


Figura 49 – Contorno da concentração para o teste de difusão em $t = 7,5s$

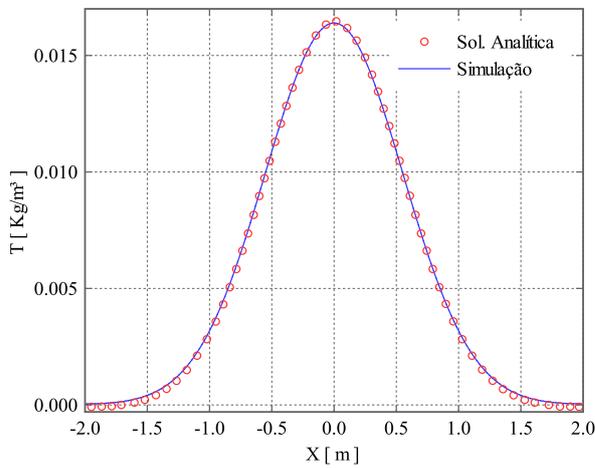


Figura 50 – Distribuição da concentração para o teste de difusão em $t = 15s$.

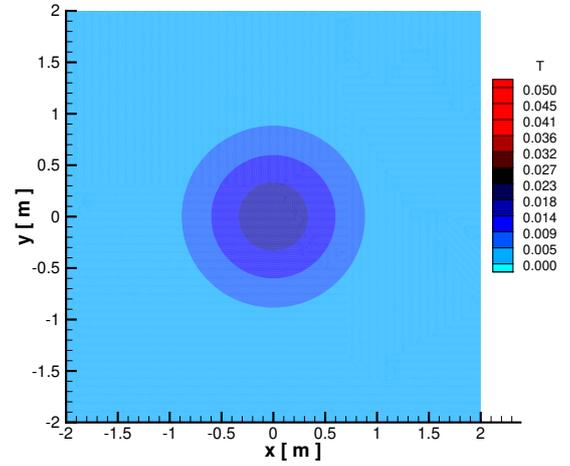


Figura 51 – Contorno da concentração para o teste de difusão em $t = 15s$

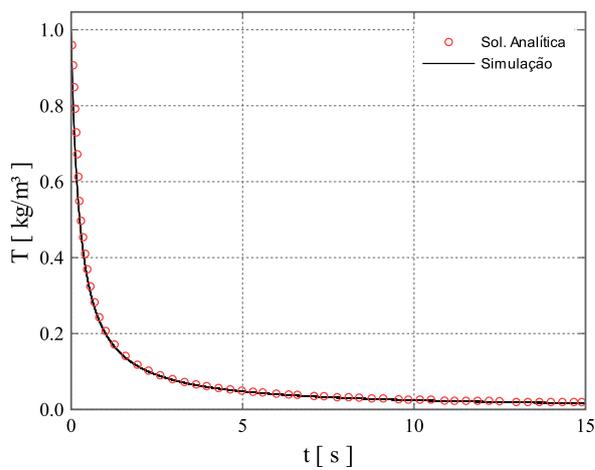


Figura 52 – Nível de concentração para o teste de difusão em $x = 0$ e $y = 0$.

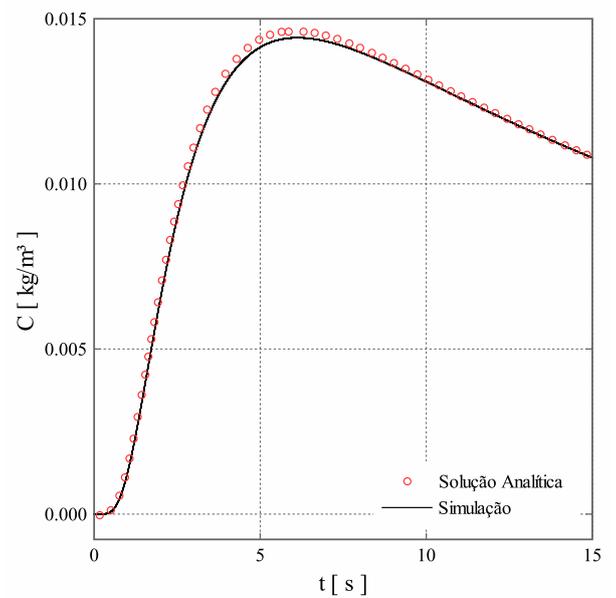


Figura 53 – Nível de concentração para o teste de difusão em $x = 0,5$ e $y = 0$

mais de 50 anos.

Na simulação é utilizada uma malha com 326650 elementos triangulares, 165952 nós e contorno reflexivo. Adota-se: em $t = 0s$, a profundidade dentro da barragem (montante) de $5m$ e de $0m$ na área externa (jusante); coeficiente de Manning de $0,01 s/m^{1/3}$; e coeficiente de difusão $K = 0,1$. Além disso, ao acoplar a equação do transporte para verificar o comportamento de algum poluente na barragem é necessário uma condição inicial, ou seja, a concentração inicial do poluente é dada pela seguinte superposição de distribuições gaussianas:

$$T(x, y, t = 0) = \phi_1 e^{-\frac{d_1^2}{\delta_1^2}} + \phi_2 e^{-\frac{d_2^2}{\delta_2^2}}$$

$$d_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$
(140)

As constantes acima são escolhidas da seguinte forma:

$$x_1 = 855m, \quad y_1 = 4854m, \quad x_2 = 1351m,$$

$$y_2 = 5142m, \quad \phi_1 = 10, \quad \phi_2 = 6.5, \quad \delta_1 = \delta_2 = 264.$$

Portanto o comportamento do transporte é satisfatório, pois se movimenta conforme o escoamento e se acumula em algumas regiões conforme a Figura 56.

No entanto, nem todas as informações necessárias para a realização das simulações encontram-se disponíveis publicamente ou são conhecidas, como é o caso da batimetria e dos fluxos de entrada e de saída. Para simular $1300s$ o computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 2.40GHz precisou de 4 horas.

Para a Figura 55 observa-se o comportamento do escoamento que se desloca do sentido de cima para baixo (com relação ao plano xy), ou seja, para simular o rompimento é feito um desnível de água onde a parte acima está com $5m$ de água e a parte abaixo está com $0,5m$ (considera-se o leito molhado) já que a região é um banhado. Nota-se que as velocidades seguem a direção desejada, com a variação do domínio, isso é evidenciado na Figura 55 no $t = 0$, onde há um estreitamento do canal e conseqüentemente um aumento da velocidade. O escoamento também é refletido nesse contornos.

Uma característica peculiar desta barragem é sua dimensão e topografia, que a tornam semelhante a uma bacia natural. Grande parte da sua extensão mantém seu relevo original, sem alterações significativas feitas pelo homem. Isso resulta em áreas onde a água se acumula, dificultando o escoamento em direção à unidade de tratamento. Um exemplo disso pode ser observado no corpo d'água representado pelo ponto **B** na Figura 55, que se esvazia lentamente, ao contrário do que ocorre em

outras partes da barragem.



Figura 54 – Batimetria da barragem Santa Bárbara Pelotas/RS.

