

MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS APLICADO A PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO PARA EDO'S LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

CRISTIAN DA SILVA MENDES¹; JEFERSON MEIRA²; RUTH DA SILVA BRUM³,
LESLIE DARIEN PÉREZ FERNÁNDEZ⁴

¹Universidade Federal de Pelotas (UFPe) – cristiansmendes@hotmail.com

²Universidade Federal de Pelotas (UFPe) – meiraengagricola@gmail.com

³Universidade Federal de Pelotas (UFPe) - ruth.silva.brum@ufpel.edu.br

⁴Universidade Federal de Pelotas (UFPe) – leslie.fernandez@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar a resolução, através do método de diferenças finitas (MDF), de PVCs definidos por uma EDO linear de segunda ordem

$$y'' + f(x)y + g(x)y = q(x), \quad x \in (a, b), \quad (1)$$

com $f(x)$, $g(x)$ e $q(x)$ funções conhecidas, e sujeita às condições de contorno

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (2)$$

Este trabalho é motivado pela modelagem da condução do calor no solo como etapa inicial do estudo de trocadores de calor solo-ar para regulação sustentável da temperatura com aplicações, por exemplo, em conforto térmico habitacional e estabilidade térmica em armazenagem (BRUM, 2013; NÓBREGA, 2021). Inicialmente utiliza-se um modelo espacialmente unidimensional para obter a função $\theta = \theta(z, t)$ do desvio da temperatura com relação à média T_0 do solo na profundidade z e no instante de tempo t . Tal modelo é definido pelo problema

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad \theta(0, t) = \theta_0 \sin \omega t, \quad \theta(+\infty, t) = 0,$$

em que α é a difusividade térmica do solo, θ_0 é a amplitude inicial da variação de temperatura, e ω é a frequência. Após separar variáveis na equação desse problema fazendo $\theta(z, t) = \phi(z)\tau(t)$, obtém-se o PVC

$$\phi'' - c\phi = 0, \quad \phi(0) = \theta_0, \quad \phi(+\infty) = 0,$$

em que c é uma constante, e cuja EDO é de segunda ordem, linear, homogênea e com coeficientes constantes e que é um caso particular da EDO (1). Ainda, na prática, a condição de contorno no infinito pode ser trocada por uma condição do tipo $\phi(Z) = 0$, para $Z > 0$ fixo suficientemente grande, e que é um caso particular da segunda condição em (2). Isto justifica o tipo dos três exemplos neste trabalho.

2. METODOLOGIA

Seguindo Conte & de Boor (1980), nesta seção apresenta-se a aplicação do MDF ao PVC (1)-(2). Para isto, divide-se o intervalo $[a, b]$ em N partes iguais de comprimento h , sendo $x_0 = a$, $x_N = b$ e $x_n = x_0 + nh$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, os pontos da malha resultante, em que os valores de y correspondentes são $y_n = y(x_0 + nh)$, $n = 0, 1, \dots, N$. Ainda, para resolver o PVC pelo MDF, cada derivada na EDO (1) é

substituída por uma aproximação em diferenças, que, neste trabalho, são as seguintes diferenças centrais para as derivadas de primeira e segunda ordens:

$$y'(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}, \quad y''(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}. \quad (3)$$

Assim, segue de (3) que a aproximação em diferenças da EDO (1) é

$$\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + f_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + g_n y_n = q_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4)$$

em que $f_n = f(x_n)$, $g_n = g(x_n)$, $q_n = q(x_n)$. Multiplicando (4) por h^2 e agrupando termos semelhantes, tem-se

$$(1 - \frac{h}{2} f_n) y_{n-1} + (-2 + h^2 g_n) y_n + (1 + \frac{h}{2} f_n) y_{n+1} = h^2 q_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5)$$

