# Equações da Magnetohidrodinâmica e sua aplicação no equilíbrio de plasmas confinados

LUIS FELIPE E. MAESCKI[1]; JOEL PAVAN[2]

[1]UFPel – hussdlest@gmail.com
[2]UFPel – joel.pavan@ufpel.edu.br

## 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentaremos as principais equações da Teoria Magnétohidrodinâmica (MHD): uma abordagem da Física dos Plasmas que visa tratar o plasma como um fluido eletricamente carregado. A partir disso, usaremos os resultados obtidos para desenvolver as relações que governam o equilíbrio de plasmas confinados por campos magnéticos em dispositivos de confinamento toroidal.

Nosso objetivo é com isso criar um modelo numérico para ser implementado de forma computacional, o que nos permite obter os perfis de certos parâmetros importantes na estabilidade do plasma confinado.

## 2. METODOLOGIA

Para o desenvolvimento do trabalho, foram usadas as equações da teoria MHD apresentadas em J.A.Bittencourt (2004) e Francis F. Chen (2016), junto com sua aplicação em dispositivos de confinamento toroidal tipo Tokamak apresentados em John Wesson (2004). O método numérico desenvolvido foi então implementado computacionalmente na linguagem Fortran 90, para a obtenção dos perfis de equilíbrio.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### As equações ideias da teoria MHD

Da teoria MHD, obtemos um conjunto de equações que descrevem o plasma como um fluido. Porém, na prática, é comum que se usem de aproximações baseadas em argumentos físicos que simplifiquem as equações da teoria MHD e permitam a eliminação de alguns de seus termos. Como apresentado em J.A.Bittencourt (2004), podemos definir um conjunto de equações simplificadas da magnetohidrodinâmica, que são elas:

A equação de continuidade para um fluido condutor,

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0, \qquad (1)$$

a equação de movimento,

$$\rho_m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p, \qquad (2)$$

a equação adiabática de conservação de energia,

$$\nabla p = V_s^2 \nabla \rho_m, \qquad (3)$$

e a forma simplificada da lei de Ohm generalizada,

$$\mathbf{J} = \sigma_0(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{4}$$

Além disso, para sistemas eletricamente carregados, em que as forças são de origem eletromagnética, devemos ter

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,, \tag{5}$$

junto como as equações que governam campos eletromagnéticos, as equações de Maxwell (com $\rho_\alpha = n_\alpha q_\alpha$, e $\mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ ),

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,, \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \tag{8}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{9}$$

## O equilíbrio MHD

A condição básica para o equilíbrio em um plasma requer que a força resultante seja nula em todos os pontos. A força magnética deve, portanto, ser igual à força exercida pela pressão, e pela equação (2) devemos ter

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p. \tag{10}$$

Definindo uma função $\psi$ como a função de fluxo magnético poloidal e que é determinada pelo fluxo poloidal contido dentro das superfícies magnética e dessa forma constante nessas superfícies, devemos ter que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0. \tag{11}$$

Agora, definindo um sistema de coordenadas baseado no eixo maior do toróide, com $\psi$ sendo o fluxo poloidal por radianos no ângulo toroidal $\phi$, o campo magnético poloidal pode ser relacionado a $\psi$ , de forma que

$$\mathbf{B}_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial z}\,, \quad \mathbf{B}_z = \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R}\,, \tag{12}$$

e como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$,

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\mathbf{B}_R) + \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

Da simetria entre $\mathbf{J}$ e $\mathbf{B}$ fica claro que existe uma função de fluxo de corrente. Essa função, $f$, é relacionada à densidade da corrente poloidal com

$$\mathbf{J}_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}_z = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial R}. \tag{14}$$

E comparando essas relações com a equação de *Ampère*,

$$\mathbf{J}_R = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \mathbf{B}_\phi}{\partial z}\,, \quad \mathbf{J}_z = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\mathbf{B}_\phi)\,, \tag{15}$$

temos a relação entre $f$ e o campo magnético toroidal,

$$f = \frac{R\mathbf{B}_\phi}{\mu_0}. \tag{16}$$

Finalmente, a equação de equilibrio para um sistema com simetria axial como um tokamak pode ser escrita como uma equação diferencial da função de fluxo poloidal $\psi$. Essa equação, com duas funções arbitrárias $p(\psi)$ e $f(\psi)$, é chamada de Grad-Shafranov. A equação de equilíbrio (10) pode ser reescrita como

$$\mathbf{J}_p \times \hat{i}_\phi \mathbf{B}_\phi + \mathbf{J}_\phi \hat{i}_\phi \times \mathbf{B}_p = \nabla p\,, \tag{17}$$

onde $\mathbf{J}_p$ é a densidade de corrente poloidal, $\mathbf{B}_p$ o campo magnético poloidal e $\hat{i}_\phi$ o versor na direção $\phi$, que é a coordenada toroidal. Reescrevendo as equações (12) e (14) como

$$\mathbf{B}_p = \frac{1}{R}(\nabla\psi \times \hat{i}_\phi) \quad \text{e} \quad \mathbf{J}_p = \frac{1}{R}(\nabla f \times \hat{i}_\phi)\,, \tag{18}$$

substituindo (18) em (17) e lembrando que $\hat{i}_\phi \cdot \nabla\phi = \hat{i}_\phi \cdot \nabla f = 0$,

$$-\frac{\mathbf{B}_\phi}{R}\nabla f + \frac{\mathbf{J}_\phi}{R}\nabla\psi = \nabla p. \tag{19}$$