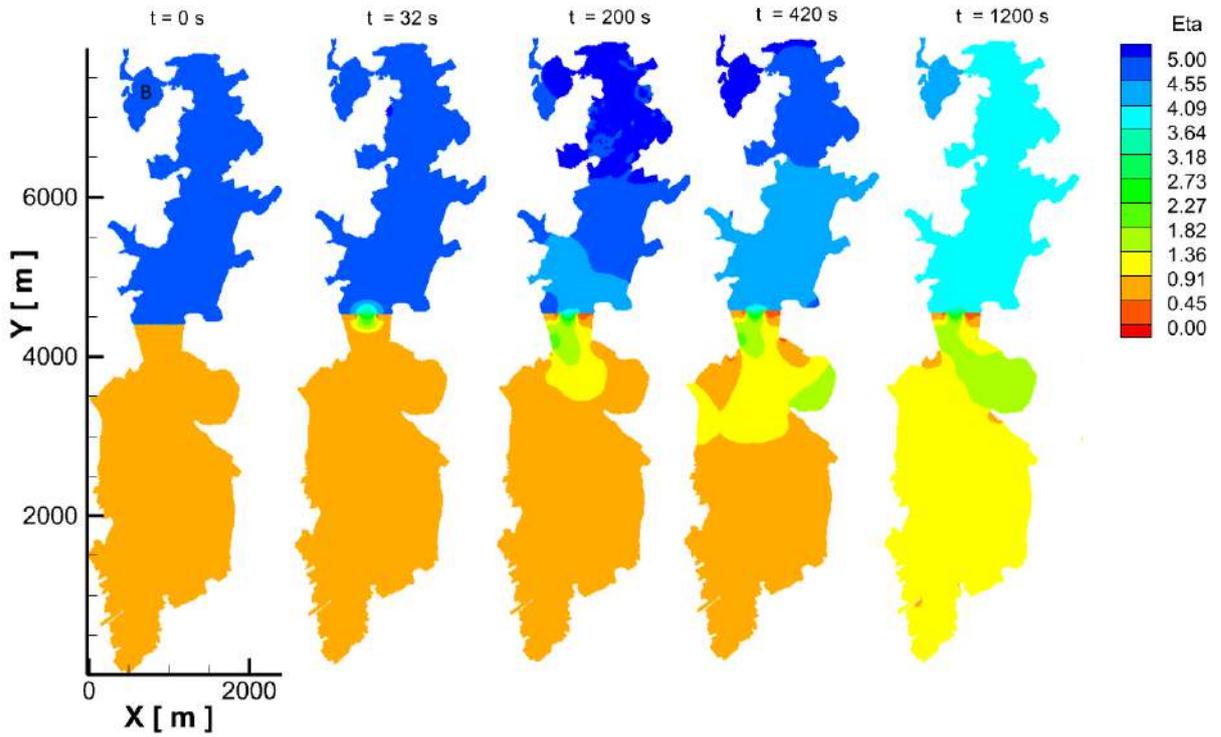


Figura 55 – Simulação do escoamento na barragem Santa Bárbara Pelotas/RS.

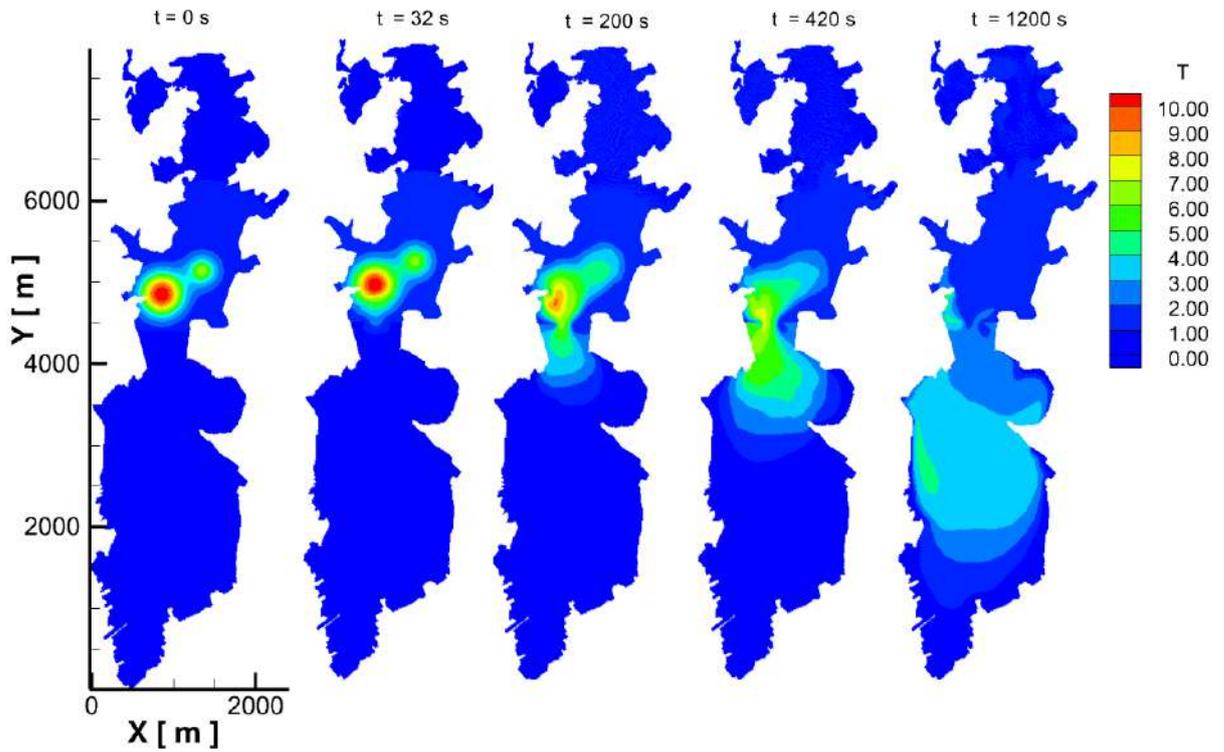


Figura 56 – Transporte na barragem Santa Bárbara.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste estudo, desenvolvemos um programa computacional com o objetivo de aprimorar a compreensão da modelagem de fenômenos relacionados ao rompimento de barragens e à dinâmica de águas rasas. O modelo numérico elaborado é capaz de resolver o sistema acoplado não linear de equações de águas rasas por meio do método de elementos finitos, utilizando malhas de elementos triangulares não adaptativos.

Realizamos seis casos de teste e, para cada um deles, conduzimos simulações numéricas em malhas de resolução variável. Em seguida, comparamos os resultados com soluções analíticas ou de referência.

Destaca-se que o uso de refinamento de malha para simular esses problemas contribuiu significativamente para a precisão das previsões. As análises abrangentes em diferentes resoluções de malha e as comparações com soluções analíticas ou de referência demonstraram a robustez do modelo apresentado e sua boa concordância com os resultados encontrados na literatura. Em particular, o algoritmo demonstrou capacidade para lidar com precisão em situações envolvendo fronteiras rígidas, como ondas de choque em simulações desses fenômenos.

