ANÁLISE DE DOIS MÉTODOS NUMÉRICOS UTILIZADOS NA INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA UM PROBLEMA DE TROCADOR DE CALOR SOLO-AR

FELIPE A. S. MARTINS; DANIELA BUSKE; REGIS SPEROTTO DE QUADROS; RUTH DA SILVA BRUM; IGOR DA CUNHA FURTADO; GUILHERME JAHNECK WEYMAR.

Universidade Federal de Pelotas – feemartins66@gmail.com
Instituto Federal Sul-Rio Grandense –igorjara@gmail.com
Universidade Federal de Pelotas – guilherme.jahnecke@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A técnica da transformada de Laplace (TL) é uma das transformadas integrais que tem sido muito utilizada em diversos tipos de problemas nas áreas das engenharias. Essa técnica tem grande aplicabilidade em problemas que envolvem equações diferenciais e integrais, em específico, a TL tem sido aplicada em modelos de transferência de calor em trocadores de calor solo-ar (TCSA), como por exemplo, no trabalho de MINAEI; SAFIKHANJ (2021). A grande complexidade na aplicação da técnica da TL está na obtenção da sua transformada inversa, alguns problemas a transformada inversa de Laplace (TIL) é facilmente obtida pelo teorema de inversão de forma analítica, porém em muitos outros não é possível encontrar a forma analítica da integral de linha do teorema de inversão, sendo assim necessário um método de inversão numérica para o cálculo desta integral.

Assim, o propósito desta pesquisa é utilizar dois métodos numéricos para a inversão da transformada de Laplace e compará-los de forma a verificar qual método seria mais apropriado para o problema de estudo de caso proposto neste trabalho. A proposta surgiu com base no trabalho de TOMASCHEWSKI (2012), que comparou métodos numéricos para inversões da transformada de Laplace, porém para funções bem simples. Desta forma, para a inversão da TL foram utilizados os métodos de Quadratura Gaussiana e o de Algoritmo Acelerador Gaver-Stehfest, estes têm sido muito utilizados em diversos problemas da ciência. Além disso, o trabalho tem como objetivo específico fazer a implementação e a simulação em linguagem Python.

2. METODOLOGIA

Na sequência são apresentados alguns conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Começamos apresentando as definições TL e TIL.

2.1. Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma ferramenta matemática integral imprópria, que consiste em transformar equações diferenciais ordinárias em equações algébricas. Ou seja, a função f(t) no domínio do tempo, quando aplicada a transformada L{f(t)} resulta numa nova função, está dependendo de uma nova variável, F(s) no domínio complexo.

$$\mathrm{L}\{\mathrm{f(t)}\} = \mathrm{F(s)} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{f(t)dt} \qquad (1)$$

o termo e^{-st} é conhecido como núcleo da transformada, s é um parâmetro complexo $s = \alpha + i\infty$ (BOYCE; DIPRIMA, 2020).

2.2. Transformada Inversa de Laplace

A transformada inversa de Laplace é a operação que executa o processo inverso de obtenção de f(t) a partir de sua transformada F(s) (BOYCE; DIPRIMA, 2020).

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t), \tag{2}$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{-st}F(s)ds, \text{para } t \geqslant 0. \tag{3}$$

Muitos problemas, por vezes, ficam muito complexos ou impossível de encontrar a forma analítica da integral dada na equação (3), sendo necessários métodos numéricos. Assim, na sequência serão apresentados os dois métodos numéricos utilizados neste trabalho no problema de inversão da TL.

2.3. Quadratura Gaussiana

Este método numérico aproxima a integral (3) pela Quadratura Gaussiana (STROUD; SECREST, 1966), dada pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s}\frac{U(s)}{s}ds = \sum_{n=1}^{N} A_n U(s_n), \tag{4}$$

onde as raízes e pesos (s_n e A_n) podem ser encontrados, respectivamente, pelas equações apresentadas a seguir:

$$-(1)^n \sum_{r=0}^{N} \frac{(-1)^{N-r}N(N+r-1)!}{r!\,(N-r)!}s^{N-r} = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{N} A_n p_n^{-r} = \frac{1}{r!}, 0 \leq r \leq (N-1). \tag{6}$$

2.4. Algoritmo de Gaver-Stehfest

O método numérico conhecido como algoritmo de Gaver-Stehfest (MINAEI; SAFIKHANJ, 2021), aproxima a equação (3) por:

$$f(t) \approx \frac{\ln 2}{t}\sum_{i=1}^{N} V_i F\left(\frac{\ln 2}{t}i\right), \tag{7}$$

$$V_i = (-1)^{N/2+i} \sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{\text{Min}(i,N/2)} \frac{K^{N/2}(2k)!}{(N/2-k)!\,(k)!\,(k-1)!\,(i-k)!\,(2k-i)!}. \tag{8}$$