Agora, fazendo

$$\nabla f(\psi) = \frac{df}{d\psi}\nabla\psi \quad \text{e} \quad \nabla p(\psi) = \frac{dp}{d\psi}\nabla\psi\,, \tag{20}$$

e substituindo (20) em (19)

$$\mathbf{J}_\phi = R\frac{dp}{d\psi} + \mathbf{B}_\psi \frac{df}{d\psi}. \tag{21}$$

Agora, substituindo (16) em (21),

$$\mathbf{J}_\phi = Rp' + \frac{\mu_0}{R} ff'. \tag{22}$$

Para escrevermos $\mathbf{J}_\phi$ em termos de $\psi$, usamos a equação de Ampére, o que nos leva a

$$-\mu_0 R\mathbf{J}_\phi = R\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{23}$$

ou, reescrevendo em termos de funções arbitrátias,

$$R\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\mu_0 R^2 p'(\psi) - {\mu_0}^2 f(\psi) f'(\psi)\,, \tag{24}$$

que é a equação de Grad-Shafranov.

## Resultados

Usando um método numérico iterativo, a equação (23) pôde ser implementada computacionalmente em linguagem Fortran 90, usando um valor inicial para a densidade de corrente, junto com as dimensões de $R$ e $z$, foi possível esboçar em gráficos o perfil de corrente $\mathbf{J}_\phi$, o fluxo poloidal $\psi$ ,o campo magnético poloidal e o gradiente de pressão.

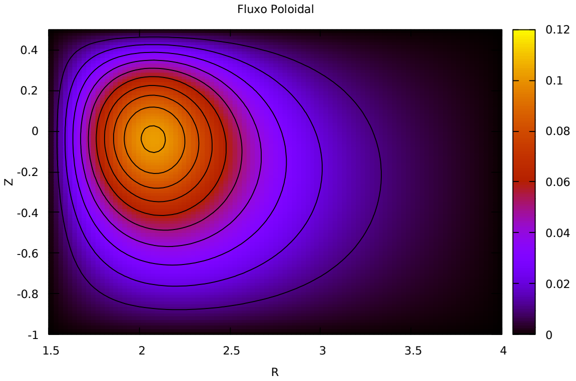


*Figura 1: Fluxo Poloidal*

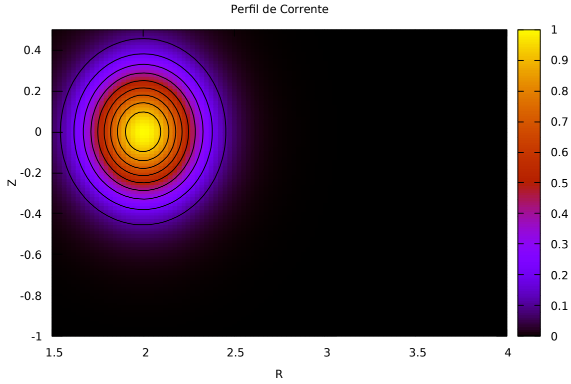


*Figura 2: Perfil de Corrente*

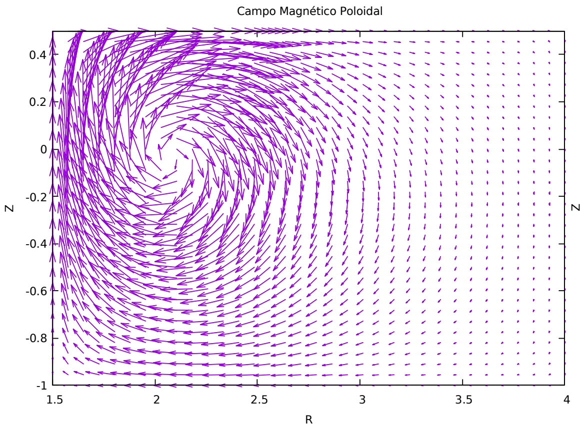


*Figura 3: Campo Magnético Poloidal*

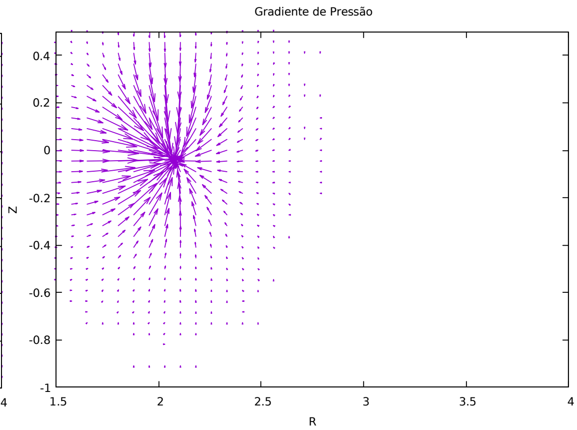


*Figura 4: Gradiente de Pressão*

## 4. CONCLUSÕES

O Presente trabalho estabelece as equações ideias da teoria MHD e sua aplicação no equilíbrio de plasmas confinados em sistemas de confinamento toroidal, como os Tokamaks, de onde foi possível obter as condições de equilíbrio. Os resultados obtidos podem então ser aplicados em desenvolvimentos e simulações numéricas.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BITTENCOURT, J.A. **Fundamentals of Plasma Physics**. Springer-Ver1ag, New York, 2004.

CHEN, Francis F. **Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion** Springer International Publishing, Switzerland, 2016.

WESSON, John. **Tokamaks**. New York: Oxford University Press, 2004.