Por fim, é relevante mencionar que o algoritmo apresenta várias características desejáveis na solução numérica de problemas relacionados a escoamentos de águas rasas, tornando-o atraente para a modelagem de escoamentos em geral. Em decorrência disso, acoplamos a equação de transporte para verificar, em um caso de teste, a poluição de uma barragem. Isso possibilitou uma melhor compreensão do problema ambiental em caso de derramamento de determinado poluente nesse corpo hídrico. Essa conclusão baseou-se em testes anteriores, uma vez que não dispúnhamos de dados experimentais para comparação.

As características do programa incluem a capacidade de prever com precisão a superfície livre com conservação adequada das propriedades, bom comportamento de convergência em relação ao refinamento computacional e a implementação em malhas triangulares que podem ser facilmente geradas para o estudo hidrodinâmico em geometrias complexas.

Para trabalhos posteriores, indica-se:

- Implementar um algoritmo de otimização para ajustar parâmetros do modelo hidrodinâmico de acordo com dados observacionais;
- Desenvolver uma função de interpolação para preencher lacunas ou inconsistências nos dados batimétricos;
- Integrar um modelo de transporte de sedimentos ao programa para estudar o transporte de material sólido.
- Criar uma interface gráfica de usuário para facilitar a entrada de dados e visualização dos resultados do modelo hidrodinâmico;
- Incorporar um método de assimilação de dados para integrar observações em tempo real no modelo e melhorar a precisão das previsões hidrodinâmicas;
- Desenvolver um sistema de pós-processamento para analisar e visualizar os resultados das simulações de forma mais eficiente;
- Implementar uma função de interpolação espacial para estimar as condições hidrodinâmicas em locais não amostrados pela rede de monitoramento.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, M. B. **Computational Hydraulics**: Elements of the Theory of Free Surface Flows. London: Pitman Pub., 1979. UniM Store Engin Call No. 627.02854044 ABBO.
- AKIN, J. Finite Element Analysis with Error Estimators. **Finite Element Analysis with Error Estimators**, United Kingdom, 2005.
- BIK, A.; GIRKAR, M.; GREY, P.; TIAN, X. Automatic intra-register vectorization for the Intel architecture. **International Journal of Parallel Programming**, New York, NY, v.2, p.65–98, 2002.
- CALEFFI, V.; VALIANI, A.; ZANNI, A. Finite Volume Method for Simulating Extreme Flood Events in Natural Channels. **Journal of Hydraulic Research**, New York, NY, v.41, n.2, p.167–177, 2003.
- CHILDS, P. N.; MORTON, K. W. Characteristic Galerkin Methods for Scalar Conservation Laws in One Dimension. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, New York, v.27, p.553–594, 1990.
- CHORIN, A. J. A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Problems. **Journal of Computational Physics**, New York, v.2, p.12, 1967.
- CODINA, R.; COPPOLA-OWEN, H.; NITHIARASU, P.; LIU, C.-B. Numerical Comparison of CBS and SGS as Stabilisation Techniques for the Incompressible Navier–Stokes Equations. , Jyvaskyla, 24–28 July 2004, 2004.
- CODINA, R.; ZIENKIEWICZ, O. CBS Versus GLS Stabilisation of the Incompressible Navier–Stokes Equations and the Role of the Time Step as Stabilization Parameter. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, New York, NY, v.18, p.99–112, 2002.
- Core Writing Team, H. Lee and J. Romero (eds.). **Climate Change 2023**: Synthesis Report. Contribution of Working Groups I, II and III to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Geneva, Switzerland: IPCC, 2023. 35-115p.

DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite Element Methods for Flow Problems**. New York: Wiley, 2003.

DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite Element Methods for Flow Problems**. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2003.

FENNEMA, R. J.; CHAUDHRY, M. H. Explicit methods for 2-D transient free surface flows. **Journal of Hydraulic Engineering**, Reston, USA, v.116, n.8, p.1013–1034, 1990.

FERREIRA, M. R. S. **Método dos Elementos Finitos aplicado às Equações de Águas Rasas**. 2013. Dissertação de Mestrado — PPMaP, UFRGS, Porto Alegre.

FUJIHARA, M.; BORTHWICK, G. L. Godunov-type solution of curvilinear shallow-water equations. **Journal of Hydraulic Engineering, ASCE**, Reston, USA, v.126, n.11, p.827–836, 2000.

GUO, W. et al. Finite-volume multi-stage scheme for advection-diffusion modeling in shallow water flows. **Journal of Mechanics**, United Kingdom, v.27, p.415–430, 2011.

HALTINER, G.; WILLIAMS, R. **Numerical Prediction and Dynamic Meteorology**. 2nd.ed. New York: Wiley, 1980. 496p.

HESTHAVEN, J. S.; WARBURTON, T. **Nodal Discontinuous Galerkin Methods**. 1st.ed. New York, NY: Springer, 2008. (Texts in Applied Mathematics).

KAAZEMPUR-MOFRAD, M. R.; ETHIER, C. R. An Efficient Characteristic Galerkin Scheme for the Advection Equation in 3-D. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, New York, v.191, p.5345–5363, 2002.

KAAZEMPUR-MOFRAD, M. R.; MINEV, P. D.; ETHIER, C. R. A Characteristic/Finite Element Algorithm for Time-Dependent 3-D Advection Dominated Transport Using Unstructured Grids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, New York, v.192, p.1281–1298, 2003.

KOCAMAN, S.; OZMEN-CAGATAY, H. Investigation of dam-break induced shock waves impact on a vertical wall. **Journal of Hydrology**, United Kingdom, v.525, p.1–12, 2015.

LAKHLIFI, Y.; DAOUDI, S.; BOUSHABA, F. Dam-Break Computations by a Dynamical Adaptive Finite Volume Method. **Journal of Applied Fluid Mechanics**, Reston, USA, v.11, p.1543–1556, 11 2018.

LEVEQUE, R. J. **Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems**. New York, NY: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Texts in Applied Mathematics).

LI, S.; DUFFY, C. J. Fully-coupled modeling of shallow water flow and pollutant transport on unstructured grids. **Procedia Environmental Sciences**, United Kingdom, v.13, p.2098–2121, 2012.

LINN, R. V. **Simulação computacional de escoamentos compressíveis utilizando adaptação de malhas anisotrópica**. 2013. Dissertação de Mestrado — PPGCI, UFRGS, Porto Alegre.

LÖHNER, R. **Applied CFD Techniques. An Introduction Based on Finite Element Methods**. 2nd.ed. New York: Wiley, 2008.

MASSAROTTI, N.; NITHIARASU, P.; ZIENKIEWICZ, O. Natural Convection in Porous Medium—Fluid, Interface Problems: A Finite Element Analysis by Using the CBS Procedure. **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, United Kingdom, v.11, p.473–490, 2001.

MELENDO, A. et al. **www.gidhome.com**. [Online; accessed Jun-2023]. Disponível em: <www.gidsimulation.com>.

MICHEL, S. **Finite Element Methods for Shallow Water Equations : Analysis, Modeling and Applications to Coastal Hydrodynamic**. 2022. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — , Paris.

MORTON, K. W. Generalized Galerkin Methods for Hyperbolic Problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, New York, v.52, p.847–871, 1985.