Sendo $y_0 = \alpha$ e $y_N = \beta$ conhecidos de (2), segue que (5) é um sistema de $N-1$ equações lineares com $N-1$ incógnitas y_n , $n = 1, 2, \dots, N-1$, da forma:

$$\begin{aligned} (-2 + h^2 g_1) y_1 + (1 + \frac{h}{2} f_1) y_2 &= h^2 q_1 - (1 - \frac{h}{2} f_1) \alpha, \\ (1 - \frac{h}{2} f_2) y_1 + (-2 + h^2 g_2) y_2 + (1 + \frac{h}{2} f_2) y_3 &= h^2 q_2, \\ (1 - \frac{h}{2} f_3) y_2 + (-2 + h^2 g_3) y_3 + (1 + \frac{h}{2} f_3) y_4 &= h^2 q_3, \\ &\vdots \\ (1 - \frac{h}{2} f_{N-2}) y_{N-3} + (-2 + h^2 g_{N-2}) y_{N-2} + (1 + \frac{h}{2} f_{N-2}) y_{N-1} &= h^2 q_{N-2}, \\ (1 - \frac{h}{2} f_{N-1}) y_{N-2} + (-2 + h^2 g_{N-1}) y_{N-1} &= h^2 q_{N-1} - (1 + \frac{h}{2} f_{N-1}) \beta. \end{aligned} \quad (6)$$

Como o sistema (6) é tridiagonal, neste trabalho emprega-se o algoritmo 4.3, página 154, de Conte & de Boor (1980), desenvolvido para tal tipo de sistemas.

Na próxima seção apresenta-se resultados computacionais desta aplicação do MDF obtidos a partir da sua implementação no software livre Octave, que é uma linguagem de alto nível para computação numérica (<https://octave.org/>).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir aplica-se o MDF em três PVCs formados pelas seguintes EDOs homogêneas com coeficientes constantes:

$$y'' - 5y' + 4y = 0, \quad (7)$$

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad (8)$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \quad (9)$$

e as condições de contorno

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad (10)$$

respectivamente. As EDOs desses três PCVs têm dois autovalores reais diferentes, um autovalor real de multiplicidade 2, e dois autovalores complexos conjugados, respectivamente. As soluções exatas desses PVCs, obtidas por técnicas tradicionais de resolução analítica de EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes (ver: BOYCE; DiPRIMA, 2010), são as seguintes:

$$y = \frac{e^{4x} - e^{x+3}}{1 - e^3} \quad (\text{do PVC (7) e (10)}), \quad (11)$$

$$y = e^{-x}(1 - x) \quad (\text{do PVC (8) e (10)}), \quad (12)$$

$$y = e^x(\cos x - \cot 1 \sin x) \quad (\text{do PVC (9) e (10)}). \quad (13)$$

Nas figuras 1, 2 e 3 a seguir apresentam-se as comparações das soluções exatas analíticas (11), (12) e (13) (curvas vermelhas) dos PVCs (7) e (10), (8) e (10), e (9) e (10), respectivamente, com as soluções numéricas correspondentes (circunferências azuis) obtidas com a implementação do MDF com $N = 100$. Nos três casos, observa-se que as soluções analíticas e numéricas são praticamente indistinguíveis, sendo as diferenças máximas entre elas de ordens 10^{-4} , 10^{-6} e 10^{-5} , respectivamente.

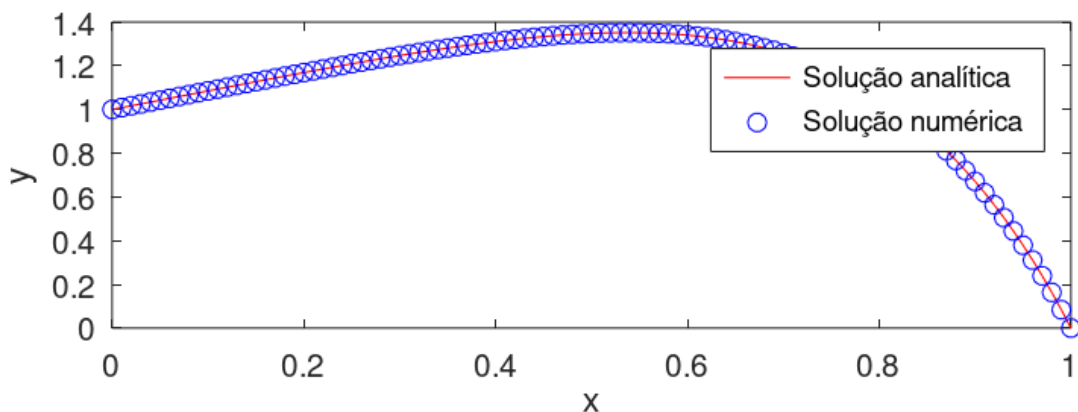


Figura 1. Soluções analítica e numérica do PVC definido por (7) e (10).