2.5. Aplicação dos dois métodos numéricos de TIL no problema de TCSA

A função transformada, que serão aplicados os dois métodos, é dada por:

$$L\{\theta_f(t,x);\ t \rightarrow s\} = \theta_f(s,x) = \theta_{in}\frac{1}{s}e^{-ms-c(1-\chi(s))x}, \tag{9}$$

na qual a função transformada (θ_f), dada na equação (8), é obtida quando aplicamos a técnica da TL no problema de TCSA, encontrado no trabalho de MINAEI; SAFIKHANJ (2021). Na equação (8), $\theta_f(t,x)$ representa a temperatura dentro do TCSA em função do instante (t) e da posição (x), e os dados θ_{in}, m e c são conhecidos do problema analisado (MINAEI; SAFIKHANJ, 2021). Já a função $\chi(s)$ é representada por:

$$\chi(s) = \frac{K_0\left[r_{po}\sqrt{\frac{s}{\alpha_s}}\right]}{R_p 2k_s\pi r_{po}\sqrt{\frac{s}{\alpha_s}}K_1\left[r_{po}\sqrt{\frac{s}{\alpha_s}}\right] + K_0\left[r_{po}\sqrt{\frac{s}{\alpha_s}}\right]}, \tag{10}$$

sendo K_0 e K_1 as funções de Bessel modificadas de ordem 0 e 1, respectivamente. Já α_s, k_s, R_p e r_{po} são parâmetros físicos e dimensionais do problema em estudo (MINAEI; SAFIKHANJ, 2021).

Apresentado o problema, que é encontrar a transformada inversa de Laplace da equação (9), isso, devido sua complexidade em encontrar a forma analítica de $L^{-1}\{\theta_f(s,x), s \rightarrow t\}$. Assim, na seção 3 serão apresentados os resultados obtidos aplicando os métodos numéricos para inversão da transformada de Laplace da equação (9).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A implementação dos métodos numéricos e simulação foram feitas em linguagem Python, para simulação dos métodos numéricos foram consideradas as seguintes aproximações dos somatórios (4) e (6): N = 2, 8 e 16. Para comparação dos resultados obtidos utilizou-se o experimento apresentado em MINAEI; SAFIKHANJ (2021), neste experimento foram feitas medições da temperatura em 7 posições (x) ao longo do duto do trocador de calor. Assim, na Tabela 1 encontram-se na primeira e segunda coluna a posição e a temperatura observada, respectivamente, no trocador de calor após 1 hora do início do experimento. A terceira, quarta e quinta coluna são os resultados obtidos utilizando o método de Quadratura Gaussiana e as últimas três colunas são apresentados os resultados usando o método de Gaver-Stehfest.

Ao analisar os resultados da tabela acima, podemos notar que os valores gerados das temperaturas pela simulação no instante de 3600s pelo método numérico de Quadratura Gaussiana, estão convergindo, porém se analisarmos a segunda casa decimal dos resultados o método ainda não convergiu para N = 16, teríamos que aumentar o valor N para termos uma precisão melhor.

Já os resultados gerados pelo Algoritmo de Gaver-Stehfest, convergiram com valores bem próximos aos das temperaturas observadas, assim como o método da Quadratura Gaussiana, porém o método tem uma convergência melhor, pois com N = 8 não há variação nas três primeiras casas decimais.

Tabela 1: Comparação entre as temperaturas observadas e o método numérico por Quadratura Gaussiana aplicado na equação (8).

		Quadratura Gaussiana			Gaver-Stehfest		
		$N = 2$	$N = 8$	$N = 16$	$N = 2$	$N = 8$	$N = 16$
Posição (x) no TCSA (m)	Temperatura (°C) Observada	Temperatura (°C) no instante de 3600s					
3,35	37,4	39,81599906	39,8184305	39,85306527	39,96739083	39,77259598	39,77261355
6,69	35,8	37,24768254	37,24895123	37,28806434	37,50012808	37,1825634	37,18258343
10,04	35	35,16685297	35,16567885	35,19664194	35,48199161	35,09352854	35,09354354
13,38	34,3	33,49354971	33,48986052	33,50911028	33,84206478	33,42020464	33,42021141
16,73	33,7	32,14172616	32,13597751	32,14414634	32,50220033	32,07298318	32,0729832
20,07	33,3	31,05755033	31,05038732	31,0498293	31,41462223	30,99571181	30,9957058
23,42	33,1	30,18384961	30,17589764	30,16924707	30,52696492	30,12981309	30,12980277

Fonte o Autor.

4. CONCLUSÕES

Podemos concluir que, após obter os valores das aproximações pelos métodos numéricos de inversão de transformada de Laplace por Quadratura Gaussiana e Gaver-Stehfest, ao realizar comparação de seus resultados, chega-se à conclusão que o melhor método numérico, para este problema em específico, que apresenta uma convergência mais rápida é o método de Gaver-Stehfest.

Como apresentado no trabalho TOMASCHEWSKI (2012), dependendo da função transformada que aplicamos esses métodos observamos que, o método de Gaver-Stehfest responde melhor para certos tipos de funções transformadas, já o método de Quadratura Gaussiana converge mais rápido para outras funções transformadas.

Cabe ressaltar que o método de Quadratura Gaussiana também apresentou bons resultados, porém, para uma melhor precisão teríamos que aumentar o número de pontos da quadratura.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.

MINAEI, A.; SAFIKHANI, H. A new transient analytical model for heat transfer of earth-to-air heat exchangers. **Journal of Building Engineering**, v.31, p.1-11, 2021.

STROUD, A.; SECREST, D. **Gaussian Quadrature Formulas.** New Jersey: Prendice-Hall Inc., 1966.

TOMASCHEWSKI, F. K. **Solução da Equação SN Multigrupo de Transporte Dependente do Tempo em Meio Heterogêneo**. 2012. 75f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.