NITHIARASU, P. An Efficient Artificial Compressibility (AC) Scheme Based on the Characteristic Based Split (CBS) Method for Incompressible Flows. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, United Kingdom, v.56, p.1815–1845, 2003.

NITHIARASU, P.; CODINA, R.; ZIENKIEWICZ, O. The Characteristic-Based Split (CBS) Scheme — A Unified Approach to Fluid Dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, New York, v.66, p.1514–1546, 2006.

NITHIARASU, P.; MATHUR, J. S.; WEATHERILL, N. P.; MORGAN, K. Three-dimensional Incompressible Flow Calculations Using the Characteristic Based Split (CBS) Scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, United Kingdom, v.44, p.1207–1229, 2004.

PERAIRE, J. **A Finite Element Method for Convection Dominated Flows**. 1986. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — University of Swansea, United Kingdom.

PEREIRA, F. F. **Modelo Hidrodinâmico e de Transporte Bidimensional de Grade Não Estruturada para Lagos Rasos**. 2010. Dissertação de Mestrado — PPGIPH, UFRGS, Porto Alegre.

RAO, S. **The Finite Element Method in Engineering**. United Kingdom: Elsevier Science, 2017.

SILVA, C. S. **Inundações em Pelotas/RS: o uso de geoprocessamento no planejamento paisagístico e ambiental**. 2007. 196p. Dissertação de Mestrado — Programa de Pós-Graduação em Arquitetura e Urbanismo, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

SZMELTER, J.; SMOLARKIEWICZ, P. K. An edge-based unstructured mesh discretization in geospherical framework. **Journal of Computational Physics**, United Kingdom, v.229, n.13, p.4980–4995, 2010.

SZMELTER, J.; SMOLARKIEWICZ, P. K. An edge-based unstructured mesh framework for atmospheric flows. **Computers & Fluids**, United Kingdom, v.46, p.455–460, 2011.

THOMAS, C. G.; NITHIARASU, P. Effect of variable smoothing and stream line direction on the viscous compressible flow calculations. **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, United Kingdom, v.15, p.420–428, 2005.

YU, H.; HUANG, G.; WU, C. Efficient finite-volume model for shallow-water flows using an implicit dual time-stepping method. **Journal of Hydraulic Engineering (ASCE)**, Reston, USA, v.141, p.1–12, 2015.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CODINA, R. Search for a General Fluid Mechanics Algorithm. In: CAUGHEY, D. A.; HAFEZ, M. M. (Ed.). **Frontiers of Computational Fluid Dynamics**. New York: Wiley, 1995. p.101–113.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CODINA, R. A General Algorithm for Compressible and Incompressible Flow—Part I: The Split, Characteristic-Based Scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, New York, v.20, p.869–885, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ORTIZ, P. A Split Characteristic Based Finite Element Model for Shallow Water Equations. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, New York, v.20, p.1061–1080, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. **The Finite Element Method For Fluid Dynamics**. 6th.ed. United Kingdom: Butterworth-Heinemann, 2011.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. **The finite element method for fluid dynamics**. 6nd.ed. Burlington: Butterworth-Heinemann, 2013.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**, Sixth Edition. 6.ed. United Kingdom: Butterworth-Heinemann, 2005.

APÊNDICE A EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS

A.1 Solução unidimensional via método de elementos finitos

Neste caso, procura-se encontrar a distribuição de velocidade de um fluido que escoo através de um tubo Figura 57. Para fins de praticidade, utiliza-se a nomenclatura de (RAO, 2017). A equação diferencial que governa a distribuição de velocidade $u(x)$ é dada pela Eq. (1) com a condição de contorno $u(x = 0) = u_0$. Este problema é equivalente a forma fraca associada a :

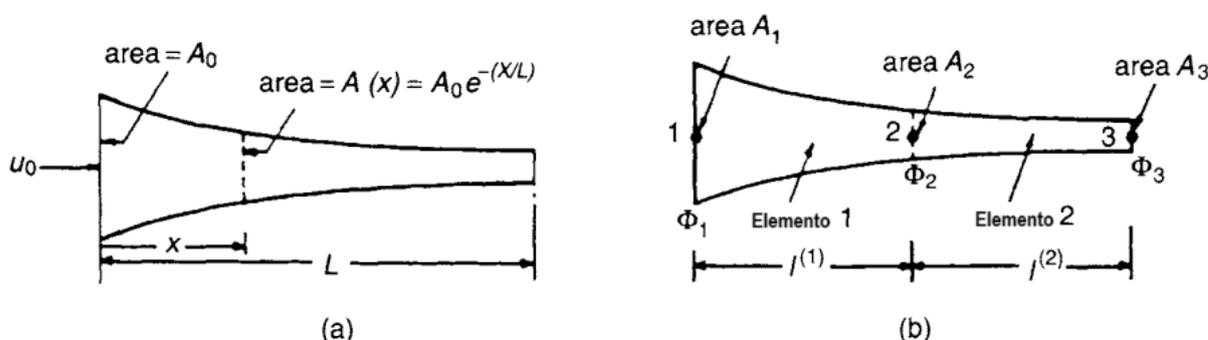


Figura 57 – Um tubo unidimensional de seção transversal variável.

Fonte: (RAO, 2017)

$$I = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \rho A \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx \quad (141)$$

Suponha que a área da seção transversal do tubo seja $A(x) = A_0 e^{-(x/L)}$.

1. Idealização do problema:

Divida o contínuo em dois elementos finitos, conforme mostrado na Figura 57b. Se os valores da função potencial nos vários nós forem considerados como incógnitas, haverá três quantidades, nomeadamente Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 . a ser determinado no problema.

2. Modelo de interpolação (função potencial) :

Para a função potencial, $\phi(x)$, assume-se que varia linearmente dentro de um elemento e ($e = 1, 2$) como:

$$\phi(x) = a + bx$$

onde as constantes a e b podem ser avaliadas usando as condições nodais $\phi(x = 0) = \Phi_1^{(e)}$ e $\phi(x = l^{(e)}) = \Phi_2^{(e)}$ para obter

$$\rho(x) = \Phi_1^{(e)} + \left(\Phi_2^{(e)} - \Phi_1^{(e)} \right) \frac{x}{l^{(e)}}$$

onde $l^{(e)}$ é o comprimento do elemento e (uma abordagem bem detalhada no próximo capítulo para um problema bidimensional).