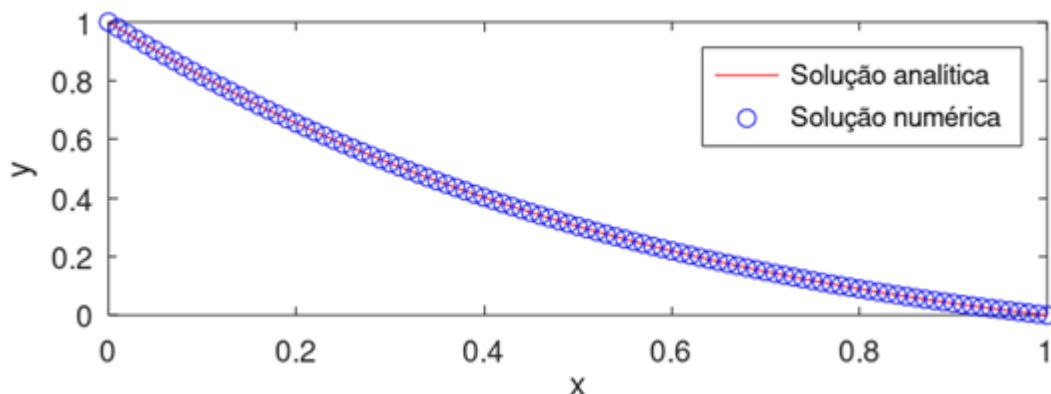


Figura 2. Soluções analítica e numérica do PVC definido por (8) e (10).

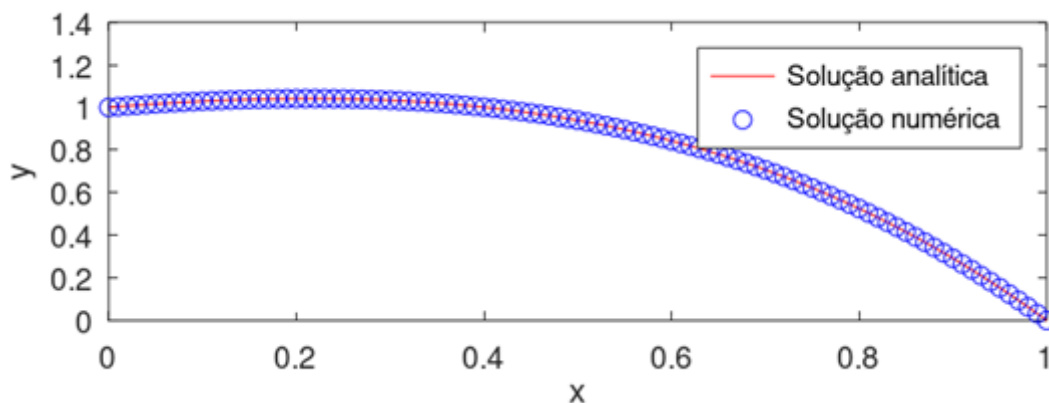


Figura 3. Soluções analítica e numérica do PVC definido por (9) e (10).

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado a aplicação do MDF à resolução de PVCs para EDOs lineares de segunda ordem sujeitas a condições de Dirichlet. O MDF desenvolvido para este tipo de PVCs foi implementado em Octave e aplicado em três exemplos de EDOs homogêneas com coeficientes constantes correspondentes aos casos de dois autovalores reais diferentes, um autovalor de multiplicidade 2, e dois autovalores complexos conjugados, respectivamente. Nos três casos, a solução numérica obtida via MDF com $N = 100$ foi comparada com a solução exata obtida analiticamente, evidenciando sua eficácia na resolução desse tipo de PVCs. Especificamente, observou-se que as soluções analíticas e numéricas são praticamente indistinguíveis, sendo as diferenças máximas entre elas de ordens 10^{-4} , 10^{-6} e 10^{-5} , respectivamente.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOYCE, W.E.; DiPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- BRUM, R.S. **Modelagem computacional de trocadores de calor solo-ar**. 2013.118 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- CONTE, S.D.; DeBOOR, C. **Elementary Numerical Analysis an Algorithmic Approach**. New York: McGraw-Hill, 1980.
- NÓBREGA, E.S. **Abordagem Analítica para análise térmica dos trocadores de calor solo-ar**. 2021. Dissertação de Mestrado - Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática, Universidade Federal de Pelotas.