3. Matrizes de elementos característicos:

O funcional I correspondente ao elemento e pode ser expresso como

$$I^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{l^{(e)}} \rho A \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{l^{(e)}} \rho A \left(\frac{\Phi_2^{(e)} - \Phi_1^{(e)}}{l^{(e)}} \right)^2 dx \quad (142)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\Phi}^{(e)T} [K^{(e)}] \vec{\Phi}^{(e)} \quad (143)$$

onde:

$[K^{(e)}]$ é a matriz característica do elemento e :

$$= \frac{\rho A^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} e & -1 \\ -1 & e \end{bmatrix}.$$

$A^{(e)}$ é a área da seção transversal do elemento e (que pode ser tomada como $(A_1 + A_2)/2$ para $e = 1$ e $(A_2 + A_3)/2$ para $e = 2$ para simplificar) e $\vec{\Phi}^{(e)}$ é o vetor de incógnitas nodais do elemento e :

$$e = \begin{Bmatrix} \vec{\Phi}_1^{(e)} \\ \vec{\Phi}_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \text{ para } e = 1 \text{ e } \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \text{ for } e = 2.$$

4. Equações governantes:

As equações gerais podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho A^{(1)}}{l^{(1)}} & -\frac{\rho A^{(1)}}{l^{(1)}} & 0 \\ -\frac{\rho A^{(1)}}{l^{(1)}} & \left(\frac{\rho A^{(1)}}{l^{(1)}} + \frac{\rho A^{(2)}}{l^{(2)}}\right) & -\frac{\rho A^{(2)}}{l^{(2)}} \\ 0 & -\frac{\rho A^{(2)}}{l^{(2)}} & \frac{\rho A^{(2)}}{l^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \quad (144)$$

onde Q_i é a taxa do escoamento de massa através da seção i ($i = 1, 2, 3$) e é diferente de zero quando o fluido é adicionado ou subtraído do tubo com $Q_1 = -\rho A_1 u_1$ (negativo desde u_1 é oposto à normal), $Q_2 = 0$ e $Q_3 = \rho A_3 u_3$. Como $u_1 = u_0$ é dado, Q_1 é conhecido, enquanto Q_3 é desconhecido.

5. Solução das Equação Governantes:

Na terceira equação da Eq. (144), tanto Φ_3 quanto Q_3 são incógnitas e, portanto, o sistema de equações dado não pode ser resolvido. Portanto, define-se $\Phi_3 = 0$ como valor de referência e tenta-se encontrar os valores de Φ_1 e Φ_2 em relação a este valor. As duas primeiras equações da Eq. (144) podem ser expressas na forma escalar como

$$\frac{\rho A^{(1)}}{l^{(1)}} \Phi_1 - \frac{\rho A^{(1)}}{l^{(1)}} \Phi_2 = Q_1 = -\rho A_1 u_0 \quad (145)$$

$$-\frac{\rho A^{(1)}}{l^{(1)}} \Phi_1 + \left(\frac{\rho A^{(1)}}{l^{(1)}} + \frac{\rho A^{(2)}}{l^{(2)}}\right) \Phi_2 = \frac{\rho A^{(2)}}{l^{(2)}} \Phi_3 = 0 \quad (146)$$

Por substituição tem-se: $A^{(1)} \simeq (A_1 + A_2) / 2 = 0,8032A_0$, $A^{(2)} \simeq (A_2 + A_3) / 2 = 0,4872A_0$, e $l^{(1)} = l^{(2)} = L/2$, Eq. (145) e Eq. (146) pode ser escrita como:

$$0,8032\Phi_1 - 0,8032\Phi_2 = -u_0 L/2 \quad (147)$$

$$-0,8032\Phi_1 + 1.2904\Phi_2 = 0 \quad (148)$$

As soluções das Eqs.(147) e (148) são dadas por:

$$\Phi_1 = -1.650u_0L \quad \text{e} \quad \Phi_2 = -1.027u_0L \quad (149)$$

6. Cálculo das velocidades do escoamento:

As velocidades do fluido nos elementos 1 e 2 podem ser encontradas da forma:

$$u \text{ no elemento 1} = u^{(1)} = \frac{d\phi}{dx}(\text{ elemento 1}) = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l^{(1)}} = 1.246u_0 \quad (150)$$

e

$$u \text{ no elemento 2} = u^{(2)} = \frac{d\phi}{dx}(\text{ elemento 2}) = \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{l^{(2)}} = 2.054u_0 \quad (151)$$

Essas velocidades serão constantes ao longo dos elementos tendo em vista a relação linear assumida para $\phi(x)$ dentro de cada elemento. A velocidade do fluido no nó 2 pode ser aproximada como

$$u_2 = (u^{(1)} + u^{(2)}) / 2 = 1.660u_0. \quad (152)$$

A terceira equação da Eq. (144) pode ser escrita como:

$$-\frac{\rho A^{(2)}}{l^{(2)}} \Phi_2 + \frac{\rho A^{(2)}}{l^{(2)}} \Phi_3 = Q_3$$

logo,

$$\frac{\rho(0,4872A_0)}{(L/2)} (-\Phi_2 + \Phi_3) = Q_3$$

portanto

$$Q_3 = \rho A_0 u_0. \quad (153)$$

Isso mostra que a fluxo de massa é a mesma nos nós 1 e 3, e está de acordo com o princípio da conservação da massa (AKIN, 2005).

A.2 Solução bidimensional via método de elementos finitos

O objetivo agora é obter a solução de elementos finitos do problema do escoamento ideal (fluxo invíscido e incompressível), pela aproximação de Galerkin (DONEA; HUERTA, 2003b). Exemplo típico que se enquadra nesta categoria é o escoamento em torno de um cilindro. Os problemas do escoamento potencial bidimensional (escoamento irrotacional) podem ser formulados em termos de uma função potencial de velocidade (ϕ) ou uma função do escoamento (ψ):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (154)$$

onde as componentes de velocidades são dadas por:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (155)$$

Em termos de escoamento, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (156)$$

E as velocidades do escoamento podem ser determinadas por:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (157)$$

Se o fluido for ideal, seu movimento não penetra no corpo circundante nem se separa da superfície do corpo. Isso significa, que a condição de contorno da componente de velocidade do fluido normal à superfície, deve ser igual à componente da velocidade da superfície na mesma direção. Por isso:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{V}_B \cdot \vec{n}$$

ou:

$$ul_x + vl_y = u_B l_x + v_B l_y \quad (158)$$

onde \vec{V} é a velocidade do fluido, \vec{V}_B é a velocidade do limite; \vec{n} é a normal orientada na direção cossenos e são l_x e l_y . Se $(\vec{V}_B = \vec{0})$, não haverá fluxo e, portanto, nenhuma velocidade perpendicular ao contorno. Isto implica que todas as velocidades podem ser consideradas como linhas de corrente porque não haverá velocidade do fluido perpendicular a uma linha de corrente. Se houver uma linha de simetria paralela à direção do escoamento, também será uma linha de corrente. Se $\vec{V}_B = \vec{0}$, as Eqs.(158), (157) e (155) fornecem as condições:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial y} l_x - \frac{\partial\psi}{\partial x} l_y = 0 \quad (159)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} l_y = 0 \quad (160)$$

A Eq. (159) indica que a derivada tangencial da função do escoamento ao longo do contorno é zero, enquanto a Eq. (160) indica que a derivada na direção normal da função potencial é zero.

Para fazer a formulação da função potencial, precisa-se da equação diferencial que é dada, por $\phi(x, y)$ em uma dada região **S** cercada pela curva **C** tal que

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \text{ em } S \quad (161)$$

com as seguinte condições de contorno:

$$\textbf{Dirichlet:} \quad \phi = \phi_0 \text{ em } C_1 \quad (162)$$

$$\textbf{Neumann:} \quad V_n = \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} l_y = V_0 \text{ em } C_2 \quad (163)$$

onde $C = C_1 + C_2$, e V_0 é o valor prescrito da velocidade normal. Para calcular a

velocidade é necessária fazer a minimização do funcional:

$$I = \frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot dS - \int_{C_2} V_0 \phi dC_2 \quad (164)$$

com as condições de contorno:

$$\phi = \phi_0 \text{ em } C_1. \quad (165)$$

Pode-se utilizar o método de Galerkin para resolver este problema em elementos finitos. Conforme (RAO, 2017), pode-se dividir esse método nos seguintes passos, descritos a seguir:

1. Divide a região **S** em **E** elementos finitos de p nós cada, conforme Figura 59. Neste trabalho são utilizados 3 nós (elemento triangular).
2. Suponha um modelo de interpolação adequado para $\phi^{(e)}$ no elemento e como:

$$\phi^{(e)}(x, y) = [N(x, y)] \vec{\Phi}^{(e)} = \sum_{i=1}^p N_i(x, y) \Phi_i^{(e)} \quad (166)$$

3. Defina a integral do resíduo ponderado sobre a região do elemento igual a zero, assumindo os mesmos pesos das funções de interpolação N_i . Gerando,

$$\iint_{S^{(e)}} N_i \left[\frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial y^2} \right] dS = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (167)$$

As integrais da Eq. (167) podem se escritas (utilizando o teorema de Green ver (AKIN, 2005)).

$$\iint_{S^{(e)}} N_i \frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} dS = - \iint_{S^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} dS + \int_{C^{(e)}} N_i \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} l_x dC \quad (168)$$

$$\iint_{S^{(e)}} N_i \frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial y^2} dS = - \iint_{S^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial y} dS + \int_{C^{(e)}} N_i \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial y} l_y dC \quad (169)$$

$$- \iint_{S^{(e)}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial y} \right) dS + \int_{C^{(e)}} N_i \left(\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} l_x + \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial y} l_y \right) dC = 0. \quad (170)$$

Com $i = 1, 2, \dots, p$ e os elementos $C^{(e)}$ são compostos por $C_1^{(e)}$ e $C_2^{(e)}$, a integral de linha da Eq. (170) seria zero em $C_1^{(e)}$ (uma vez que $\phi^{(e)}$ é prescrito para ser uma constante ϕ_0 em $C_1^{(e)}$, as derivadas de $\phi^{(e)}$ em relação a x e y seriam zero). No contorno $C_2^{(e)}$, a Eq. (163) deve ser satisfeita. Para isso, a integral de linha da

Eq. (170) pode ser reescrita como:

$$\int_{C_1^{(e)}+C_2^{(e)}} N_i \left(\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} l_x + \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial y} l_y \right) dC = \int_{C_2^{(e)}} V_0 N_i dC_2 \quad (171)$$

Pelas Eqs.(166), (171) a Eq. (170) é expressa na forma matricial como:

$$[K^{(e)}] \vec{\Phi}^{(e)} = \vec{P}^{(e)} \quad (172)$$

onde:

$$[K^{(e)}] = \iint_{S^{(e)}} [B]^T [D] [B] \cdot dS \quad (173)$$

$$\vec{P}^{(e)} = - \int_{C_2^{(e)}} V_0 [N]^T dC_2 \quad (174)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (175)$$

e

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (176)$$

4. Os elementos Eq. (172) gera-se as equações gerais como:

$$[\tilde{K}] \tilde{\Phi} = \tilde{P} \quad (177)$$

5. Incorpora-se as condições de contorno especificadas em C_1 e resolve-se as Eqs.(177).

A.3 Exemplo prático da solução numérica

Um problema clássico é o escoamento em torno de um cilindro, descrito na Figura 58, que consiste em calcular a distribuição de velocidades ao longo da linha central vertical CD . Devido à simetria, pode-se considerar apenas a parcela $ABCDEA$ na análise de elementos finitos. A condição de contorno ϕ é constante ao longo de CD . Esta constante pode ser considerada zero por conveniência.

Como nos exemplo mais complexos dos próximo capítulo, será utilizado elementos triangulares, e, para o leitor ter uma abordagem mais simplificada tanto da discretização o domínio será dividido em triângulos. Diminuindo a complexidade do problema, pode-se ter uma pequena quantidade de elementos e assim consegue-se calcular todas as etapas do problema numérico de forma manual, facilitando a compreensão das etapas seguintes.

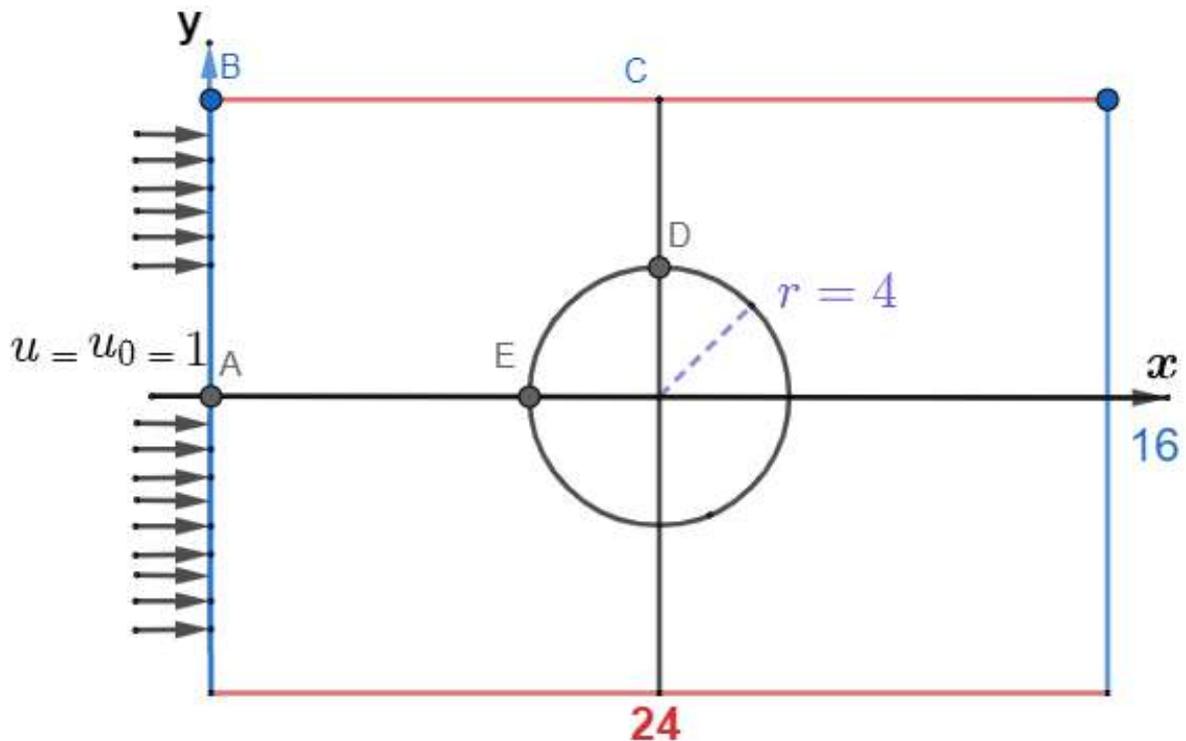


Figura 58 – Domínio do escoamento.

Fonte: Dos Autores.

Portanto neste problema utiliza-se a Figura 59, com uma subdivisão de 13 elementos. Esta idealização, embora grosseira na representação da fronteira cilíndrica, é considerada por simplicidade. Os números dos nós locais dos elementos são rotulados de maneira arbitrária.

A função de interpolação dos elementos é linear e dada por

$$\phi^{(e)}(x, y) = [N(x, y)] \vec{\Phi}^{(e)} \quad (178)$$

onde

$$[N(x, y)] = \begin{Bmatrix} N_i(x, y) \\ N_j(x, y) \\ N_k(x, y) \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} (a_i + xb_i + yc_i) / 2A^{(e)} \\ (a_j + xb_j + yc_j) / 2A^{(e)} \\ (a_k + xb_k + yc_k) / 2A^{(e)} \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$\vec{\Phi}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix}$$

e as constantes a_i, a_j, \dots, a_k são definidas pela Eq. (41). A informação necessária para o cálculo de $[N(x, y)]$ é fornecida nas Tabelas (1), (2) e (3) (as constantes a_i, a_j e a_k não são fornecidas porque não são necessárias nos cálculos). Deriva-se as matrizes dos elementos usando os valores conhecidos de $A^{(e)}, b_i, b_j, \dots, c_k$. Logo, a

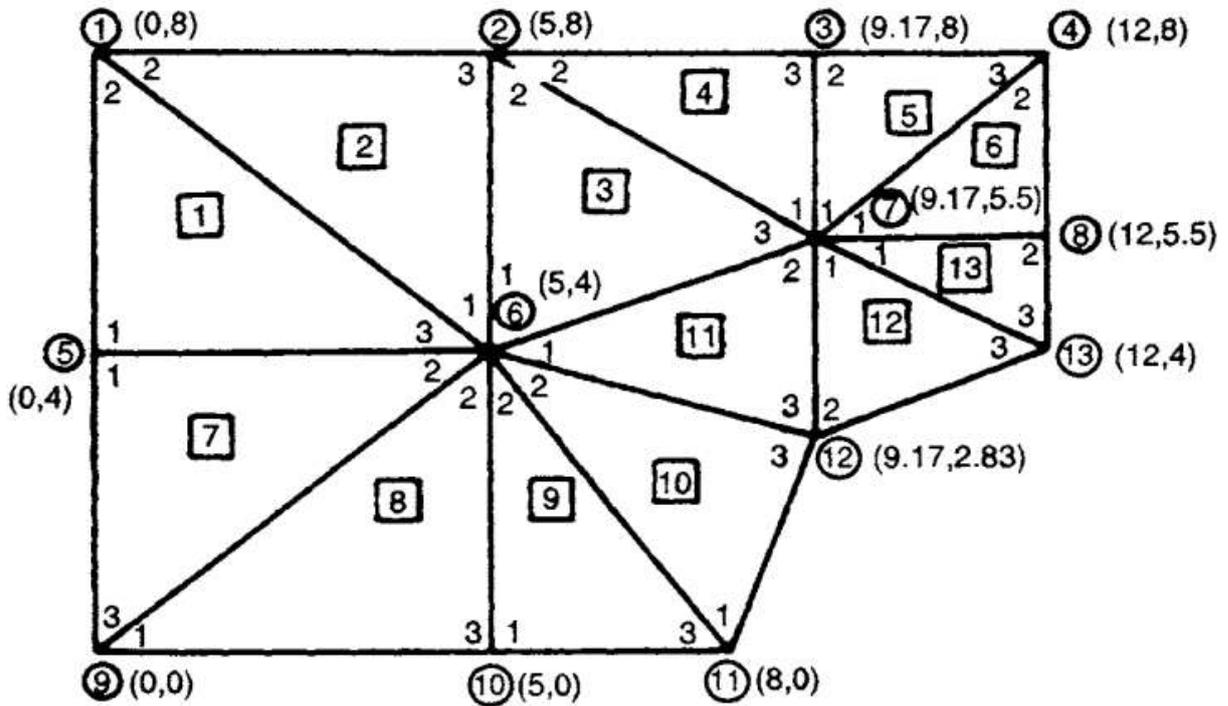


Figura 59 – Discretização do domínio em elementos triangulares.

Fonte: (RAO, 2017)

matriz característica do elemento é dada por:

$$[K^{(e)}] = \iint_{A^{(e)}} [B]^T [D] [B] \cdot dx \, dy = \frac{1}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} (b_i^2 + c_i^2) & (b_i b_j + c_i c_j) & (b_i b_k + c_i c_k) \\ & (b_j^2 + c_j^2) & (b_j b_k + c_j c_k) \\ & & (b_k^2 + c_k^2) \end{bmatrix} \quad (179)$$

Tabela 1 – Identificação dos nós e suas coordenadas globais.

Nó (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Coord. globais dos nós	(0,8)	(5,8)	(9,17,8)	(12,8)	(0,4)	(5,4)	(9,17,5.5)	(12,5.5)	(0,0)	(5,0)	(8,0)	(9,17,2.83)	(12,4)

Tabela 2 – Relação dos nós com suas coordenadas.

Elemento (e)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nós globais i, j, k de cada	i	5	6	6	7	7	7	5	9	10	11	6	7	7
	j	1	1	2	2	3	4	6	6	6	6	7	12	8
nó local 1, 2, e 3	k	6	2	7	3	4	8	9	10	11	12	12	13	13

Tabela 3 – Dados para o cálculo das constantes.

Elemento (<i>e</i>)	x_i	x_j	x_k	y_i	y_j	y_k	$x_j - x_i$	$x_k - x_j$	$x_i - x_k$	$y_j - y_k$	$y_k - y_i$	$y_i - y_j$
1	0	0	5	4	8	4	0	5	-5	4	0	-4
2	5	0	5	4	8	8	-5	5	0	0	4	-4
3	5	5	9,17	4	8	5,5	0	4,17	-4,17	2,5	1,5	-4
4	9,17	5	9,17	5,5	8	8	-4,17	4,17	0	0	2,5	-2,5
5	9,17	9,17	12	5,5	8	8	0	2,83	-2,83	0	2,5	-2,5
6	9,17	12	12	5,5	8	5,5	2,83	0	-2,83	2,5	0	-2,5
7	0	5	0	4	4	0	5	-5	0	4	-4	0
8	0	5	5	0	4	0	5	0	-5	4	0	-4
9	5	5	8	0	4	0	0	3	-3	4	0	-4
10	8	5	9,17	0	4	2,83	-3	4,17	-1,17	1,17	2,83	-4
11	5	9,17	9,17	4	5,5	2,83	4,17	0	-4,17	2,67	-1,17	-1,5
12	9,17	9,17	12	5,5	2,83	4	0	2,83	-2,83	-1,17	-1,5	2,67
13	9,17	12	12	5,5	5,5	4	2,83	0	-2,83	1,5	-1,5	0

Obtém-se então:

$$\begin{aligned}
 [K^{(1)}] &= \begin{bmatrix} 1,025 & -0,625 & -0,400 \\ -0,625 & 0,625 & 0,000 \\ -0,400 & 0,000 & 0,400 \end{bmatrix} & [K^{(2)}] &= \begin{bmatrix} 0,625 & 0,000 & -0,625 \\ 0,000 & 0,400 & -0,400 \\ -0,625 & -0,400 & 1,025 \end{bmatrix} \\
 [K^{(3)}] &= \begin{bmatrix} 0,7086 & -0,4088 & -0,2998 \\ -0,4088 & 0,5887 & -0,1799 \\ -0,2998 & -0,1799 & 0,4796 \end{bmatrix} & [K^{(4)}] &= \begin{bmatrix} 0,8340 & 0,0000 & -0,8340 \\ 0,0000 & 0,2998 & -0,2998 \\ -0,8340 & -0,2998 & 1,1338 \end{bmatrix} \\
 [K^{(5)}] &= \begin{bmatrix} 0,5660 & -0,5660 & 0,0000 \\ -0,5660 & 1,0077 & -0,4417 \\ 0,0000 & -0,4417 & 0,4417 \end{bmatrix} & [K^{(6)}] &= \begin{bmatrix} 0,4417 & 0,0000 & -0,4417 \\ 0,0000 & 0,5660 & -0,5660 \\ -0,4417 & -0,5660 & 1,0077 \end{bmatrix} \\
 [K^{(7)}] &= \begin{bmatrix} 1,025 & -0,400 & -0,625 \\ -0,400 & 0,400 & 0,000 \\ -0,625 & 0,000 & 0,625 \end{bmatrix} & [K^{(8)}] &= \begin{bmatrix} 0,400 & 0,000 & -0,400 \\ 0,000 & 0,625 & -0,625 \\ -0,400 & -0,625 & 1,025 \end{bmatrix} \\
 [K^{(9)}] &= \begin{bmatrix} 1,0417 & -0,3750 & -0,6667 \\ -0,3750 & 0,3750 & 0,0000 \\ -0,6667 & 0,0000 & 0,6677 \end{bmatrix} & [K^{(10)}] &= \begin{bmatrix} 0,7121 & -0,0595 & -0,6526 \\ -0,0595 & 0,3560 & -0,2965 \\ -0,6526 & -0,2965 & 0,9491 \end{bmatrix} \\
 [K^{(11)}] &= \begin{bmatrix} 0,3201 & -0,1403 & -0,1799 \\ -0,1403 & 0,8424 & -0,7021 \\ -0,1799 & -0,7021 & 0,8819 \end{bmatrix} & [K^{(12)}] &= \begin{bmatrix} 0,6505 & -0,4138 & -0,2067 \\ -0,4138 & 0,6788 & -0,2650 \\ -0,2067 & -0,2650 & 0,4717 \end{bmatrix} \\
 [K^{(13)}] &= \begin{bmatrix} 0,2650 & -0,2650 & 0,0000 \\ -0,2650 & 1,2084 & -0,9433 \\ 0,0000 & -0,9433 & 0,9433 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para o cálculo dos vetores de elementos característicos, usa-se a Eq. (174) e também se a velocidade do fluido saindo da borda ij for especificada como V_0 , tem-se Eq.

(180):

$$\vec{P}^{(e)} = - \int_{C_1} V_0 [N]^T \cdot dC_2 = -V_0 \int_{s_i}^{s_j} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \end{Bmatrix} ds = -\frac{V_0 s_{ji}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (180)$$

Se a velocidade do fluido saindo da borda jk for especificada como V_0 tem-se Eq. (181):

$$\vec{P}^{(e)} = -\frac{V_0 s_{kj}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (181)$$

Se a velocidade do fluido saindo da borda ki for especificada como V_0 , obtém-se a Eq. (182):

$$\vec{P}^{(e)} = -\frac{V_0 s_{ik}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (182)$$

Nas Eqs. (180)-(182), s_{ji} , s_{kj} , e s_{ik} denotam os comprimentos das arestas ij , jk e ki , respectivamente.

No caso atual, a velocidade que entra no contorno AB é prescrita como $u_0 = 1$ (ou $V_0 = -1$) e, portanto, os vetores $\vec{P}^{(e)}$ serão diferente de zero apenas para os elementos 1 e 7. Esses vetores diferentes de zero podem ser calculados. Para o elemento 1, a velocidade especificada está ao longo da aresta ij , ou seja, 12. E o elemento 7, a velocidade especificada está ao longo da aresta ik , ou seja, 13.

$$\vec{P}^{(1)} = \frac{1 \times 4}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{P}^{(7)} = \frac{1 \times 4}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

A matriz geral do sistema é dada por:

$$[\tilde{K}] = \begin{Bmatrix} 1.0250 & -0.4000 & 0 & 0 & -0.6250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4000 & 1.9135 & -0.2998 & 0 & 0 & -1.0338 & -0.1799 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2998 & 2.1415 & -0.4417 & 0 & 0 & -1.4000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4417 & 1.0077 & 0 & 0 & 0 & -0.5660 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6250 & 0 & 0 & 0 & 2.0500 & -0.800 & 0 & 0 & -0.6250 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0338 & 0 & 0 & -0.800 & 3.8097 & -0.4401 & 0 & 0 & -1.0000 & -0.0595 & -0.4764 & 0 \\ 0 & -0.1799 & -1.4000 & 0 & 0 & -0.4401 & 4.0492 & -0.7067 & 0 & 0 & 0 & -1.1159 & -0.2067 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5660 & 0 & 0 & -0.7067 & 2.2161 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9433 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6250 & 0 & 0 & 0 & 1.0250 & -0.4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 0 & 0 & -0.4000 & 2.0667 & -0.6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0595 & 0 & 0 & 0 & -0.6667 & 1.3788 & -0.6526 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4764 & -1.1159 & 0 & 0 & 0 & -0.6526 & 2.5098 & -0.2650 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2067 & -0.9433 & 0 & 0 & 0 & -0.2650 & 1.4150 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo este sistema tem-se:

$$[K]_{\sim} \vec{\Phi}_{\sim} = \vec{P}_{\sim} \quad (183)$$

depois de incorporar as condições de contorno especificadas em C_1 . No caso atual, o valor de ϕ é igual a zero ao longo de CD . Assim, as condições de contorno a serem satisfeitas são $\Phi_4 = \Phi_8 = \Phi_{13} = 0$. Uma maneira de incorporar essas condições de contorno é excluir as linhas e colunas correspondentes a esses graus de liberdade das Eqs. (183). A solução resultante dessas equações é dada por

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_8 \\ \Phi_9 \\ \Phi_{10} \\ \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \\ \Phi_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,900 \\ 9,675 \\ 4,482 \\ 0,000 \\ 15,044 \\ 10,011 \\ 4,784 \\ 0,000 \\ 15,231 \\ 10,524 \\ 8,469 \\ 6,229 \\ 0,000 \end{pmatrix} \quad (184)$$

A partir desses valores nodais de ϕ , o valor médio da componente u da velocidade entre os nós 7 e 8 pode ser calculado como

$$(u)_{7-8} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\Phi_8 - \Phi_7}{x_8 - x_7} = \frac{0,000 - 4,784}{9,17 - 12,00} = 1,690 \quad (185)$$